Annales mathématiques Blaise Pascal

Andro Mikelić
Vincent Devigne

Écoulement tangentiel sur une surface rugueuse et loi de Navier

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, n° 2 (2002), p. 313-327
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_313_0>

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL 9, 313-327 (2002)

Ecoulement tangentiel sur une surface rugueuse et loi de Navier

Andro Mikelić[1]
Vincent Devigne

L'article est dédié au 60ième anniversaire de Willi Jäger

Résumé

Nous considérons un écoulement visqueux tangentiel à une surface rugueuse. Nous étudions le comportement efficace d'écoulements au voisinage de la frontière lorsque la taille caractéristique des rugosités est petite. Nous montrons que la frontière rugueuse peut être approchée par une surface artificielle lisse (la paroi numérique) sur laquelle la condition d'adhérence à la paroi pour la vitesse tangentielle devient la condition de glissement de Navier. Pour une surface rugueuse périodique nous déterminons la matrice de frottement de Navier et montrons que le problème efficace, basé sur la loi de paroi, est une approximation du problème physique d'ordre la taille des rugosités puissance 3/2.

1 Introduction

En physique des fluides newtoniens, la condition d'adérence à la paroi est justifiée seulement en présence de viscosité. Comme le fluide ne peut pas traverser la paroi, sa vitesse normale est égale à zéro. C'est la condition de non-pénétration. En revanche, l'absence de glissement n'est pas très intuitive. Il s'agit d'une loi établie expérimentalement et contestée par Navier lui-même (voir [17]). Navier pensait que la vitesse tangentielle devait être proportionnelle au cisaillement (la loi de Navier). La théorie cinétique a confirmé la loi de Navier, mais avec le coefficient de frottement proportionnel

[1]Cet article correspond à l'exposé d'A. Mikelić au workshop **Mathématiques et Calcul Scientifique pour l'Océanographie**, Grenoble, 7-8/3/2002

au chemin moléculaire moyen libre (voir e.g. [18]). En conséquence pour les fluides réels ce coefficient vaut zéro et confirme la condition d'adhérence à la paroi.

Dans beaucoup d'applications la frontière est rugueuse comme dans le cas des frontières complexes en dynamique des écoulements géophysiques. La taille du domaine de calcul (mer, océan) est tellement grande que les détails de la côte peuvent être considérés comme des rugosités. Comme autres exemples on peut citer les fonds marins constitués de rugosités aléatoires et les corps artificiels avec une distribution périodique des rugosités. Une simulation numérique des problèmes d'écoulements en présence d'une géométrie rugueuse est très difficile pour deux raisons. Un grand nombre de noeuds de maillage est nécessaire ainsi que de multiples données. D'un point de vue numérique, une frontière rugueuse artificielle proche de celle d'origine est choisie et les équations sont résolues dans le "nouveau" domaine. La difficulté de la frontière rugueuse est contournée mais des conditions aux limites viennent à manquer. Il est clair que la condition de non-pénétration $v.n = 0$ doit être conservée mais il n'y a en outre aucune raison de garder la condition d'adhérence. Habituellement le cisaillement est supposé être une fonction non-linéaire F de la vitesse tangentielle. F est déterminée de façon empirique et varie suivant la nature du problème. De telles relations sont appelées *loi de paroi* et la condition classique de Navier en est un exemple. Un autre exemple est la modélisation de la couche limite turbulente à proximité de la surface rugueuse par un profil logarithmique des vitesses.

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\Big(\frac{1}{\kappa}\ln\big(\frac{y}{\mu}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\big) + C^+(k_s^+)\Big) \tag{1.1}$$

où v_τ est la vitesse tangentielle, y la coordonnée verticale et τ_w le cisaillement, ρ représente la densité et μ la viscosité, $\kappa \approx 0.41$ est la constante de von Kármán's et C^+ une fonction du rapport k_s^+ c.a.d de la hauteur des rugosités k_s sur l'épaisseur de la sous-couche mince de la paroi $\delta_v = \frac{\mu}{v_\tau}$. Pour plus de détail nous donnons la référence du livre de Shlichting [8] .

Justifier le profil logarithmique des vitesses dans la couche superposée est mathématiquement hors d'atteinte pour le moment. Cependant à partir de résultats récents, nous sommes capables de justifier la loi de Navier pour des écoulements laminaires visqueux incompressibles au dessus de frontières à rugosité périodique. Dans cet article nous allons donner un aperçu de résultats récents rigoureux sur la condition de Navier avec des application possibles aux écoulements géophysiques.

Nous nous concentrons sur les équations de Stokes et de Navier-Stokes incompressibles et nous allons présenter une dérivation de la loi de Navier en construisant des couches limites développées dans [9].

Les problèmes d'écoulement sur des surfaces rugueuses ont été traités par O.Pironneau et ses collaborateurs dans [16] , [2] et [1]. L'article [16] traite l'écoulement sur une surface rugueuse et l'écoulement à la surface d'une mer ondulant. Quelques problèmes sont discutés et un résultat rigoureux dans [1] est annoncé. Finalement dans l'article [1] l'écoulement stationnaire incompressible pour un grand nombre de Reynolds $Re \sim \frac{1}{\varepsilon}$ sur une frontière rugueuse périodique est traité avec ϵ la période des rugosités. Un développement asymptotique est construit et à partir de couches limites correctrices définies dans une cellule semi-infinie des lois de paroi effectives sont obtenues. Une validation numérique est jointe mais il n'y a pas de résultats de convergence mathématique rigoureux. L'estimation d'erreur annoncée dans [2] n'a pas été prouvée dans [1].

Nous mentionnons également les résultats de Y.Amirat, J.Simon et leurs collaborateurs de l'écoulement de Couette sur une plaque ondulée (voir [4] , [5] et [3]). Ils traitent principalement de la réduction de la trainée pour l'écoulement de Couette.

Notre approche sera différente des réferences mentionnées ci-dessus. Nous allons justifier la loi de glissement de Navier par la technique développée dans [10] pour l'opérateur de Laplace et par suite dans [9] pour le système de Stokes. Le résultat pour un écoulement 2D laminaire visqueux incompressible sur une surface rugueuse est dans [9]. Dans le texte qui suit, nous considérons un écoulement de Couette 3D sur une surface rugueuse. Dans le §2 nous introduisons le problème de couche limite correspondant et dans §3 nous obtenons la condition de glissement de Navier. La section §4 est consacrée aux applications possibles à la dynamique des écoulements géophysiques.

2 Couche limite de Navier

Comme il a été déjà observé en hydrodynamique, les phénomènes importants pour une frontière apparaissent dans une couche mince l'entourant . Nous ne nous intéressons pas aux couches limites, correspondantes à la limite de la zéro viscosité pour les équations de Navier-Stokes, mais plutôt à la couche limite visqueuse, décrivant des effets de la rugosité. Il y a une similitude avec les couches limites décrivant les effets interfaciaux entre un domaine rempli par un fluide et un milieu poreux saturé . De telles couches limites ont été développées pour l'opérateur de Laplace, avec des conditions de Dirichlet homogènes sur des perforations, dans [10] . La théorie correspondante pour le système de Stokes est dans [9] et [15] . Le but de cette section est de présenter la construction de la couche limite principale, qui sera utilisée pour calculer la matrice de frottement, figurant comme coefficient dans la loi de glissement de Navier. Il est naturel de l'appeler *la couche limite de Navier.* Dans [11] la 2D couche limite était construite. On poursuit ici la 3D construction entamée dans [13] qui généralise les résultats de [11] .

Soient b_j, $j = 1, 2, 3$ des constantes positives. Soit $Z = (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, b_3)$ et soit Υ une surface Lipschitzienne $y_3 = \Upsilon(y_1, y_2)$, prenant valeurs entre 0 et b_3. Nous supposons que la surface rugueuse $\cup_{k \in \mathbb{Z}^2}(\Upsilon + k)$ est aussi Lipschitzienne. Nous introduisons la cellule canonique de rugosité par $Y = \{y \in Z \mid b_3 > y_3 > \max\{0, \Upsilon(y_1, y_2)\}\}$.

Le rôle crucial revient au problème auxiliaire suivant :
Pour un vecteur constant $\lambda \in \mathbb{R}^2$, trouver $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ satisfaisant

$$-\Delta_y \xi^\lambda + \nabla_y \omega^\lambda = 0 \quad \text{dans } Z^+ \cup (Y - b_3\vec{e}_3) \tag{2}$$

$$\mathrm{div}_y \xi^\lambda = 0 \qquad \text{dans } Z_{bl} \tag{3}$$

$$\left[\xi^\lambda\right]_S(\cdot, 0) = 0 \quad \text{sur } S \tag{4}$$

$$\left[\{\nabla_y \xi^\lambda - \omega^\lambda I\}\vec{e}_3\right]_S(\cdot, 0) = \lambda \ \text{ sur } S \tag{5}$$

$$\xi^\lambda = 0 \quad \text{sur } (\Upsilon - b_3\vec{e}_3), \quad \{\xi^\lambda, \omega^\lambda\} \text{ est } y' = (y_1, y_2) - \text{périodique}, \tag{6}$$

où $S = (0, b_1) \times (0, b_2) \times \{0\}$, $Z^+ = (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, +\infty)$, et $Z_{bl} = Z^+ \cup S \cup (Y - b_3\vec{e}_3)$.

Soit $V = \{z \in L^2_{loc}(Z_{bl})^3 : \nabla_y z \in L^2(Z_{bl})^9;\ z = 0 \text{ sur } (\Upsilon - b_3\vec{e}_3);\ \mathrm{div}_y z = 0$ dans Z_{bl} et z est $y' = (y_1, y_2)$-périodique $\}$. Le lemme de Lax-Milgram nous garantie l'existence d'un unique $\xi^\lambda \in V$ satisfaisant

$$\int_{Z_{bl}} \nabla \xi^\lambda \nabla \varphi \, dy = -\int_S \varphi \lambda \, dy_1 dy_2, \qquad \forall \varphi \in V. \tag{7}$$

En utilisant le théorême de De Rham, nous obtenons une fonction $\omega^\lambda \in L^2_{loc}(Z_{bl})$, unique modulo une constante et satisfaisant (2). D'après la théorie elliptique les solutions $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ de (2)-(6) sont telles que $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\} \in V \cap C^\infty(Z^+ \cup (Y - b_3\vec{e}_3))^3 \times C^\infty(Z^+ \cup (Y - b_3\vec{e}_3))$ to (2)-(6).

Alors on a

Lemme 2.1: *([9] ,[15]). Soient a, a_1 et a_2, $a_1 > a_2$, des constantes positives. Alors la solution $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ satisfait*

$$\begin{cases} \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \xi_2^\lambda(y_1,y_2,a)\ dy_1dy_2 = 0, \\ \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \omega^\lambda(y_1,y_2,a_1)\ dy_1dy_2 = \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \omega^\lambda(y_1,y_2,a_2)\ dy_1dy_2, \\ \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \xi_j^\lambda(y_1,y_2,a_1)dy_1dy_2 = \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \xi_j^\lambda(y_1,y_2,a_2)dy_1dy_2, j=1,2 \\ C_\lambda^{bl} = \sum_{j=1}^{2} C_\lambda^{j,bl}\lambda_j = \int_S \xi^\lambda \lambda\ dy_1dy_2 = -\int_{Z_{bl}} |\nabla\xi^\lambda(y)|^2\ dy < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Lemme 2.2:. *Soit $\lambda \in I\!R^2$ et soit $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ la solution de $(2)-(6)$ satisfaisant $\int_S \omega^\lambda\ dy_1dy_2 = 0$. Alors $\xi^\lambda = \sum_{j=1}^{2}\xi^j\lambda_j$ et $\omega^\lambda = \sum_{j=1}^{2}\omega^j\lambda_j$, où $\{\xi^j,\omega^j\} \in V \times L^2_{loc}(Z_{bl})$, $\int_S \omega^j\ dy_1dy_2 = 0$, est la solution de $(2)-(6)$ pour $\lambda = \vec{e}_j$, $j = 1,2$.*

Lemme 2.3:. *Soit $a > 0$ et soit $\xi^{a,\lambda}$ la solution de $(2)-(6)$ avec S remplacé par $S_a = (0,b_1)\times(0,b_2)\times\{a\}$ et Z^+ by $Z_a^+ = (0,b_1)\times(0,b_2)\times(a,+\infty)$. Alors nous avons*

$$C_\lambda^{a,bl} = \int_0^{b_1}\int_0^{b_2} \xi^{a,\lambda}(y_1,y_2,a)\lambda\ dy_1 = C_\lambda^{bl} - a \mid \lambda \mid^2 b_1b_2 \tag{9}$$

Ce résultat simple va impliquer l'invariance de la loi obtenue par rapport à la position de la paroi artificielle.

Corollaire 2.4:. *$\mid C_\lambda^{a,bl} \mid$ est minimale pour $a = 0$.*

Remarque: . Si la frontière est plane, i.e. Υ = cte., alors la constante minimale $\mid C_\lambda^{a,bl} \mid$ est égale à zéro. Dans ce cas, la condition d'adhérence à la paroi va rester. Si b_3 est la hauteur maximale de Υ, alors le lemme 3 n'est pas valable pour $a < 0$.

Lemme 2.5:. *Soit $\{\xi^j,\omega^j\}$ vérifiant le lemme 2.2 et soit $M_{ij} = \frac{1}{b_1b_2}\int_S \xi_i^j\ dy_1dy_2$ la matrice de Navier. Alors la matrice M est symétrique définie négative.*

Lemme 2.6: . *Soit* $\{\xi^j, \omega^j\}, j = 1$ *et* $j = 3$, *vérifiant lelemme 2.2. Alors on a*

$$\begin{cases} | D^\alpha \, rot_y \xi^j(y) | \leq C e^{-2\pi y_3 \min\{1/b_1, 1/b_2\}}, \; y_3 > 0, \; \alpha \in I\!N^2 \cup (0,0) \\ | \xi^j(y) - (M_{1j}, M_{2j}, 0) | \leq C(\delta) e^{-\delta y_3}, \; y_3 > 0, \; \forall \delta < \dfrac{2\pi}{\max\{b_1, b_2\}} \\ | D^\alpha \xi^j(y) | \leq C(\delta) e^{-\delta y_3}, \; y_3 > 0, \; \alpha \in I\!N^2, \; \forall \delta < \dfrac{2\pi}{\max\{b_1, b_2\}} \\ | \omega^j(y) | \leq C e^{-2\pi y_3 \min\{1/b_1, 1/b_2\}}, \qquad y_3 > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Corollaire 2.7:. *Le système* $(2) - (6)$ *définie une couche limite.*

Remarque: Pour des simulation numériques de la couche limite de même type mais correspondant à la loi de Beavers et Joseph voir la référence [14] .

3 Justification de la condition de glissement de Navier pour l'écoulement de Couette laminaire 3D

Une justification mathématiquement rigoureuse de la condition de glissement de Navier pour l'écoulement de Poiseuille 2D tangentiel à une frontière rugueuse est dans [11] . Un écoulement correspondant aux nombres de Reynolds modérés a été considéré et les résultats suivants ont été montrés : a) Un résultat de stabilité non-linéaire par rapport aux petites perturbations de la frontière régulière par une frontière rugueuse; b) Un résultat d'approximation d'ordre $\varepsilon^{3/2}$; c) La justification rigoureuse de la condition de glissement de Navier.

Ici, nous allons présenter les résultats qui figurent dans la prépublication [13] et qui concernent un écoulement de Couette 3D.

Nous considérons un écoulement visqueux incompressible dans le domaine Ω^ε, contenant le parallélépipède $P = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, l'interface $\Sigma = (0, L_1) \times (0, L_2) \times \{0\}$ et la couche rugueuse $R^\varepsilon = \Big(\cup_{\{k \in \mathbb{Z}^2\}} \varepsilon \big(Y + (k_1, k_2, -b_3) \big) \Big) \cap \Big((0, L_1) \times (0, L_2) \times (-\varepsilon b_3, 0) \Big)$. La cellule canonique $Y \subset (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, b_3)$ est définie dans la section précédente . Pour simplifier, nous supposons que $L_1/(\varepsilon b_1)$ et $L_2/(\varepsilon b_2)$ sont des entiers. Soit $\mathcal{I} = \{0 \leq k_1 \leq L_1/b_1;\ 0 \leq k_2 \leq L_2/b_2;\ k \in \mathbb{Z}^2\}$. Alors, notre frontière rugueuse $\mathcal{B}^\varepsilon = \cup_{\{k\in\mathcal{I}\}}\varepsilon\big(\Upsilon + (k_1, k_2, -b_3)\big)$ contient un grand nombre de " bosses " , distribuées périodiquement de longueur et d'amplitude caractéristique $\varepsilon << 1$.

Pour un $\varepsilon > 0$ et une vitesse $\vec{U} = (U_1, U_2, 0)$, donnés, l'écoulement de Couette est décrit par le système suivant

$$-\nu\triangle v^\varepsilon + (v^\varepsilon\nabla)v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \tag{11}$$

$$\text{div } v^\varepsilon = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \tag{12}$$

$$v^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \mathcal{B}^\varepsilon, \tag{13}$$

$$v^\varepsilon = \vec{U} \qquad \text{sur } \Sigma_2 = (0, L_1) \times (0, L_2) \times \{L_3\} \tag{14}$$

$$\{v^\varepsilon, p^\varepsilon\} \quad \text{est périodique en } (x_1, x_2) \text{ de période } (L_1, L_2) \tag{15}$$

où $\nu > 0$ est la viscosité cinématique et $\int_\Omega^\varepsilon p^\varepsilon\, dx = 0$.

Notons qu'un problème analogue a été considéré dans [3], mais dans une bande infinie ayant une frontière rugueuse. Dans [3] Y.Amirat et ses collaborateurs ont cherché une solution périodique en (x_1, x_2), de période $\varepsilon(b_1, b_2)$. Si notre solution est unique, elle coïncidera avec la solution construite dans [3] .

Comme nous avons besoin, non seulement de l'existence pour ε donné , mais aussi des estimations a priori indépendantes de ε, nous présentons un résultat de stabilité non-linéaire par rapport aux perturbations rugueuses de la frontière. Il va impliquer les estimations a priori uniformes.

Notons que l'écoulement de Couette dans P, satisfaisant les conditions d'adhérence à Σ, est donné par

$$v^0 = \frac{U_1 x_3}{L_3}\vec{e}_1 + \frac{U_2 x_3}{L_3}\vec{e}_2 = \vec{U}\frac{x_3}{L_3}, \qquad p^0 = 0. \tag{16}$$

Soit $|U| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$. On montre aisément l'unicité si $|U|L_3 < 2\nu$ i.e. si le nombre de Reynolds est modéré .

Nous prolongeons la vitesse sur $\Omega^\varepsilon \setminus P$ par zéro.

On cherche une solution pour $(11) - (15)$ comme une petite perturbation de l'écoulement de Couette (16).

Théorème 3.1: *([13]). Soit $|U|L_3 \leq \nu$. Alors il existe des constantes $C_0 = C_0(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2)$ telles que pour $\varepsilon \leq C_0(\frac{L_3}{|U|})^{3/4}\nu^{3/4}$ le problème* $(11) - (15)$

admette une solution unique $\{v^\varepsilon, p^\varepsilon\} \in H^2(\Omega^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\int_\Omega^\varepsilon p^\varepsilon \, dx = 0$, *satisfaisant*

$$\|\nabla(v^\varepsilon - v^0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} \leq C\sqrt{\varepsilon}\frac{|U|}{L_3}. \tag{19}$$

De plus,

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \setminus P)^3} \leq C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\frac{|U|}{L_3} \tag{20}$$

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)^3} + \|v^\varepsilon - v^0\|_{L^2(P)^3} \leq C\varepsilon\frac{|U|}{L_3} \tag{21}$$

$$\|p^\varepsilon - p^0\|_{L^2(P)} \leq C\frac{|U|}{L_3}\sqrt{\varepsilon}, \tag{22}$$

où $C = C(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2)$.

Maintenant nous avons les estimations à priori uniformes par rapport à ε. Malheureusement l'approximation obtenue n'est pas suffisamment bonne. Il nous faut ajouter la correction d'ordre $O(\varepsilon)$.

En suivant l'approche de [11] et [13], la condition de glissement de Navier correspond à la correction de la vitesse d'ordre $O(\varepsilon)$ sur la frontière. Le calcul non-rigoureux donne

$$v^\varepsilon = v^0 - \frac{\varepsilon}{L_3}\sum_{j=1}^{2} U_j\big(\xi^j(\frac{x}{\varepsilon}) - (M_{j1}, M_{j2}, 0)H(x_3)\big) -$$
$$\frac{\varepsilon}{L_3}\sum_{j=1}^{2} U_j(1 - \frac{x_3}{L_3})(M_{j1}, M_{j2}, 0)H(x_3) + O(\varepsilon^2)$$

où v^0 est la vitesse de Couette dans P et le dernier terme correspond au contre-écoulement créé par la stabilisation de la vitesse, qui correspond à la couche limite, vers une vitesse constante non nulle.En conséquence sur l'interface Σ

$$\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_3} = \frac{U_j}{L_3} - \frac{1}{L_3}\sum_{i=1}^{2} U_i \frac{\partial \xi_j^i}{\partial y_3} + O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon}v_j^\varepsilon = -\frac{1}{L_3}\sum_{i=1}^{2} U_i \xi_j^i(\frac{x}{\varepsilon}) + O(\varepsilon).$$

Par passage à la moyenne nous trouvons la loi de glissement de Navier

$$u_j^{eff} = -\varepsilon\sum_{i=1}^{2} M_{ji}\frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3} \quad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{NFC}$$

où u^{eff} est la moyenne de v^ε sur une rugosité représentative et la matrice M est définie dans le lemme 4. On néglige les termes d'ordre plus élevé.

Nous allons maintenant donner une démonstration rigoureuse.

Il est clair que dans P l'écoulement va continuer d'être régi par le système de Navier-Stokes. La présence des irrégularités va contribuer seulement aux conditions efficaces sur la paroi artificielle . La contribution dominante pour l'estimation (19) vient de l'intégrale superficielle $\int_\Sigma \varphi_j$. En suivant [13], on l'élimine en utilisant les couches limites

$$\xi^{j,\varepsilon}(x) = \varepsilon\xi^j(\frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \omega^{j,\varepsilon}(x) = \omega^j(\frac{x}{\varepsilon}), \quad x \in \Omega^\varepsilon,\ j = 1,2, \tag{23}$$

où $\{\xi^j, \omega^j\}$ est définie dans le lemme 2.2. Nous avons, pour tout $q \geq 1$ et $j = 1,2$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\xi^{j,\varepsilon} - \varepsilon(M_{1j}, M_{2j}, 0)\|_{L^q(P)^3} + \|\omega^{j,\varepsilon}\|_{L^q(P)} + \|\nabla\xi^{j,\varepsilon}\|_{L^q(\Omega)^9} = C\varepsilon^{1/q} \tag{24}$$

et

$$-\triangle\xi^{j,\varepsilon} + \nabla\omega^{j,\varepsilon} = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon \setminus \Sigma \tag{25}$$

$$\text{div } \xi^{j,\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \tag{26}$$

$$\left[\xi^{j,\varepsilon}\right]_\Sigma(\cdot,0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \tag{27}$$

$$\left[\{\nabla\xi^{j,\varepsilon} - \omega^{j,\varepsilon}I\}e_3\right]_\Sigma(\cdot,0) = e_j \quad \text{sur } \Sigma, \tag{28}$$

i.e. notre couche limite correspond à la création de petits tourbillons par des rugosités.

Comme dans [11] la stabilisation de $\xi^{j,\varepsilon}$ vers une vitesse constante nonnulle $\varepsilon\big(M_{1j}, M_{2j}, 0\big)$, sur la frontière supérieure, crée un contre-écoulement. Il est donné par $d^i = (1 - \dfrac{x_3}{L_3})\vec{e}_i$ et $g^i = 0$.

On veut montrer maintenant que les quantités suivantes sont en $o(\varepsilon)$ pour la vitesse et en $O(\varepsilon)$ pour la pression:

$$\mathcal{U}^\varepsilon(x) = v^\varepsilon - \frac{1}{L_3}\left(x_3^+\vec{U} - \varepsilon\sum_{j=1}^{2}U_j\xi^j(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\frac{x_3^+}{L_3}M\vec{U}\right) \tag{29}$$

$$\mathcal{P}^\varepsilon = p^\varepsilon + \frac{\nu}{L_3}\sum_{j=1}^{2}U_j\omega^{j,\varepsilon}. \tag{30}$$

On a le résultat suivant

Théorème 3.2: *([13]). Soit $\mathcal{U}^\varepsilon$ donnée par* (29) *et $\mathcal{P}^\varepsilon$ par* (30)*. Alors $\mathcal{U}^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, $\mathcal{U}^\varepsilon = 0$ sur Σ, elle est périodique en (x_1, x_2), exponentiellement petite sur Σ_2 et div $\mathcal{U}^\varepsilon = 0$ dans Ω^ε. De plus, $\forall\varphi$ satisfaisant les mêmes conditions aux limites, nous avons l'estimation suivante*

$$|\nu \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla\mathcal{U}^\varepsilon \nabla\varphi - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{P}^\varepsilon \mathrm{div}\varphi + \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{x_3^+}{L_3} \sum_{j=1}^{2} U_j \frac{\partial \mathcal{U}^\varepsilon}{\partial x_j}\varphi + \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{U}_3^\varepsilon \frac{\vec{U}}{L_3}\varphi$$

$$+| \int_{\Omega^\varepsilon} ((v^\varepsilon - v^0)\nabla)(v^\varepsilon - v^0)\varphi| \leq C\varepsilon^{3/2} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} \frac{|U|^2}{L_3}. \tag{31}$$

Corollaire 3.3: *([13]). Soit $\mathcal{U}^\varepsilon(x)$ et $\mathcal{P}^\varepsilon$ définie par* (29) – (30) *et soit*

$$\varepsilon \leq \frac{\nu^{6/7}}{|U|} \min\left\{\frac{\nu^{1/7}}{4(|M| + \|\xi\|_{L^\infty})}, C(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2) L_3^{3/7} |U|^{1/7}\right\}. \tag{32}$$

Alors v^ε, construite dans le théorême 1, est une solution unique pour (11) – (15) *et*

$$\|\nabla\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} + \|\mathcal{P}^\varepsilon\|_{L^2(P)} \leq C\varepsilon^{3/2} \frac{|U|^2}{\nu L_3} \tag{33}$$

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(P)^3} + \|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)^3} \leq C\varepsilon^2 \frac{|U|^2}{\nu L_3} \tag{34}$$

Les estimations (33) – (34) permettent de justifier la condition de glissement de Navier.

Remarque: Il est possible d'ajouter des termes correctifs additionnels et alors notre problème aura une erreur qui décroît exponentiellement. Pour des résultats de ce type on peut consulter [3], [4] et [5] . Le cas de frontières rugueuses dont la hauteur et la longueur sont d'ordre diffèrent est considéré dans la thèse doctorale de I. Cotoi [7]. L'avantage de notre méthode est que nous trouvons la loi de glissement de Navier avec un coefficient matriciel défini négatif, ce qui n'a pas été le cas dans les publications antérieures.

Maintenant nous introduisons l'écoulement de Couette-Navier efficace par

Trouver la vitesse u^{eff} et la pression p^{eff} telles que

$$-\nu\Delta u^{eff} + (u^{eff}\nabla)u^{eff} + \nabla p^{eff} = 0 \quad \text{dans } P, \tag{35}$$

$$\text{div } u^{eff} = 0 \quad \text{dans } P, \quad u^{eff} = (U_1, U_2, 0) \text{ sur } \Sigma_2, \ u_3^{eff} = 0 \text{ sur } \Sigma \tag{36}$$

$$u_j^{eff} = -\varepsilon \sum_{i=1}^{2} M_{ji} \frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3}, \ j = 1,2 \text{ sur } \Sigma \tag{37}$$

$$\{u^{eff}, p^{eff}\} \text{ est périodique en } (x_1, x_2) \text{ de période } (L_1, L_2) \tag{38}$$

Soit $|U|L_3 \leq \nu$, alors le problème (35) – (38) admet une solution unique

$$\begin{cases} u^{eff} = (\widetilde{u}^{eff}, 0), \widetilde{u}^{eff} = \vec{U} + (\frac{x_3}{L_3} - 1)\left(I - \frac{\varepsilon}{L_3}M\right)^{-1}\vec{U} & \text{pour } x \in P \\ p^{eff} = 0 & \text{pour } x \in P. \end{cases} \tag{39}$$

Nous estimons l'erreur faite en remplaçant $\{v^\varepsilon, p^\varepsilon, \mathcal{M}^\varepsilon\}$ par $\{u^{eff}, p^{eff}, \mathcal{M}^{eff}\}$.

Théorème 3.4: *([13]). Sous les hypothèses du théorème 3.1 nous avons*

$$\|\nabla(v^\varepsilon - u^{eff})\|_{L^1(P)^9} \leq C\varepsilon, \tag{40}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^2(P)^3} + \|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^1(P)^3} \leq C\varepsilon^2 \frac{|U|}{L_3}, \tag{41}$$

L'etape suivante est de calculer la *traînée*

$$\mathcal{F}_{t,j}^\varepsilon = \frac{1}{L_1 L_2} \int_\Sigma \nu \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)\, dx_1 dx_2, \ j = 1, 2. \tag{42}$$

Théorème 3.5: *([13]). Soit la traînée $\mathcal{F}_t^\varepsilon$ définie par (42). Alors on a*

$$|\mathcal{F}_t^\varepsilon - \nu \frac{1}{L_3}(\vec{U} + \frac{\varepsilon}{L_3} M\vec{U})| \leq C\varepsilon^2 \frac{|U|^2}{\nu L_3}(1 + \frac{\nu}{L_3|U|}) \tag{43}$$

Remarque: On en déduit que la présence des rugosités périodiques peut diminuer la traînée. La contribution est linéaire en ε, et en conséquence assez petite. D'après [5] pour un écoulement laminaire, la réduction de la traînée causée par la rugosité est négligeable. Néanmoins, pour un écoulement turbulent la présence des rugosités réduit la traînée d'une manière significative. Le phénomène a été observé sur les Avians et les Nektons (la peau de requin) et utilisé pour les bateaux et les avions (e.g. pour le yacht " Stars and Strips " dans la finale de l'America's Cup). Une référence classique est l'article de Bushnell, Moore [6] . Pour une explication mathématique on peut consulter l'article [13] .

Remarque: Comme dans [11] nous montrons qu'une perturbation de position de la paroi artificielle d'ordre $O(\varepsilon)$ implique une perturbation de la solution de $O(\varepsilon^2)$. Ce résultat est une conséquence du Lemme 3. En effet la matrice M change, mais sa perturbation est compensée par le changement de position de Σ. Ainsi, nous sommes libres de fixer la position de Σ. L'influence sur le résultat est seulement d'un ordre plus élevé dans le développement asymptotique.

4 Conclusion et applications possibles en océanographie

Parmi les applications aux écoulements géophysiques on trouvera des écoulements turbulents en présence des frontières rugueuses. On peut se poser la question de l'utilité des estimations laminaires obtenues dans le §3. L'application est basée sur la théorie de la couche limite turbulente présentée dans le livre [8].

On sait que l'écoulement de Couette turbulent a une structure bi-couche : une couche turbulente où la viscosité moléculaire est négligeable comparée aux effets turbulents et une sous-couche visqueuse où on est obligé de tenir compte simultanément des effets turbulents et visqueux. L'écoulement dans cette sous-couche est régi par le cisaillement turbulent τ_w, qui dépend seulement du temps t. τ_w définie la vitesse de frottement $v = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, où ρ est la densité . Alors l'épaisseur de la couche est $\delta_v = \frac{\nu}{v}$ et la théorie de l'écoulement de Couette turbulent (voir e.g. [8]) donne

$$u^+ = f(y^+),\ y^+ = \frac{x_3}{\delta_v} \quad \text{et} \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{v}$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne, comme la loi universelle pour la distribution de la vitesse dans la couche visqueuse. y^+ est la coordonnée caractéristique de la paroi et $u^+ = \dfrac{\bar{u}}{v}$ est la vitesse renormalisée . Cette loi est valable pour $0 \leq y^+ < 5$, pour $5 < y^+ < 70$ on a la zone tampon et pour $y^+ > 70$ la couche de chevauchement , où on a un profil logarithmique de la vitesse $u^+ = \dfrac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+$. Pour plus de détails voir [8] . Pour une paroi lisse $C^+ = 5$. Cette théorie s'applique aussi aux parois rugueuses et on les traite en ajustant la constante C^+. C^+ dépend du rapport $k_s^+ = \dfrac{k_s}{\delta_v}$, où k_s est la hauteur des rugosités. Alors $\lim\limits_{k_s^+ \to 0} C^+(k_s^+) = 5$ (paroi lisse) et $\lim\limits_{k_s^+ \to +\infty} \big(C^+(k_s^+) + \dfrac{1}{\kappa} \ln k_s^+\big) = 8$ (paroi très rugueuse).

L'analyse mathématique de l'écoulement dans la zone tampon et dans la couche de chevauchement est hors de portée pour le moment. Néanmoins, si nous supposons que les petites rugosités restent en permanence dans la sous-couche visqueuse nous pouvons appliquer la théorie de §3.

Les équations correspondantes sont (11) – (15) avec $L_3 = \delta_v$ et la vitesse de la paroi supérieure $v = \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}} = (v_1, v_2, 0)$ en $x_3 = \delta_v$. Comme $\delta_v \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}} = \nu < 2\nu$, nos résultats de §3 peuvent être appliqués et on obtient la loi de glissement de Navier si

$$\varepsilon \leq \frac{\nu^{6/7}}{|U|} \min \Big\{ \frac{\nu^{1/7}}{4(|M| + \|\xi\|_{L^\infty})}, C(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2) L_3^{3/7} |U|^{1/7} \Big\}. \tag{32}$$

Cette théorie est applicable aux Nektons (voir [13]).

Si cette condition est violée mais avec $\varepsilon < \sqrt{\nu}$ alors on a des variantes non-linéaires de la loi de glissement de Navier. Cette variante non-linéaire est en effet non-locale elle aussi et on a

$$u_j^{eff} = -\varepsilon \sum_{i=1}^{2} M_{ji}(\zeta(y_1, 0, \frac{\partial u_k^{eff}}{\partial x_2})) \frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3} \quad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{NFCN}$$

En général M_{ji} est une fonction bornée du gradient de u^{eff}, étant lui-même une fonction non-locale de ζ. ζ satisfait des équations de la couche limite pour un système de Navier-Stokes non-stationnaire. Pour plus de détails voir [12] .

En plus des effets non-linéaires, les frontières rugueuses sont où fractales où aléatoires. On peut envisager le travail dans cette direction.

Pour conclure, nous pensons qu'il est tout à fait possible de développer une théorie des lois de parois, appliquer en océanographie et fondée sur des résultats mathématiques rigoureux. Mais ce progrès, au moins en France, dépendra des moyens que les organismes publiques voudront y investir.

Références

[1] Y. Achdou, O. Pironneau, et F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comp. Phys.*, 147:187–218, 1998.

[2] Y. Achdou, O. Pironneau, et F. Valentin. Shape control versus boundary control. In F.Murat et al, editor, *Equations aux dérivées partielles et applications. Articles dédiés à J.L.Lions*, pages 1–18. Elsevier, 1998.

[3] Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, et J. Simon. Effect of rugosity on a flow governed by navier-stokes equations. *Quaterly of Appl. Math.*, 59:769–785, 2001.

[4] Y. Amirat et J. Simon. Influence de la rugosité en hydrodynamique laminaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 323:313–318, 1996.

[5] Y. Amirat et J. Simon. Riblet and drag minimization. In S et al Cox, editor, *Optimization methods in PDEs*, pages 9–17. American Math. Soc., Providence, 1997.

[6] D.M. Bushnell et K.J. Moore. Drag reduction in nature. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:65–79, 1991.

[7] I. Cotoi. Etude asymptotique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre une plaque lisse et une paroi rugueuse. *doctoral dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont–Ferrand*, 2000.

[8] K. Gersten H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[9] W. Jäger et A. Mikelić. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid. *Ann. della Scuola Norm. Sup. Pisa*, 23:403–465, 1996.

[10] W. Jager et A. Mikelić. Homogenization of the laplace equation in a partially perforated domain. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 126:669–688, 2000.

[11] W. Jäger et A. Mikelić. On the roughness-induced effective boundary conditions for a viscous flow. *J. of Differential Equations*, 170:96–122, 2001.

[12] W. Jäger et A. Mikelić. Derivation of nonlinear wall laws and application. En préparation, 2003.

[13] W. Jäger et A. Mikelić. Turbulent couette flows over a rough boundary and drag reduction. Accepté dans Comm. Math. Phys., 2003.

[14] W. Jäger, A. Mikelić, et Neuss. Asymptotic analysis of the laminar viscous flow over a porous bed. *SIAM J. on Scientific and Statistical Computing*, 22:2006–2028, 2001.

[15] A. Mikelić. Homogenization theory and applications to filtration through porous media. In A.Fasano M. Espedal et A. Mikelić, editors, *Filtration in Porous Media and Industrial Applications*, pages 127–214. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.

[16] B. Mohammadi, O. Pironneau, et F. Valentin. Rough boundaries and wall laws. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 27:169–177, 1998.

[17] C. L. M. H. Navier. Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques. *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France*, 369, 1827.

[18] R. L. Panton. *Incompressible Flow.* John Wiley and Sons, New York, 1984.

ANDRO MIKELIĆ
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD,
UFR MATHÉMATIQUES,
BÂT. 101
43, BD. DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE
Andro.Mikelic@univ-lyon1.fr

VINCENT DEVIGNE
CENTRE SITE,
ENS DES MINES DE SAINT ETIENNE
ET LAPCS, UFR MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ LYON 1
158, COURS FAURIEL
42023 SAINT ETIENNE CEDEX
FRANCE
devigne@simade.emse.fr