ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ALAIN COLIN DE VERDIÈRE

Un fluide lent entre deux sphères en rotation rapide : les théories de la circulation océanique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, nº 2 (2002), p. 245-268
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2002__9_2_245_0>

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL 9, 245-268 (2002)

Un fluide lent entre deux sphères en rotation rapide : les théories de la circulation océanique

Alain Colin de Verdière

Résumé

La plupart des théories de la circulation océanique sont des théories sans inertie et sans viscosité qui dépendent de l'effet β, la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude. Que cet effet β et ses conséquences importantes découlent directement du théorème de Taylor - Proudman - Poincaré est un élément peu connu. Quelques uns des fondements théoriques qui gouvernent la circulation océanique de grande échelle sont présentés sous l'angle de ce théorème qui stipule que les vitesses d'un fluide en rotation rapide sont invariantes le long de l'axe de rotation . En conséquence une colonne fluide parallèle à l'axe de rotation conserve sa hauteur au cours de son déplacement, les effets de la dissipation étant repoussés dans des couches limites sur les frontières solides. Deux phénomènes limitent la portée de telles théories : les circulations obtenues sont instables barocliniquement et génèrent de la turbulence de méso-échelle dans l'intérieur. Deuxièmement le transport méridien de chaleur occasionné par le chauffage différentiel en surface nécessite également un mélange turbulent intérieur mais dont l'origine reste encore obscure.

1 Introduction.

Comme le lecteur l'aura remarqué, les bassins océaniques sont remplis d'eau, un fluide newtonien et incompressible pour des vitesses faibles par rapport à celle du son ($1500 \mathrm{m.s}^{-1}$). Les mouvements océaniques sont donc gouvernés par les équations de Navier Stokes. La complexité de ces équations est telle que l'étude de la circulation océanique repose largement sur l'observation du milieu. L'objectif est cependant clairement de comprendre le fonctionnement physique du moteur océanique, fonctionnement qui repose idéalement sur des théories vérifiables quantitativement. Cela ne surprendra aucun mécanicien des fluides habitué aux écoulements turbulents que cette confrontation théorie-expérience est dans le cas de l'océan largement évasive. D'une façon générale les théories océaniques reposent toutes sur une volonté de simplification maximum des équations pour alléger le poids mathématique de recherche des solutions sans pour autant dénaturer la signification physique du problème (Il s'agit de ne pas jeter le bébé avec l'eau du bain). Compte tenu des difficultés expérimentales et de l'hostilité du milieu, l'observation systématique des océans ne date que du début du vingtième siècle. Les observations ont tout d'abord mis en évidence les grosses structures, l'existence du Gulf Stream le long des côtes américaines, du Kuro-Shio le long des côtes japonaises, la présence d'une stratification stable en densité quasiment partout, une thermocline séparant les eaux chaudes de surface des eaux profondes proches de 0°C. Des profondeurs différentes de cette thermocline mises en évidence en différents points d'observations induisent des pressions hydrostatiques différentes, donc des accélérations et donc des déplacements (Figure 1).

À des échelles horizontales suffisamment grandes, les accélérations de Coriolis dominent de sorte que les vitesses horizontales s'effectuent perpendiculairement au gradient de pression selon le célèbre équilibre géostrophique. Compte tenu du caractère relativement permanent de ces pentes grande échelle de la thermocline (plus exactement de la distribution associée en densité), la circulation océanique fut déclarée stationnaire jusqu'au début des années 1970, date à laquelle les premières mesures directes de courant apparurent. Celles-ci montrèrent à peu près partout dans l'océan mondial l'existence d'une turbulence dite de moyenne échelle faite de tourbillons très énergétiques par rapport au mouvements moyens d'une taille de 50 à 200 km. Alors que la circulation océanique de grande échelle n'a pas vraiment d'équivalent avec la circulation atmosphérique à cause des frontières des continents, cette turbulence océanique est associée à des instabilités (dites baroclines) analogues à celles qui régissent la croissance des perturbations synoptiques de l'atmosphère aux latitudes tempérées.

Aujourd'hui l'expérience WOCE (World Ocean Circulation Experiment) cartographie non seulement les couches de surface mais également les eaux profondes longtemps considérées comme immobiles sous la chape de la stratification en densité sus-jacente. Les premières mesures d'oxygène des eaux profondes indiquant une forte teneur de ce gaz dissous conduisirent à un schéma radicalement différent, les eaux profondes étant renouvelées périodiquement par des sources actives dans les régions polaires, le refroidissement hivernal fournissant les conditions d'existence d'une instabilité convective de type Rayleigh-Bénard. Ces sources d'eau profonde peu nombreuses et très limitées dans l'espace furent l'objet d'explorations intenses. Les eaux les plus profondes ne sont alimentées que par deux sources, l'une en Mer de Norvège par l'eau dite NADW (North Atlantic Deep Water), l'autre en Mer de Wedell près du continent Antarctique pour l'eau dite ABW (Antarctic Bottom Water). Ces eaux se répandent vers l'équateur non pas comme des flots uniformes mais comme des veines de couches limites de Bord Ouest sous les courants chauds de surface de type Gulf Stream (une découverte faite dans les années 1960). Si la position de la thermocline ne change pas malgré cet apport faible mais régulier d'eaux profondes, alors nécessairement ces eaux profondes se mélangent avec les eaux de la thermocline. On peut estimer la diffusion turbulente nécessaire à cette stabilité mais les processus et les lieux du mélange posent une interrogation majeure pour la recherche actuelle, majeure car la branche méridienne de cette circulation dite thermohaline, eaux de surface (de fond) allant vers les pôles (vers l'équateur) transporte près de la moitié du flux radiatif excédentaire (déficitaire) arrivant sur la terre dans les régions tropicales (polaires).

L'océan n'est pas original en ce que pour expliquer certaines des observations ci-dessus les équations de Navier-Stokes sont à la fois trop précises mais surtout trop générales comme l'a rappelé Charney lorsqu'il développait sa théorie quasi-géostrophique pour l'atmosphère (voir le livre de Lindzen et al. 1990 [5]). En effet ces équations contiennent des mouvements de haute fréquence (supérieur à $2\,\Omega$, Ω taux de rotation de la terre) et des mouvements de basse fréquence bien inférieurs à $2\,\Omega$. Les premiers sont des modes d'inertie (où la gravité joue un rôle prépondérant) qui interviennent dans la théorie des marées, la génération des vagues par le vent, le déferlement des ondes internes pour ne citer que quelques uns de ces phénomènes de hautes fréquences. En revanche aux basses fréquences la rotation intervient pour créer des modes nouveaux beaucoup plus énergétiques. La gravité certes modifie ces modes mais n'est pas centrale pour leur existence. L'élément fondamental est la "forme du container". Dans le régime linéaire, des ondes apparaissent si et seulement si la profondeur du fluide mesurée parallèlement à l'axe de rotation varie et on vérifie immédiatement que les fluides terrestres bloqués par la gravité entre deux sphères concentriques satisfont cette condition. A la différence des ondes d'inertie, ces ondes sont en équilibre quasi-géostrophique

(QG). Charney, [1] (1947), en fournissant les équations appropriées pour ces modes lents a réussi l'avancée théorique la plus fondamentale pour les fluides terrestres. La validité de ces équations QG n'est pas préservée à l'échelle planétaire. Leur dérivation repose en effet sur la petitesse des déplacements verticaux des surfaces iso-densité (et de la topographie du fond) par rapport à la profondeur totale, une hypothèse qui n'est pas vérifiée par les mouvements à l'échelle des bassins océaniques. Une autre approximation dite planétaire - géostrophique (PG) (Phillips, [6] 1963) a vu le jour pour décrire ces mouvements "planétaires", approximation qui consiste à annuler purement et simplement les accélérations relatives devant celles de Coriolis. Ce régime est gouverné par le théorème de Taylor-Proudman-Poincaré (TPP) qui est, comme nous le verrons à la base des théories rationalisant la dynamique intérieure de la circulation océanique (à l'exclusion de toutes couches limites). Il se trouve que les deux systèmes d'équations mentionnées, quasi-géostrophie et planétaire-géostrophie, permettent une exploration considérable des concepts sur lesquels repose notre compréhension actuelle de la circulation océanique. Elle achoppent souvent sur les comparaisons quantitatives avec les observations mais ce défaut est compensé par la compréhension physique qu'elles permettent.

Pour quelqu'un qui ne souhaiterait pas s'éloigner des équations de Navier-Stokes et envisagerait de calculer (numériquement) la circulation océanique, la tâche est immense. Selon Kolmogorov, la dissipation s'effectue à une micro-échelle $\lambda = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ où ν est la viscosité du fluide (ici l'eau) et ε le taux de dissipation d'énergie dans le système considéré. Le travail du vent sur l'océan estimé à 10^{12} W et la masse de l'océan à 1.410^{21} kg fournissent $\varepsilon = 710^{-10}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3}$. Avec $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^-1$, ceci donne $\lambda \equiv 610^{-3}\mathrm{m}$. Le calcul de la circulation d'un bassin océanique carré de 5000 km de côté et de 5 km de profondeur jusqu'à cette micro-échelle implique donc le calcul sur 10^{23} points de grille soit un effort comparable au suivi des trajectoires des molécules dans une mole d'eau ! Qui plus est cette intégration numérique doit être poursuivie sur les échelles d'établissement de la circulation thermohaline soit le millier d'années. Les modèles numériques actuels les plus performants calculent environ une dizaine d'années d'évolution d'un tel bassin avec un pas de grille de l'ordre du kilomètre. Avec une telle grille on est bien sûr très loin de la micro-échelle de dissipation et il faut paramétriser les effets de tous les mouvements non représentés de l'échelle de la grille à celle de λ. Cette paramétrisation de la turbulence sous-maille fait un champ disciplinaire à elle seule pour tous les fluides turbulents et donc en particulier pour l'océan et l'atmosphère. L'absence de consensus sur les paramétrisations proposées ont pour conséquence qu'une théorie océanique qui reposerait sur une valeur trop précise d'une telle viscosité turbulente est toujours regardée avec soupçon. Comme nous allons le voir l'explication physique de la circulation peut aller effectivement assez loin sans considérer explicitement le mélange turbulent à très petite échelle. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette limite est atteinte pour la circulation thermohaline dont l'intensité dépend vraiment du mélange turbulent dans les régions stratifiées stablement.

2 Espaces des paramètres.

Les régimes explorés par les théories de la circulation océanique dépendent de 3 classes de paramètres. Nous en avons déjà mentionné deux implicitement. La première classe prend en compte le fait que le mélange moléculaire s'effectue à toute petite échelle. Pour une circulation variant sur des échelles horizontales L (verticales H) ayant des vitesses horizontales U et présentant les anomalies de température ΔT telles que $L \approx 10-1000$ km, $H \equiv 100-1000$ m, $U \equiv 10^{-3} - 1\text{ms}^{-1}$ et $\Delta T \equiv 10^{-2} - 10^oC$, les nombres de Reynolds, d'Ekman et de Rayleigh sont typiquement :

$$\text{Re} = UL/\nu >> 1$$

$$E = \nu/\Omega H^2 << 1$$

$$Ra = g\frac{\alpha\Delta T}{\nu k}H^3 >> 1.$$

Les effets visqueux sont ainsi largement relégués sur les frontières du domaine et les théories considèrent un intérieur inviscide et adiabatique.

La deuxième classe est purement géométrique : le fluide s'écoule dans une enveloppe mince ce qui se traduit par le petit rapport d'aspect : $\delta = H/L << 1$. La conséquence immédiate de ce petit rapport d'aspect permet de considérer la pression comme hydrostatique ce qui conduit aux équations primitives ou aux équations en eau peu profonde (shallow water) selon le choix de la coordonnée verticale, respectivement la profondeur géométrique ou la profondeur de l'interface d'une couche isopycnale. Ce choix hydrostatique peut éventuellement poser problème à l'équateur.

La troisième classe la plus intéressante pour la dynamique océanique provient de ce que l'accélération des mouvements océaniques est faible devant les forces de Coriolis et de flottabilité. Ceci se traduit par la petitesse de deux nombres sans dimension, le nombre de Rossby et le nombre de Froude :

$$\varepsilon = U/\Omega L << 1$$

$$F = U/NH << 1$$

où Ω est la rotation de la terre $7.2\,10^{-5}$ s-1 et N est la fréquence de Brunt-Vaïsälä, une mesure de la stratification en densité,

$$N = (\frac{-g}{\rho}\frac{d\rho}{dz})^{1/2}$$

qui prend des valeurs fortes en surface et aux basses latitudes, plus faible en profondeur et aux hautes latitudes, les valeurs moyennes étant souvent prises autour de 1 à 5 10^{-3} s^{-1}. Le rapport de ces deux nombres en fournit un autre, important, le nombre de Burger :

$$Bu = (\varepsilon/F)^2 = N^2H^2/\Omega^2L^2.$$

Les régimes qui découlent de ces deux paramètres peuvent se classer selon l'intensité de la vitesse verticale en des régimes divergents ou non-divergents horizontalement. Un scaling de la seule équation de continuité fournit en effet :

$$W = U\delta$$

en l'absence de compensation entre disons $\partial u/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ les deux termes constituant la divergence horizontale. Mais justement rotation et stratification tendent toutes deux à inhiber les mouvements verticaux et à créer de la compensation entre ces deux termes. La figure 2 résume les régimes possibles dans le plan ε, F. Lorsque la stratification est négligeable et la rotation forte, le mouvement du fluide est géostrophique, les mouvements s'organisent en colonnes parallèles à l'axe de rotation, les vitesses verticales sont d'un ordre ε plus petites et le mouvement donc quasi-non divergent horizontalement, soit quasi 2D. Lorsque la rotation est négligeable et la stratification forte, les vitesses verticales sont d'un ordre F^2 plus petites, les mouvements s'organisent en crêpes horizontales sans couplage entre elles et sont encore une fois quasi 2D. L'issue du combat entre rotation et stratification favorise donc soit des colonnes soit des crêpes ! Ces deux régimes ne sont pas appropriés pour la circulation océanique sauf cas particuliers au pôle (pas de stratification) ou à l'équateur (pas de rotation dans la direction verticale) car les deux nombres ε et F sont simultanément plus petits que un dans la plus grande partie de l'océan mondial. Il se trouve que l'énergie (cinétique) dans l'océan se trouve sous la forme de turbulence de méso-échelle pour laquelle le nombre de Burger est O(1). C'est le régime quasi-géostrophique pour lequel on montre que w est $O(\varepsilon/Bu = Bu^{1/2}F)$ (Voir IV.1) et les mouvement donc encore une fois quasi-2D sans que l'on puisse dire qui l'emporte de la stratification ou de la rotation. Dans cette gamme de paramètres la turbulence a une échelle horizontale de l'ordre du rayon interne de déformation de Rossby NH/Ω (quelques dizaines de km dans l'océan, quelques centaines dans l'atmosphère). Les mouvements de plus grande échelle de quelques centaines à quelques milliers de km sont beaucoup plus lents mais contiennent la majeure partie de l'énergie potentielle stockée dans les variations de profondeur de la thermocline et constituent ce que l'on appelle la circulation générale océanique. Pour ces mouvements le nombre de Burger est maintenant très petit. Les vitesses verticales ne sont plus contrôlées par ε ou F mais par la géométrie sphérique qui fait intervenir le rapport $\gamma = L/R_T$ où R_T est le rayon de la terre. Pour les mouvements planétaires méridiens lorsque γ est O(1), le mouvement redevient 3D bien que toujours géostrophique, un paradoxe qui vient de l'utilisation des coordonnées sphériques (Voir IV.2). Sur la figure 2, on voit que ce domaine d'intérêt est le secteur à l'origine entre la première bissectrice et l'axe $\varepsilon = 0$. Dans ce secteur $\varepsilon < F$ on peut donc dire que la rotation exerce une contrainte plus forte que la stratification.

3 Le théorème de Taylor-Proudman-Poincaré.

Lorsque ε et E tendent vers O, les équations du mouvement sous l'approximation de Boussinesq se réduisent à :

$$2\underline{\Omega} \times \underline{u} = \frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0}\underline{g}. \tag{3.1}$$

Les variations relatives de densité sont faibles et ρ_0 est une densité de référence constante.

3.1 Fluide homogène

En fluide homogène, le rotationnel de (3.1) fournit :

$$(2\underline{\Omega} \cdot \nabla)\underline{u} = 0 \tag{3.2}$$

L'influence de la gravité a disparu. Le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée le long de l'axe de rotation Ω, un résultat connu sous le nom de théorème de Taylor-Proudman-Poincaré (Taylor, [12] 1923, Proudman, [8] 1916, Poincaré, [7] 1910). Si les surfaces supérieures et inférieures contenant le fluide sont notées par $z = h_S$ et $z = h_B$, les conditions aux limites en surface (toit rigide) et au fond imposent que $w_S(= \underline{u} \cdot \nabla h_S)$ et $w_B(= \underline{u} \cdot \nabla h_B)$ soient égales et donc que :

$$\underline{u} \cdot \nabla h = 0. \tag{3.3}$$

Avec h la profondeur du fluide mesurée parallèlement à l'axe de rotation, on voit immédiatement que les seuls mouvements stationnaires libres permis entre deux sphères concentriques sont azimutaux (ou zonaux). L'équation (3.3) n'est autre que la conservation de la vorticité potentielle ici simplement égale à h. Dans le développement traditionnel en coordonnées sphériques, après avoir supprimé la composante horizontale de la rotation sur la base d'un petit δ, la limite ε et $E \to 0$ donne un résultat apparemment différent :

$$\underline{u} \cdot \nabla(f/H) = 0 \tag{3.4}$$

où H est la profondeur verticale mesurée entre les deux sphères et $f = 2\Omega sin(\theta)$ le paramètre de Coriolis où θ est la latitude. La figure 3 montre clairement que si on est pas trop près de l'équateur, H est à peu près la projection de h sur la verticale et donc que : $h \approx H/\sin\theta$ de sorte que (3.4) est l'approximation hydrostatique de l'expression exacte (3.3). Par contre lorsque θ diminue, l'approximation (3.4) devient de plus en plus mauvaise. Ce mouvement en colonne de Taylor planétaire empêche tout transfert méridien de fluide. Comme le "climat" nécessite de tels transferts, cette limite est-elle condamnée? Une réponse à cette question peut être examinée en examinant un problème simple de sources et de puits imposés à des latitudes différentes. Imaginons une source de fluide de débit Q à la surface supérieure (de la pluie par exemple selon Goldsbrough, [3] 1933) un problème aussi abordé par Schopp et Colin de Verdière, [10] 1997. La condition aux limites en surface est maintenant modifiée. En écrivant que $u \cdot n = Q$ on déduit :

$$w_S = \underline{u} \cdot \nabla h + Q/sin\theta$$

où θ est la latitude d'injection de la source de sorte que (3.3) devient :

$$\underline{u} \cdot \nabla h = -Q/sin\theta. \tag{3.5}$$

Un mouvement radial forcé de la colonne s'éloignant de l'axe de rotation peut répondre à cette source ($Q < 0$) et rester géostrophique dans le cadre du théorème TPP. L'interprétation physique de (3.5) est simple : une colonne de section δA gagne un volume $-Q/sin\theta\delta A\delta t$ pendant un temps δt. Pour éviter une compression qui ferait apparaître de la vorticité relative, la colonne "fait de la place" en se déplaçant radialement d'une quantité δr vers l'extérieur pendant le même temps δt. Le volume ainsi libéré $\partial h/\partial r \delta r \delta A$ est juste ce qu'il faut pour adapter le volume injecté au sommet puisque $\delta r = V_r \delta t$. La plus traditionnelle relation de Sverdrup relie en coordonnées sphériques transport méridien et vent selon

$$\beta v = \underline{k} \cdot \nabla \times \underline{\tau}/\rho H \tag{3.6}$$

où $\beta = 2\Omega\cos\theta/r$, $\underline{k}$ un vecteur unitaire vertical vers le haut et r la distance au centre de la Terre. Cette relation de Sverdrup n'est pas autre chose qu'une approximation de (3.5) pour les petits δ, la tension du vent étant ajoutée comme une force de volume à droite de (3.1). Dans la théorie des couches d'Ekman l'effet net du vent est de fournir un flux de masse à la base de la couche limite supérieure proportionnel au rotationnel du vent, le pompage d'Ekman, de sorte que l'analogie physique entre (3.5) et (3.6) se trouve renforcée.

3.2 Fluide stratifié

Le rotationnel de (3.1.) fournit maintenant :

$$(2\underline{\Omega} \cdot \nabla)\underline{u} = \underline{g} \times \nabla\rho/\rho_0 \tag{3.7}$$

L'analogie effet β - effet topographique ayant été montrée, on revient à la formulation traditionnelle en exprimant (3.7) en coordonnées sphériques sous l'approximation $\delta << 1$. Cette habitude provient de la forme radiale du champ de gravité. (Les expressions exactes en coordonnées cylindriques apparaissent dans Schopp et Colin de Verdière 1997, [10]).

$$f\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 r\cos\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \tag{3.8a}$$

$$f\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \tag{3.8b}$$

$$f\frac{\partial w}{\partial z} = \beta v \tag{3.8c}$$

Attention l'axe z est ici dirigé verticalement vers le haut, parallèlement à $\underline{g}$ et θ et ϕ sont respectivement la latitude et la longitude. Les premières équations (3.8a) et (3.8b) dites du vent thermique permettent d'inférer le champ de vitesses horizontales à une constante d'intégration près de l'observation du champ de densité (voir figure 1), une procédure connue sous le nom de méthode dynamique en Océanographie. La troisième, l'équation de vorticité verticale 3.8c est la seule équation qui n'est pas influencée par la gravité et donc la seule composante qui garde la forme du théorème TPP lorsque δ est petit. Elle constitue la pierre angulaire des théories de la circulation océanique.

4 Les approximations QG et PG

4.1 L'approximation QG.

L'approximation QG se place dans le régime des paramètres $\varepsilon << 1$, $\gamma = L/R_T << 1$ et $Bu = O(1)$. Elle consiste premièrement à exprimer géostrophiquement la composante verticale de la vorticité et les vitesses horizontales ce qui revient à exprimer la fonction courant en termes de pression :

$$\Psi = P/\rho_0 f_0 \tag{4.1}$$

f_0 étant le paramètre de Coriolis à la latitude θ_0. La géométrie est celle du plan β, tangent à la sphère à une latitude θ_0 de sorte que $f = f_0 + \beta y$. La vorticité relative revient dans les équations mais sous sa forme géostrophique :

$$(\partial_t \cdot + J(\Psi, \cdot))[\nabla^2\Psi + f] = f_0 \partial_z w \tag{4.2}$$

La faible extension méridienne du modèle permet de remplacer f par f_0 dans le terme de droite. L'équation gouvernant l'évolution de la densité est sévèrement approchée puisqu'on suppose que les mouvements ne créent que des perturbations faibles d'une stratification de base imposée a priori :

$$\rho = \overline{\rho}(z) + \rho'$$

$$(\partial_t \cdot + J(\Psi, \cdot))\,\rho' + w\overline{\rho_z} = 0 \tag{4.3}$$

où le terme $w\rho'_z$ a été négligé ($\varepsilon << Bu$). En éliminant w entre (4.2) et (4.3), une équation pour la seule variable Ψ résulte puisque l'hydrostatique permet de relier ρ' à Ψ :

$$\Psi_z = -\frac{\rho' g}{\rho_0 f_0}$$

On obtient ainsi la conservation de la forme QG de la vorticité potentielle (vp) en suivant une particule se déplaçant géostrophiquement :

$$(\partial_t \cdot + J(\Psi, \cdot))[\nabla^2\Psi + \beta\Psi + \partial_z(\frac{f_0^2}{N^2}\Psi_z)] = 0. \tag{4.4}$$

Un couplage vertical entre couches permet le transfert du mouvement verticalement pour les échelles horizontales où le terme d'étirement dans la vp est de l'ordre de la vorticité relative soit $L \approx NH/f_0$. Pour les échelles inférieures on retrouve la dynamique 2D des crêpes horizontales évoluant indépendamment les unes des autres (forte stratification). Les ondes de gravité ont été filtrées de (4.4) par l'approximation (4.1). Ce filtrage a permis les premières prévisions du temps dans l'atmosphère dans le cas barotrope ($\rho' = 0$) mais a surtout permis d'identifier la physique de l'instabilité barocline, les phénomènes de cascades inverses en turbulence quasi-géostrophique et les interactions vortex-vortex. Nous verrons plus en détail ce qu'elle offre pour le problème de la circulation océanique dans le prochain paragraphe mais il est clair que les frontières verticales posent problème puisque l'équation de quantité de mouvement le long de la frontière n'est pas géostrophique à l'ordre O en ε sauf si Ψ est constant [$\Psi = C(t)$] le long de frontière, un choix peu réaliste mais que l'on est bien obligé de faire. Ce choix filtre l'onde de Kelvin, un mode mixte géostrophique - gravité qui existe aux fréquences sub-inertielles. Lorsqu'on intègre (4.4) horizontalement sur un domaine D à une profondeur donnée, on obtient :

$$\partial_t \oint_{\partial D} \frac{\partial \Psi}{\partial n} dA + \partial_t \iint_D \frac{\partial}{\partial z}(\frac{f_0^2}{N^2}\Psi_z)\, dA = 0 \tag{4.5}$$

Cette équation de compatibilité détermine la valeur prise par $C(t)$, la constante, à la frontière. On montre que si les vitesses horizontales jusqu'à l'ordre 1 en ε s'annulent aux parois alors (4.5) se réduit à la constance de la circulation géostrophique le long de la frontière (le terme de gauche dans (4.5)).

4.2 L'approximation PG.

Elle se situe dans le régime des paramètres suivant $\gamma \approx O(1)$, $\varepsilon << 1$ et $Bu << 1$. L'échelle horizontale peut maintenant atteindre le rayon de la terre et on est obligé d'utiliser les coordonnées sphériques. Par contre le rayon de la terre est 100 fois plus grand que le rayon interne de déformation de sorte que Bu est très petit. Dans cette limite la vorticité relative est petite par rapport au terme d'étirement. Cette limite est moins intéressante dans l'atmosphère où le rayon interne de déformation est un ordre de grandeur plus élevé. L'approximation PG néglige froidement l'accélération relative, le flot étant dit planétaire géostrophique (f varie). Plutôt que P, on peut utiliser une variable M telle que :

$$P/\rho_0 = M_z \tag{4.6a}$$

alors :

$$f\underline{k} \times \underline{u} = -\nabla M_z \tag{4.6b}$$

$$-g\rho/\rho_0 = M_{zz} \tag{4.6c}$$

$$w = \beta/f^2(R_T \cos\theta)^{-1}\partial M/\partial\phi \tag{4.6d}$$

la dernière équation provenant de (3.8c) et ϕ étant la longitude. En reportant dans l'équation de densité "complète" on obtient :

$$M_{zzt} + f^{-1}J(M_z, M_{zz}) + \beta/f^2(R_T\cos\theta)^{-1}M_\phi M_{zzz} = 0 \tag{4.7}$$

une équation dérivée par Welander (1971). Cette équation n'est pas très souvent utilisée sous cette forme si on veut obtenir une circulation dans un bassin. En effet pour satisfaire les conditions aux limites latérales, des termes de dissipation doivent être ajoutés dans (4.6b), voir Huck, Bresch et Sy dans ce journal. Cette approximation PG filtre les modes de Rossby dispersifs mais conserve les modes non dispersifs. Si on linéarise la stratification comme en QG et que l'on omet l'advection horizontale dans (4.7), il reste :

$$M_{zzt} + \beta N^2/f^2(R_T\cos\theta)^{-1}M_\phi = 0 \tag{4.8}$$

où $N^2 = -g\overline{\rho_z}/\rho_0$. Sur un fond plat la condition aux limites revient à spécifier $M = 0$ alors qu'en surface $M = \int_{-H}^{0} P/\rho_0 dz$ représente la pression associée avec le mode barotrope (qui capture un transport net de masse). En l'absence de forçage de vent, ce mode barotrope non divergent horizontalement est nul.

Si on définit $\underline{u}^+ = H^{-1}\int_{-H}^{0}\underline{u}dz$, u^+ la vitesse barotrope dérive d'une fonction transport Ψ^+ :

$$u^+ = \underline{k}\times\nabla\Psi^+$$

Avec un vent imposé en surface de tension $\underline{\tau}$, l'équation satisfaite par $\underline{u}^+$ est :

$$f\underline{k}\times\underline{u}^+ = -\nabla p^+ + \underline{\tau}/\rho_0 H \tag{4.9}$$

où $p^+ = H^{-1}\int_{-H}^{0}pdz$. Le rotationnel de (4.9) fournit :

$$\beta\Psi_x^+ = \underline{k}\cdot\nabla\times\underline{\tau}/\rho_0 H \tag{4.10}$$

la relation de Sverdrup déjà mentionnée préalablement. En l'absence d'accélération relative et de topographie, le mode barotrope est découplé de la stratification et obéit à la même dynamique qu'en fluide homogène. Ce mode est stationnaire puisque les ondes de Rossby dispersives qui permettent son établissement ont été filtrées. L'ajout de friction à (4.10) permet de montrer que seule les couches limites de bord Ouest sont possibles de sorte que la solution intérieure lorsque la friction tend vers O s'obtient en imposant $\Psi^+ = 0$ au bord Est d'un bassin océanique (Stommel 1948). Les solutions libres de (4.8) (sans forçage de vent) s'obtiennent en imposant $M = 0$ en surface et au fond. Lorsque N^2 est constant, les solutions sont :

$$M_{nm} = Re[A\sin\frac{n\pi z}{H}\exp(i(m\phi - \omega_{nm}t)]$$

Soit une double infinité de modes, n étant entier et m également entier en l'absence de frontières méridiennes. La relation de dispersion s'écrit :

$$\omega_{nm} = -\beta\frac{N^2H^2}{f^2n^2\pi^2}\frac{m}{R_T\cos\theta}.$$

Si on désigne par k_m le nombre d'onde zonal égal à $m/R_T\cos\theta$, la vitesse de phase ω_{nm}/k_m ne dépend que de n :

$$C_n = -\frac{\beta N^2H^2}{f^2n^2\pi^2}.$$

Ces modes de Rossby sont non dispersifs zonalement et se propagent systématiquement vers l'Ouest. La dépendance en latitude apparaît paramétriquement en $\cos\theta/\sin^2\theta$. De façon assez remarquable les observations altimétriques

Chelton, Schlax, [2] 1995 montrent une dépendance en latitude des vitesses de signaux se propageant vers l'Ouest qui n'est pas sans rappeler cette structure. Ces modes convenablement corrigés pour tenir compte d'une stratification réaliste, de l'effet du champ de courant dans lequel ils évoluent et de la topographie du fond sont importants pour la variabilité climatique aux longues périodes. La physique de ces modes apparaît clairement si le résultat du paragraphe 3.1 est étendu au cas transitoire du fluide stratifié. En effet le théorème TPP s'applique toujours au fluide contenu entre 2 interfaces de densité $z = \eta_s$ et $z = \eta_b$ englobant une couche homogène. Les vitesses dirigées selon $\underline{\Omega}$ à ces deux surfaces maintenant déformables doivent toujours être égales, ce qui implique :

$$\frac{D\eta_S}{Dt} = \frac{D\eta_B}{Dt}$$

Soit :

$$\partial_t h + \underline{u} \cdot \nabla h = 0 \tag{4.11}$$

où $h = \eta_S - \eta_B$ représente la hauteur parallèle à l'axe de rotation de la colonne de fluide de densité constante prise entre les deux interfaces. (4.11) généralise la conservation de la vp "h" au cas du fluide stratifié, instationnaire. Considérons une anomalie de h dans la direction zonale (Figure 4). Géostrophiquement des vitesses méridiennes baroclines apparaissent. Dirigées vers l'équateur (le pôle) elles impliquent une augmentation (diminution de h) compte tenu de la distribution sphérique moyenne à l'équilibre des interfaces de densité. Pour que h reste constant en suivant une particule fluide l'anomalie doit se déplacer vers l'Ouest. Ainsi la physique du théorème TPP gouverne-t-elle encore les mouvements instationnaires de grande échelle en fluide stratifié, un résultat qui n'est guère apparent sur l'équation approchée (4.8). Pour en obtenir une version exacte, il faut encore éliminer u au profit de h via la géostrophie dans (4.11) (Schopp, Colin de Verdière [10] 1997).

5 Les théories de la circulation océanique en fluide stratifié.

Les questions sont simples : étant donné des forçages stationnaires en surface, existe-t-il une circulation stationnaire répondant à ces forçages, comment varie-t-elle selon l'amplitude des forçages, et à quelle dynamique obéit-elle en différents points du bassin ? Malheureusement les réponses ne le sont pas. Un certain nombre d'avancées ont été faites dans les années 1980 concernant la réponse au vent. Par contre les théories concernant la circulation thermohaline qui incluent aussi la détermination de la stratification ont relativement peu avancées. On peut aujourd'hui calculer ces solutions, ce qui était réservé à quelques très gros centres de calcul il y a encore une vingtaine d'années. Il y a une autre différence de taille dans le problème : la circulation océanique forcée par le vent n'exerce pas de rétroactions sur l'atmosphère de sorte que le problème direct (atmosphère forçant l'océan) est bien posé. De telles rétroactions existent par contre pour la circulation forcée par les flux de chaleur et d'évaporation - précipitation : un courant chaud dirigé vers le Nord perd de la chaleur et de la vapeur d'eau au profit de l'atmosphère et modifie celle-ci : l'étude de la circulation thermohaline est vraiment un problème couplé océan - atmosphère.

5.1 Réponse au vent - stratification imposée.

Un rotationnel de vent est imposé en surface. L'équation (4.10) donne toujours la circulation géostrophique méridienne v_G intégrée sur la verticale réécrite ci-dessous:

$$\beta \int_{-H}^{0} \rho_0 v_G \, dz = \underline{k} \cdot \nabla \times \underline{\tau} \tag{5.1}$$

Si on utilise, en régime stationnaire et linéaire, l'équation (4.3) gouvernant en QG la densité, on obtient :

$$w \overline{\rho}_z = 0 \tag{5.2}$$

ce qui implique que w est nul à toute profondeur où le fluide est stratifié. L'équation géostrophique (3.8c) indique que v_G est alors nul partout. Sous cette hypothèse linéaire, la circulation océanique se concentre en un Dirac à la surface compte tenu de (5.1), un résultat peu physique généralement cité comme la catastrophe de Gill. Pour y remédier il faut avoir des forçages de w en profondeur. On peut imaginer des flux turbulents de chaleur (densité) ou de vorticité. Il existe une deuxième solution qui consiste à sortir de l'approximation QG en permettant aux surfaces iso-densité d'intersecter la surface c'est-à-dire la région directement forcée.

La première solution a été explorée par Rhines-Young [9] 1982 qui considèrent qu'il n'y a pas de solution stationnaire en stratifié compte tenu des phénomènes d'instabilité barocline. Ceux-ci génèrent des tourbillons dont l'interaction mutuelle crée des forçages moyens en profondeur pour une circulation statistiquement stationnaire. Si q désigne la vp dans (4.4), Rhines et Young paramétrisent les flux turbulents de q en termes des gradients moyens de q selon une loi de diffusion classique.

$$u \cdot \nabla q = k \nabla^2 q \tag{5.3}$$

Le problème est résolu simplement dans le cadre d'un océan à 2 couches:

$$J(\Psi_1, q_1) = F/H_1 + D/H_1 \tag{5.4a}$$

$$J(\Psi_2, q_2) = -D/H_2 \tag{5.4b}$$

où $q_i = \beta y + F_i(\Psi_j - \Psi_i)$, $j = 3 - i$ et $F_i = f_0^2/g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}H_i$, H_i profondeur moyenne des couches séparée d'un saut de densité $\Delta\rho$. Les termes F et D représentent respectivement le forçage par le vent de la couche de surface et l'effet des tourbillons. La forme choisie de la dissipation n'induit pas de production nette de vorticité. En combinant (5.4a) et (5.4b) on obtient en analogie avec (4.10) et (5.1) :

$$\beta \Psi_x^+ = \frac{F}{H} \tag{5.5}$$

avec $\Psi^+ = H^{-1}(H_1\Psi_1 + H_2\Psi_2)$ la fonction de courant barotrope. Comme indiqué précédemment, Ψ^+ est connu partout en intégrant (5.5) à partir du bord Est.

La vp de la couche 2 s'écrit alors :

$$q_2 = \beta y + F_2\frac{H}{H_1}\Psi^+ - (1 + \frac{H_2}{H_1})\Psi_2$$

et (5.4b) devient :

$$J(\Psi_2, q) = -D/H_2 \tag{5.6}$$

où les contours de $q = \beta y + F_2\frac{H}{H_1}$, maintenant connus, sont traditionnellement appelés contours géostrophiques (le déplacement du fluide est possible librement sur ces contours). Le problème, non-linéaire au départ, se réduit à une équation linéaire. Dans les régions où D est négligeable, la solution de 5.6 se borne à intégrer le long des caractéristiques que sont les contours géostrophiques. Si ceux-ci intersectent le bord Est la condition aux limites $\Psi_2 = 0$ est "propagée" dans l'intérieur et on retrouve la catastrophe de Gill dans ces régions. Le point majeur de la théorie est qu'il existe des régions qui ne sont pas atteintes par les caractéristiques issues du bord Est si le forçage de Ψ^+ est suffisamment fort. Dans ces zones isolées du bord Est, Rhines et Young font l'hypothèse que la dissipation homogénéise la vp q_2 ce qui leur permet d'obtenir Ψ_2 et Ψ_1. Ces zones homogénéisées en vp sont effectivement occupées par des recirculations rectifiées dans les modèles numériques QG forcés par le vent qui ne sont pas sans rappeler les gyres inertiels.

L'autre théorie de Luyten-Pedlosky-Stommel 1983 [4] a lieu dans le cadre PG mais choisit également le cas d'un océan à 2 couches actives (au-dessus d'une troisième au repos). Pour les mêmes raisons que précédemment le problème se simplifie considérablement à deux couches actives, le transport barotrope Ψ^+ étant déterminé via (4.10) comme précédemment. Dans la région au Nord de la ligne d'affleurement en surface de la couche profonde la solution est complètement déterminée puisqu'il n'y a qu'une couche active. Au Sud de la ligne, les particules fluides de la couche profonde subductent en conservant leur vp (f/h_2) puisqu'elles pénètrent dans une région non forcée. C'est donc l'affleurement en surface de la couche 2 qui permet la mise en mouvement interne. Cette subduction n'est possible qu'en s'écartant du bord Est puisque les variations de la couche 2 ne sont pas compatibles avec une vitesse géostrophique nulle au bord Est. Des zones non ventilées apparaissent au voisinage du bord Est.

5.2 Le problème de la circulation thermohaline.

Comme nous l'avons indiqué, il n'est pas heureux de découpler l'océan de l'atmosphère lorsqu'on cherche à rationaliser la structure thermique de l'océan. Les complexités de chaque compartiment ont ralenti l'étude du problème couplé. Pour l'océan on peut dire aujourd'hui qu'il n'y a pas vraiment de théorie qui prédise la circulation étant donné les forçages. Le forçage conceptuel utilisé pour la température est de relaxer la SST (Sea Surface Temperature) sur une température atmosphérique (imposée si le couplage est absent) ce qui permet une rétroaction du flux de chaleur sur la SST. Pour la salinité, on impose des conditions de flux E-P en surface qui entraînent concentration ou dilution des eaux de surfaces. Stommel (1961) a montré que des solutions multiples existaient pour certaines valeurs de E-P, et les modèles numériques d'océan seul montrent une grande instabilité de la circulation thermohaline sous ces conditions dites mixtes. Lorsqu'on parle de circulation dans ce contexte, on pense à la boucle verticale de recirculation dans un plan latitude-profondeur. L'intensité de cette boucle dans un système plus simple à un composant (T par exemple) dépend entièrement du mélange turbulent vertical en régime stratifié. Les eaux profondes se re-incorporent dans la thermocline supérieure sous l'effet de ce mélange et ferment la boucle, la formation des eaux profondes en région polaire s'adaptant aux possibilités d'upwelling dans l'intérieur. Si un tel équilibre a lieu en milieu stratifié, on peut estimer le coefficient de mélange vertical :

$$wT_z = K_v T_{zz}. \tag{5.7}$$

La distribution exponentielle observée de T entre disons 1000 et 4000 m est compatible avec une échelle (e folding) caractéristique K_v/w (si w et K_v sont constant dans (5.7)). Comme on connaît le débit des sources d'eaux profondes, si on répartit uniformément l'upwelling sur l'océan mondial, on en déduit un w moyen et donc un Kv moyen de l'ordre de 10^{-4} m^2 s^{-1}, 10^{11} fois plus grand que la valeur moléculaire ! Le problème actuel est 1) que les mesures directes du mélange font apparaître une distribution très inhomogène souvent plus faible d'un ordre de grandeur à celle estimée et 2) que les mécanismes du mélange vertical sont peu connus. Dans les années 1960, Stommel et Arons [11] ont proposé une théorie pour la seule branche profonde de la circulation thermohaline qui repose sur les même concepts théoriques que la circulation forcée par le vent. Les variations de densité en profondeur étant faibles, le fluide est supposé homogène. Agit sur cette couche profonde, l'upwelling w^* mentionné plus haut et des sources localisées aux pôles. La circulation qui résulte de (3.8) est simplement :

$$\beta v = f w^*/H.$$

Le fluide intérieur va vers les pôles puisqu'on retire du fluide de la couche profonde. Allant vers les sources, la masse ne peut plus être équilibrée que par des courants de couche limite que Stommel et Arons choisissent sur le bord Ouest pour les mêmes raisons que précédemment. Ces courants profonds sont dirigés vers l'équateur et peuvent être plus intenses que le débit de la source à cause de cette recirculation intérieure. Cette théorie repose donc à nouveau entièrement sur le théorème de Taylor-Proudman-Poincaré (3.5) en mode forcé.

Remerciements. Je tiens à remercier les organisateurs du colloque de Grenoble É. Blayo et D. Bresch et plus particulièrement D. Bresch pour l'aide apportée pour finaliser l'article.

Références

[1] J.G Charney. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, 4: 135–163, 1947.

[2] D. Chelton et M. Schlax. Global observations of oceanic Rossby waves. *Science*, 272: 234–238, 1995.

[3] J. Goldsbrough. Ocean currents produced by evaporation and precipitation. *Proc. Roy. Sco*, A141: 512–517, 1933.

[4] H. Stommel J. Luyten, J. Pedlosky. The ventilated thermocline. *J. Phys. Ocean.*, 13:292–309, 1983.

[5] R.S. Lindzen, E.N. Lorenz, et G.W. Platzmann. *The atmosphere, a challenge: The Science of J.G. Charney.* American Meteorological Society, Boston, Mass. Luyten, 1990.

[6] N. Phillips. Geostrophic motion. *Rev. Geophysics*, 1: 123–176, 1963.

[7] H.. Poincaré. *Théorie des marées. Leçons de mécanique Céleste.* Gauthier-Villars, 1910.

[8] J. Proudman. On the motion of solids in liquids possessing vorticity. *Proc. Roy. Soc*, A: 408–424, 1992.

[9] P.B. Rhines et W.R. Young. A theory of a wind-driven circulation in mid ocean gyres. *J. Marine Res.*, 40: 559–596, 1982.

[10] R. Schopp et A. Colin de Verdière. Taylor columns between concentric spheres. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 86: 43–73, 1997.

[11] H. Stommel et A.B. Arons. On the abyssal circulation of the world ocean 1. stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep Sea Res.*, 6: 140–154., 1959.

[12] G.I. Taylor. Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc.*, A 104: 213–218, 1923.

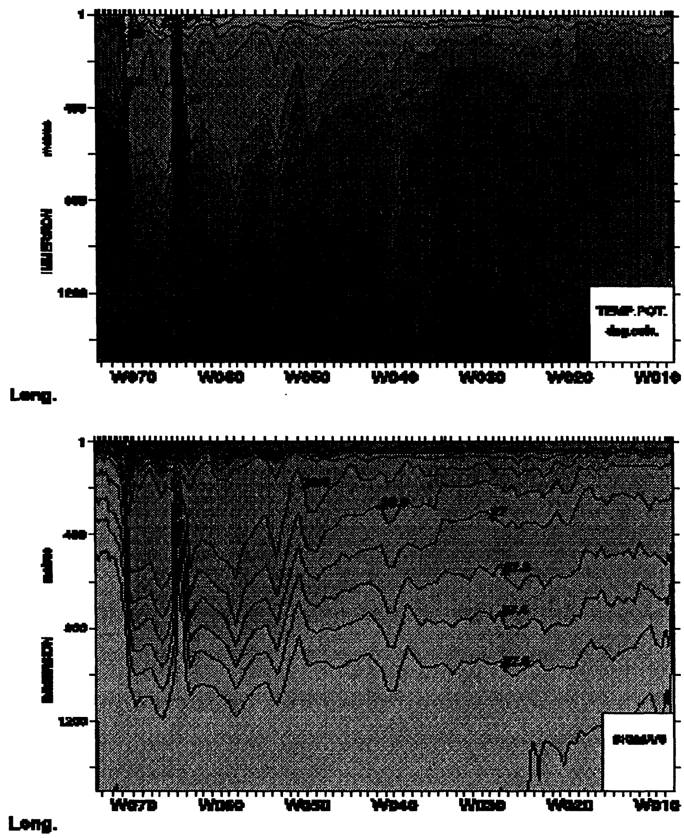

FIG. 1 – *Une section zonale de densité à 36°N à travers l'Atlantique Nord. Les valeurs indiquées correspondent à* 1000 *(densité-1). La remontée des iso-densités à gauche est associée avec le Gulf Stream, le pic plus à droite à un tourbillon froid formé par détachement d'un méandre du Gulf Stream. A l'est de ce tourbillon on observe une remontée progressive des iso-densité vers le bord Est. Cette dernière observation témoigne d'une circulation intérieure à l'échelle du bassin.*

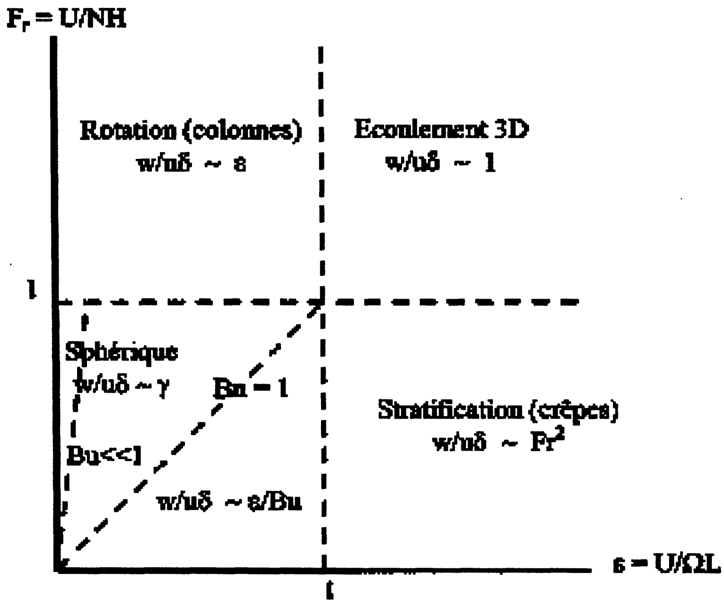

FIG. 2 – *Les régimes proches de la non-divergence horizontale (mouvements quasi-2D) sont présentés dans l'espace du nombre de Rossby et du nombre de Froude. Le régime de la circulation océanique intérieure dépend d'un troisième paramètre γ le rapport entre l'échelle méridienne et le rayon de la terre.*

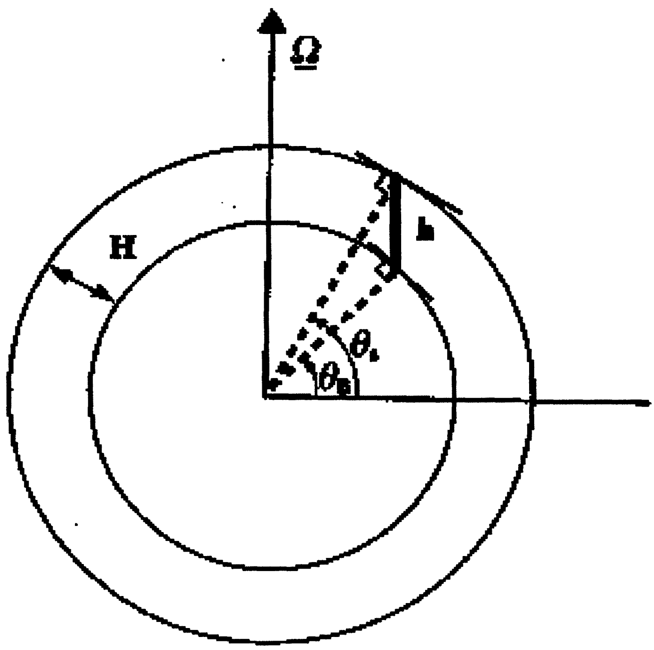

FIG. 3 – *Illustration de la variation de hauteur d'une colonne fluide parallèle à l'axe de rotation causée par les pentes différentes des tangentes aux sphères inférieures et supérieures.*

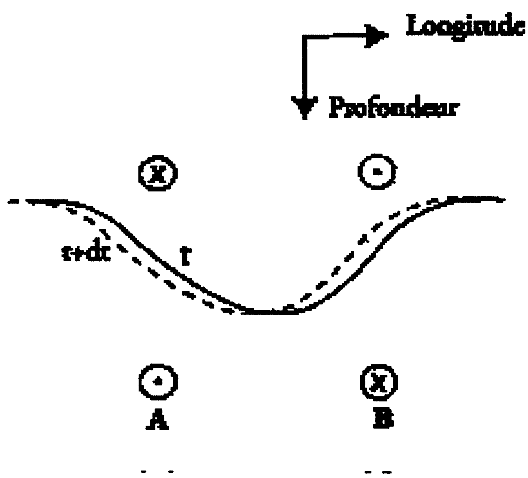

FIG. 4 – *A une anomalie de densité en longitude sont associées les vitesses géostrophiques indiquées. Les particules qui vont vers le pôle (équateur) verraient leur hauteur diminuer (augmenter) si l'anomalie était stationnaire. Ce n'est que lorsque celle-ci se déplace vers l'ouest que les hauteurs peuvent être conservées en suivant une particule fluide.*

ALAIN COLIN DE VERDIÈRE

LAB. PHYSIQUE DES OCÉANS,
UNIVERSITÉ DE BREST
BREST,
FRANCE.
acolindv@univ-brest.fr