Annales mathématiques Blaise Pascal

Abdelali Idrissi

Admissibilité de l'observation pour des systèmes bilinéaires contrôlés par des opérateurs non bornés

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 8, nº 1 (2001), p. 73-92

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2001__8_1_73_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 8, N° 1, 2001, pp.73-92

ADMISSIBILITÉ DE L'OBSERVATION POUR DES SYSTÈMES BILINÉAIRES CONTRÔLÉS PAR DES OPÉRATEURS NON BORNÉS.

ABDELALI IDRISSI

RÉSUMÉ. Moyenant la notion de systèmes de contrôle bilinéaires abstraits, présentée dans [2], nous avons montré l'existence et l'unicité d'une famille d'évolution génératrice de la solution régulière d'un système bilinéaire contrôlé par un opérateur non borné admissible. Des conditions suffisantes ont été données sur l'admissibilité d'une famille d'observation dépendant du temps pour ce genre de système.

Mots clés. Système bilinéaire, extrapolation, opérateur de contrôle admissible, opérateur d'observation dépendant du temps.
MSC 2000. 31C25, 31B90, 42A85, 31A10.

1. INTRODUCTION.

La modélisation du contrôle et de l'observation pour certains systèmes réels dont la représentation se fait, par exemple, par des E.D.P., fait intervenir des opérateurs de contrôle et d'observation non bornés. Cela se produit, par exemple, quand le contrôle est frontière ou quand les mesures se font en un point ou sur un domaine spatial limité. C'est le cas aussi pour des équations fonctionnelles avec des entrées et sorties qui dépendent du retard, cf. exemples 3.9 et 5.1. Contrairement au cas classique où les opérateurs sont bornés, cette non bornitude représente un handicap lors de la phase d'analyse et de contrôle des systèmes: stabilisabilité, observabilité, problème de contrôle optimal et détectabilité. Cela revient au fait que la solution peut ne pas exister dans l'espace d'état, qu' elle ne dépend pas continûment du contrôle introduit et que la fonction de sortie peut perdre son interprétation ponctuelle au delà d'un domaine des états initiaux. Ce problème a été un sujet stimulant à de nombreux travaux. Nous citons, entre autres, les premiers papiers de Russel [26], [27], Fattorini [14], les ouvrages de Lions [19], Curtain-Pritchard [7] et le plus récent de Keulen [18]. Dans ce travail, on considère les systèmes bilinéaires qui forment une classe de transition entre les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires, voir, e.g., [3], [12], et qui sont de la forme suivante

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t)\,Bx(t)\,, \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0; \end{cases}$$

muni de l'équation de sortie:

$$(1.2) \qquad y(t) = C(t)\,x(t)\,, \quad t \geq 0,$$

où $(A, D(A))$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X, la fonction de contrôle $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$, $p \in [1, \infty]$) et la fonction de sortie $y(\cdot)$ est à valeurs dans un espace de Banach Y. L'opérateur de contrôle B et les opérateurs d'observation $C(t)$, $t \geq 0$, sont supposés non bornés dans le sens où

$B \in \mathcal{L}(X, \overline{X})$ et $C(t) \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ où $\underline{X}$ et $\overline{X}$ sont des espaces de Banach tels que

$$(\mathrm{H}_1): \begin{cases} \underline{X} \overset{d}{\hookrightarrow} X \overset{d}{\hookrightarrow} \overline{X}, \text{ où } " \overset{d}{\hookrightarrow} " \text{ est l'injection continue et dense, et que} \\ T(\cdot) := (T(t))_{t \geq 0} \text{ est prolongeable par continuité à un } C_0 - \text{semi-groupe} \\ \overline{T}(\cdot) \text{ de générateur } \overline{A} \text{ sur } \overline{X} \text{ et se restreint à un } C_0 - \text{semi-groupe} \\ \underline{T}(\cdot) \text{ de générateur} \underline{A} \text{ dans } \underline{X}. \end{cases}$$

Cette hypothèse n'est pas trop restrictive, car il englobe plusieurs exemples à savoir, e.g., les espaces d'extrapolation X_n^A, $n \in \mathbb{Z}$, associés à A, introduit par Da Prato-Grisvard [10] et Nagel [21], les espaces interpolés de Hölder X_n^A, $n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, cf. [13], et aussi, pour des situations plus liées aux opérateurs B et $C(t)$, $t \geq 0$, on peut voir les exemples 3.5, 3.9 et 5.1.

Dans ce travail on s'intéresse, dans un premier temps, à l'existence et l'unicité de la solution régulière de (1.1). Plus précisément, on cherche à assurer l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace X (resp. $\underline{X}$) pour des données initiales dans X (resp. dans $\underline{X}$) pour tout contrôle $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Notre façon de faire consiste, moyenant la notion de systèmes de contrôle bilinéaires abstraits que nous avons introduit dans [2], à considérer des opérateurs de contrôle non bornés dit admissibles, pour lesquels on montre l'existence d'une famile d'évolution $(\phi_u(t,s))_{(t \geq s \geq 0)}$ dans X (resp. $\underline{X}$), solution de l'équation intégrale

$$\phi(t,s)x = T(t-s)x + \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)u(\sigma)B\phi(\sigma,s)x\,d\sigma, \tag{1.3}$$

pour tout $x \in X$ (resp. $x \in \underline{X}$). Notons que ce résultat généralise le théorème 2.9, [2], où les auteurs ont considéré des opérateurs de contrôle non bornés à valeurs dans l'espace d'extrapolation X_{-1}^A de X qui est un cas particulier des $\overline{X}$ considérés ici.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'admissibilité de l'opérateur d'observation non borné qui assure l'obtention d'une fonction de sortie $y(\cdot)$ L^p-intégrable pour toute donnée initiale dans l'espace d'état X. Dans la littérature, on trouve plusieurs auteurs qui ont accordé un grand intérêt à ce problème. Nous citons, à titre d'exemple, Curtain-Weiss [9], Weiss [30], Keulen [18] et Salamon [29] qui se sont intéressés au cas des systèmes linéaires autonomes avec une observation qui ne dépend pas du temps. Cette notion d'admissibilité est nécessaire pour l'analyse des systèmes. On cite, par exemple, le problème de la stabilité robuste (cf. Hinrichsen-Pritchard [15], Jacobe-Dragan-Pritchard [17]) ou le problème de contrôle linéaire quadratique, (cf. Curtain-Pritchard [8]). Ici, nous donnons des conditions suffisantes pour l'admissibilité de la famille des opérateurs $(C(t))_{t \geq 0}$ non bornés, donnés dans (1.2). Cela va permettre d'appliquer les résultats de [16] pour ce genre de système qui constituera l'objet de notre prochain travail.

Ce travail est divisé en quatre sections: la section 2 est une section préliminaire, essentiellement consacrée à la notion du système de contrôle bilinéaire abstrait et des propriétés qui sont nécessaires pour le développement de la section 3. Un résultat sur la localisation des espaces des opérateurs de contrôle admissibles par rapport à un espace bien concret a été donné. Dans la section 3, on donne un résultat d'existence et d'unicité de la famille d'évolution génératrice de la solution régulière de (1.1). Nous avons, ensuite, obtenu un résultat sur la différentiabilité de cette solution dans X et X_{-1}^A, en remplaçant l'opérateur B par d'autres opérateurs à images dans l'espace de Favard et l'espace de Favard extrapolé associés à l'opérateur dynamique A. Des exemples ont été donnés pour illustrer les résultats obtenus. Dans la section 4, on donne des conditions suffisantes de l'admissibilité de $C(\cdot)$ pour le système bilinéaire (1.1) contrôlé par un opérateur non borné admissible. Une application sur un système bilinéaire de conduction contrôlé par un opérateur non borné, avec des observations autonomes et non autonomes, a été donnée dans la section 5.

2. Notions et résultats préliminaires.

Dans cette section, on introduit des notions et résultats qui nous seront utiles par la suite et dont les démonstrations sont données dans [2]. Pour cela on commence par introduire la notion de systèmes de contrôle bilinéaires abstraits:
Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, E)$, où E est un espace de Banach, et $\tau \geq 0$. Alors la τ-concaténation de deux fonctions f et g, notée par $f \overset{\tau}{\diamond} g$, est définie par:

$$(f \overset{\tau}{\diamond} g)(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, \tau[\\ g(t-\tau) & \text{si } t \in [\tau, \infty[. \end{cases}$$

Définition 2.1. *Soient $T(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans un espace de Banach X et $p \in [1, \infty]$. Un système de contrôle bilinéaire abstrait (s.c.b.a.) pour X et p est un couple $(T(\cdot), \Psi)$, avec $\Psi := (\Psi_t)_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs de $B\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+) \times L^q(\mathbb{R}_+, X), X)$ (espace des opérateurs bilinéaires bornés), et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, qui vérifie*

$$\Psi_{\tau+t}(u \overset{\tau}{\diamond} v, x \overset{\tau}{\diamond} y) = T(t)\, \Psi_\tau(u, x) + \Psi_t(v, y) \tag{2.1}$$

pour tout $u, v \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $x, y \in L^q(\mathbb{R}_+, X)$ et $t, \tau \geq 0$.

Un simple exemple d'un s.c.b.a. est de considérer un opérateur B borné dans X, un C_0-semi-groupe $T(\cdot)$ sur X et la famille d'opérateurs bilinéaires

$$\Psi_t(u, x) := \int_0^t T(t-s)\, u(s)\, Bx(s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

qui sont bornés de $L^p(\mathbb{R}_+) \times L^q(\mathbb{R}_+, X)$ vers X ($p \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Alors, par intégration par parties, on vérifié facilement que $(T(\cdot), \Psi)$ est un s.c.b.a. pour X et p. On verra après, cf. remarque 2.6 (*ii*), que certains opérateurs non bornés permettent aussi de définir un s.c.b.a..

Remarque 2.2. *Soit $(T(\cdot), \Psi)$ un s.c.b.a.. Alors on a*
(i) $\Psi_0 = 0$,
(ii) pour tout $t \geq 0$, la valeur de Ψ_t ne dépend que de la restriction de u et x sur $[0, t]$, i.e.,

$$\Psi_t(u, x) = \Psi_t(u \overset{t}{\diamond} 0, x \overset{t}{\diamond} 0). \tag{2.2}$$

(iii) Pour $(v, y) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) \times L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$, on définit

$$\widehat{\Psi}_t(v, y) := \Psi_t\left(v \overset{t}{\diamond} 0, y \overset{t}{\diamond} 0\right). \tag{2.3}$$

Alors $\widehat{\Psi}_t$ est un prolongement par continuité de Ψ_t à un opérateur bilinéaire borné de $L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) \times L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ vers X, qui vérifie les propriétés de composition (2.1) et de causalité (2.2).

On donne maintenant quelques propriétés topologiques de la famille $(\Psi_t)_{t \geq 0}$.

Proposition 2.3. [2] *Soit $(T(\cdot), \Psi)$ un s.c.b.a. pour X et $p \in]1, \infty[$. Alors, la fonction*

$$(t, u, x) \mapsto \Psi_t(u, x)$$

est continue de $\mathbb{R}_+ \times L^p(\mathbb{R}_+) \times L^q(\mathbb{R}_+, X)$ vers X. Par suite, via (2.3), la fonction $(t, u, x) \mapsto \widehat{\Psi}_t(u, x)$ est aussi continue de $\mathbb{R}_+ \times L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) \times L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ vers X.

La proposition suivante donne une estimation exponentielle de $\|\Psi_t\|$.

Proposition 2.4. [2] *Soit $(T(\cdot), \Psi)$ un s.c.b.a. pour X et $p \in [1,\infty]$. Soient $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

Alors
(i) si $\omega > 0$, il existe $L > 0$ tel que

$$\|\Psi_t\|_{B\mathcal{L}} \leq L \exp(\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) si $\omega \leq 0$, Ψ est uniformément bornée.

Définition 2.5. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe dans X et $\overline{X}$ un espace de Banach tels que*
(i) $X \overset{d}{\hookrightarrow} \overline{X}$,
(ii) le semi-groupe $T(\cdot)$ admet une extension par continuité $\overline{T}(\cdot)$ sur $\overline{X}$ qui est un C_0-semi-groupe dans $\overline{X}$.
Alors on dit qu'un opérateur $B \in \mathcal{L}(X, \overline{X})$ est un opérateur de contrôle p-admissible pour X et $T(\cdot)$ (ou admissible si il n'y a pas de confusion sur $p \in [1,\infty]$) si

$$\int_0^t \overline{T}(t-s)\, u(s)\, Bx(s)\, ds \in X$$

pour tout $t \geq 0$ et $(u,x) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) \times L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On verra dans la troisième section que le système bilinéaire (1.1) contrôlé par un opérateur admissible admet une solution régulière, i.e., il existe une fonction $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, X)$ solution de l'équation:

$$x(t) = T(t)\, x_0 + \int_0^t \overline{T}(t-\sigma)\, u(\sigma)\, Bx(\sigma)\, d\sigma$$

pour $x_0 \in X$ et $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Cette solution sera donnée par une famille d'évolution (cf. théorème 3.2).

On note par $\mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$ l'espace des opérateurs $B \in \mathcal{L}(X, \overline{X})$ p-admissibles pour X et $T(\cdot)$.

Remarque 2.6. *(i) L'espace $\mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|B\|^{\overline{X}}_{p,\tau} = \sup\left\{\left\|\int_0^\tau \overline{T}(\tau-s)u(s)Bx(s)ds\right\| : \|u\|_{L^p(0,\tau)} \leq 1 \text{ et } \|x\|_{L^q(0,\tau;X)} \leq 1\right\}$$

pour $\tau > 0$. Les normes $\|\cdot\|^{\overline{X}}_{p,\tau}$ sont équivalentes pour le choix de τ.
(ii) Soit $B \in \mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$, $p \in [1,\infty]$. Pour $t > 0$, on définit l'opérateur

$$\Psi_t : L^p(\mathbb{R}_+) \times L^q(\mathbb{R}_+, X) \to X : (u,x) \mapsto \int_0^t \overline{T}(t-s)\, u(s)\, Bx(s)\, ds, \tag{2.4}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\Psi_t \in B\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+) \times L^q(\mathbb{R}_+, X), X)$ et $(T(\cdot), \Psi)$ est un s.c.b.a. pour X et p.

Dans le théorème 2.9, on donne un résultat permettant la localisation de l'espace $\mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$ suivant celle de $D(\overline{A})$ par rapport à X et dans certains cas, on montre qu'il s'identifie avec un espace bien concret (cf. corollaire 2.11). Avant cela, on considère un cas particulier des espaces vérifiant (H_1), mais qui sont importants lors de la représentation d'un s.c.b.a. (cf. théorème 2.8). Ces espaces sont liés à la fois au semi-groupe $T(\cdot)$ et a l'espace d'état X, appelés espaces d'extrapolation définis comme suit: sur X, on introduit la nouvelle norme

$$\|x\|_{-1} := \left\|(\lambda_0 I - A)^{-1} x\right\| \text{ pour } x \in X,$$

où A est le générateur du semi-groupe $T(\cdot)$ et $\lambda_0 \in \rho(A)$ est fixé. Alors l'espace d'extrapolation X_{-1}^A de X par rapport à $T(\cdot)$ (ou à A) est le complété de $(X, \|\cdot\|_{-1})$ (cf., e.g., [1], [10], [13]). A noter que l'espace X est l'espace d'extrapolation de X_1^A (domaine de A muni de la norme du graphe) par rapport à $T_1(\cdot)$ (la restriction de $T(\cdot)$ sur X_1^A). De plus, le semi-groupe $T(\cdot)$ admet une extension par continuité à un C_0-semi-groupe sur X_{-1}^A noté par $T_{-1}(\cdot)$ dont le générateur, noté par A_{-1}, est une extension par continuité de A sur X à un opérateur de $\mathcal{L}(X, X_{-1}^A)$. Par ce même procédé on construit la tour de Sobolev constituée d'une chaîne d'espaces X_n^A, $n \in \mathbb{Z}$, tels que $X_0^A := X$ et X_{n-1}^A est l'espace d'extrapolation de X_n^A par rapport à $T_n(\cdot)$ (où $T_n(\cdot)$ est l'extension de $T(\cdot)$ sur X_n^A si $n \leq 0$, et c'est la restriction de $T(\cdot)$ sur X_n^A si $n \geq 0$), (cf. [13], [21]). Soit $\omega > \omega_0(T(\cdot))$ fixé, où $\omega_0(T(\cdot))$ est le type du semi-groupe $T(\cdot)$. L'espace défini par:

$$F_A := \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \frac{1}{t} \left\| e^{-\omega t} T(t)x - x \right\| < \infty \right\},$$

est dit espace de Favard associé à $T(\cdot)$ (ou à A). L'espace F_A est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{F_A} := \sup_{t>0} \frac{1}{t} \left\| e^{-\omega t} T(t)x - x \right\|$$

(cf. [5],[13] et [28]). On note par $F_{A_{-1}}$ l'espace de Favard associé à $T_{-1}(\cdot)$ (dit aussi espace de Favard extrapolé associé à $T(\cdot)$). Notons que dans le cas où X est un espace de Banach réflexif alors l'espace Favard coïncide avec le domaine du générateur (cf. [13], [28]). Par suite, l'espace de Favard extrapolé coïncide avec l'espace X $(= D(A_{-1}))$.

Exemples 2.7. *(i) Sur l'espace $X := C_{00}(I)$, espace des fonctions continues qui s'annulent aux extrémités de l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on définit le semi-groupe de multiplication suivant:*

$$T_q(t) f := e^{tq} f, \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ et } f \in X,$$

où $q : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que $\sup_{s \in I} \operatorname{Re} q(s) < 0$. Alors $T_q(\cdot)$ est un C_0-semi-groupe dans X engendré par l'opérateur

$$Af := qf \text{ pour } f \in D(A) := \{g \in X : q g \in X\}.$$

Il est facile de vérifier que:

$$\begin{array}{lcl} X_{-1}^A & = & \{q^{-1} f : f \in X\} = \{g \in C(I) : qg \in X\} \\ F_A & = & \{f \in C_{00}(I) : qf \text{ est bornée}\} \\ F_{A_{-1}} & = & \{f \in C(I) : f \text{ est bornée et } q^{-1} f \in C_{00}(I)\}. \end{array}$$

(ii) Sur l'espace $X := L^2(\mathbb{R})$, on considère le (semi) groupe de translation à gauche $(T_g(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$T_g(t) f := f(\cdot + t), \ \forall t \geq 0,$$

de générateur

$$Af := f' \text{ pour } f \in X_1^A := W^{1,2}(\mathbb{R}).$$

Alors $X_{-1}^A = W^{-1,2}(\mathbb{R})$, $F_A = W^{1,2}(\mathbb{R})$ et $F_{A_{-1}} = L^2(\mathbb{R})$ car X est un espace réflexif. Pour d'autres exemples, on renvoie le lecteur à [13], [21] et [22].

Dans [2], on montre un résultat permettant de représenter un s.c.b.a. $(T(\cdot),\Psi)$, pour X et $p\in]1,+\infty[$, par une convolution à l'aide d'un opérateur $B\in\mathcal{L}\left(X,X_{-1}^{A}\right)$, où A est le générateur du semi-groupe $T(\cdot)$. Cela fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.8. *Soient X un espace de Banach et $(T(\cdot),\Psi)$ un s.c.b.a. pour X et $p\in]1,\infty[$. Alors, il existe un unique opérateur $B\in\mathcal{L}(X,X_{-1}^{A})$ tel que*

$$(2.5)\quad \Psi_t(u,x)=\int_0^t T_{-1}(t-s)u(s)Bx(s)ds,\ \forall(u,x)\in L^p(\mathbb{R}_+)\times L^q(\mathbb{R}_+,X)\quad et\ \forall\, t\geq 0,$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

La démonstration se base essentiellement sur la transformée de Laplace. Pour les détails on renvoie le lecteur à [2].

Le résultat suivant donne la localisation des espaces $\mathcal{B}_p\left(X,\overline{X},T(\cdot)\right)$ selon l'emplacement de $D(\overline{A})$ par rapport à l'espace d'état X.

Théorème 2.9. *Soient $T(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans X et $\overline{X}$ un espace de Banach tels que (i) et (ii) de la définition 2.5 soient satisfaites. Alors on a les implications suivantes.*

(i) $D\left(\overline{A}\right)\hookrightarrow X\Rightarrow\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})\hookrightarrow\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$.

(ii) $X\hookrightarrow D\left(\overline{A}\right)\Rightarrow\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))\hookrightarrow\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})$

où " $\hookrightarrow$ " désigne l'injection continue.

Pour la démonstration de ce théorème on aurra besoin du lemme suivant qui est dû à Desch-Schappacher [11, thm. 9]. Des versions similaires sont aussi données dans [23, prop. 3.3] et [28, lem. 4.3.9].

Lemme 2.10. *Soit $T(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans X de générateur $(A,D(A))$. Pour tout $f\in L^1_{loc}(0,+\infty;F_A)$ et $t\geq 0$, on pose*

$$(T*f)(t):=\int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Alors on a

(i) $(T*f)(t)\in D(A)$,

(ii) *pour $\omega>\omega_0(T(\cdot))$, il existe une constante $N\geq 0$, independente de (t,f), telle que*

$$\|(T*f)(t)\|_{X_1^A}\leq N\exp\left(|\omega|t\right)\|f\|_{L^1(0,t;F_A)}$$

où $\|\cdot\|_{X_1^A}$ est la norme du graphe associée à A, i.e., $\|x\|_{X_1^A}:=\|x\|+\|Ax\|$, $x\in D(A)$.

Preuve du théorème. (i) Soient $B\in\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})$ et $(u,x)\in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)\times L^q_{loc}(\mathbb{R}_+,X)$, avec $p\in[1,+\infty]$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors $u(\cdot)Bx(\cdot)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,F_{\overline{A}})$. Ainsi, par le lemme 2.10 et l'injection $D(\overline{A})\hookrightarrow X$, on obtient que $B\in\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$ et que

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t\overline{T}(t-s)\,u(s)\,Bx(s)\,ds\right\| &\leq const.\exp\left(|\omega|t\right)\|u(\cdot)\,Bx(\cdot)\|_{L^1(0,t;F_{\overline{A}})}\\ &\leq const.\exp\left(|\omega|t\right)\|B\|_{\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})}\|u\|_{L^p(0,t)}\|x\|_{L^q(0,t;X)}\end{aligned}$$

où $\omega>\omega_0(\overline{T}(\cdot))$. Donc

$$\|B\|_{p,t}^{\overline{X}}\leq const.\exp\left(|\omega|t\right)\|B\|_{\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})}.$$

(ii) Soit $B\in\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$. Comme $F_{\overline{A}}\hookrightarrow\overline{X}$, il suffit alors de montrer que $B(X)\subseteq F_{\overline{A}}$ pour obtenir que $B\in\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})$ grâce au théorème du graphe fermé. Alors, soit $x\in X$ et

$t > 0$. Par le fait que $X \hookrightarrow D\left(\overline{A}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\left\|e^{-\omega t}\overline{T}(t)Bx - Bx\right\|_{\overline{X}} &= \left\|\left(\overline{A} - \omega I\right)\int_0^t e^{-\omega s}\overline{T}(s)Bxds\right\|_{\overline{X}} \\ &\leq const. \left\|\int_0^t e^{-\omega s}\overline{T}(s)Bxds\right\| \\ &\leq const.\, t\, \|B\|_{p,t}^{\overline{X}}\, \|x\|.\end{aligned}$$

Par la croissance de la quantité $\|B\|_{p,t}^{\overline{X}}$ par rapport à $t > 0$, (ceci s'obtient en utilisant la propriété (2.1) pour le s.c.b.a. associé à B via la remarque 2.6 (*ii*)), on déduit que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}\frac{1}{t}\left\|e^{-\omega t}\overline{T}(t)Bx - Bx\right\|_{\overline{X}} &\leq \sup_{t\in]0,1]}\frac{1}{t}\left\|e^{-\omega t}\overline{T}(t)Bx - Bx\right\|_{\overline{X}} + \sup_{t>1}\frac{1}{t}\left\|e^{-\omega t}\overline{T}(t)Bx - Bx\right\|_{\overline{X}} \\ &\leq const. \|B\|_{p,1}^{\overline{X}}\|x\| + const. \|B\|_{\mathcal{L}(X,\overline{X})}\|x\|,\end{aligned}$$

i.e., $Bx \in F_{\overline{A}}$. L'injection continue de $\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$ dans $\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})$ est ainsi obtenue par la dernière inégalité et l'injection $\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot)) \hookrightarrow \mathcal{L}(X,\overline{X})$. Montrons alors, cette dérnière injection. Soient $B \in \mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$ et $x \in X$. Donc on a

$$\begin{aligned}\|Bx\|_{\overline{X}} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left\|\int_0^t \overline{T}(s)Bxds\right\|_{\overline{X}} \\ &\leq \text{const.} \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left\|\int_0^t \overline{T}(s)Bxds\right\| \\ &\leq \text{const.} \|B\|_{p,\tau}^{\overline{X}}\|x\|, \quad (\tau > 0),\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Comme conséquence, on obtient cette identification intéressante de $\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot))$ avec $\mathcal{L}(X,F_{\overline{A}})$ qui est indépendante de p.

Corollaire 2.11. *Dans la situation du théorème 2.9, s'il existe un isomorphisme entre $D\left(\overline{A}\right)$ et X (en particulier pour $D(A_{-1})$), alors*

$$\mathcal{B}_p(X,\overline{X},T(\cdot)) = \mathcal{L}(X,F_{\overline{A}}) \quad \textit{pour tout } p \in [1,+\infty]$$

avec des normes équivalentes.

Remarque 2.12. (*i*) *Ce résultat généralise celui donné dans* [2], *où il a été montré que*

$$\mathcal{B}_1\left(X, X_{-1}^A, T(\cdot)\right) = \mathcal{L}\left(X, F_{A_{-1}}\right).$$

Ainsi, par le théorème 2.8, tout s.c.b.a. pour X et $p \in]1,\infty[$ est représenté par un opérateur unique $B \in \mathcal{L}\left(X, F_{A_{-1}}\right)$.
(*ii*) *Si X est un espace de Banach réflexif alors $F_{A_{-1}} = X (= D(A_{-1}))$, par suite on obtient*

$$\mathcal{B}_p(X, X_{-1}, T(\cdot)) = \mathcal{L}(X) \quad \textit{pour tout } p \in [1,+\infty].$$

3. Système bilinéaire contrôlé par un opérateur admissible.

Dans cette section, on montre un résultat d'existence et d'unicité de la solution régulière du système bilinéaire (1.1) contrôlé par un opérateur admissible. Sous des hypothèses sur l'opérateur de contrôle qui est à image dans une extension $\overline{X}$ de X, on montre l'existence de la solution dans X et $\overline{X}$ suivant l'état initial du système (1.1). Pour cela, on fait appel à la notion d'une famille d'évolution.

Définition 3.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R} :=]-\infty, +\infty[$ et $\phi(t,s)$, $(t,s) \in \Delta_I := \{(r,\sigma) \in I^2; r \geq \sigma\}$, une famille d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X. $(\phi(t,s))_{(s,t)\in\Delta_I}$ est dite une famille d'évolution fortement continue si les assertions suivantes sont satisfaites:*
(i) $\phi(t,t) = Id$, $\phi(t,\tau)\,\phi(\tau,s) = \phi(t,s)$ pour $(t,\tau), (\tau,s) \in \Delta_I$,
(ii) $\Delta_I \ni (t,s) \longmapsto \phi(t,s)\,x$ est continue pour tout $x \in X$.

Théorème 3.2. *Soient $T(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans un espace de Banach X de générateur A et $\underline{X}$, $\overline{X}$ des espaces de Banach satisfaisant* (H_1). *Soit $B \in \mathcal{B}_p(\underline{X}, \overline{X}, \underline{T}(\cdot)) \cap \mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$ avec $p \in]1, \infty[$. Alors, pour tout $u(\cdot) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$, il existe une famille d'évolution unique $(\phi_u(t,s))_{(t,s)\in\Delta_{\mathbb{R}_+}}$ dans X (resp. $\left(\underline{\phi}_u(t,s)\right)_{(t,s)\in\Delta_{\mathbb{R}_+}}$ dans $\underline{X}$) solution de l'équation intégrale (1.3) pour tout $x \in X$ (resp. $x \in \underline{X}$).*

Preuve. On commence par montrer l'existence de ϕ_u. Ce qui permet d'en déduire, par restriction sur $\underline{X}$, celle de $\underline{\phi}_u$.
<u>Existence de ϕ_u</u>: soit la suite d'opérateurs suivante

$$\begin{aligned} \phi_0(t,s) &:= T(t-s), \\ \phi_{n+1}(t,s) &= \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\phi_n(\sigma,s)\,x\,d\sigma, \quad x \in X, \end{aligned}$$

pour $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Notons par Ψ_t l'opérateur bilinéaire associé à B défini par (2.4). Alors, d'après la remarque 2.6, (ii), le couple $(T(\cdot), \Psi)$ fome un s.c.b.a. pour p et X (resp. pour p et $\underline{X}$), et on peut écrire

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(t,s)\,x &= \widehat{\Psi}_{t-s}\left(u(\cdot+s), \phi_n(\cdot+s,s)\,x\right) \\ &= \Psi_{t-s}\left(u(\cdot+s) \overset{t-s}{\diamond} 0, \phi_n(\cdot+s,s)\,x \overset{t-s}{\diamond} 0\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\widehat{\Psi}_t$ est l'opérateur défini par (2.3). Par récurrence, on obtient, via les propositions 2.3 et 2.4, que la famille $\phi_n := (\phi_n(t,s))_{(t,s)\in\Delta_{\mathbb{R}_+}}$ est dans $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(\underline{X})$ pour $n \in \mathbb{N}$, elle est fortement continue dans X et $\underline{X}$ et que pour tout $\omega > \sup(\omega_0(T(\cdot)), \omega_0(\underline{T}(\cdot)), 0)$, il existe $L_0 > 0$ telle que

$$\sup\left(\|\phi_n(t,s)\|_{\mathcal{L}(\underline{X})}, \|\phi_n(t,s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq L_0 e^{\omega(t-s)} \left(\frac{\left(\left(L_0 e^{\omega(t-s)}\|u\|_{L^p(s,t)}\right)^q (t-s)\right)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.2}$$

pour $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$, où $q = \frac{p}{p-1}$. Ainsi, la série de Dayson-Philips $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \phi_n(t,s)$ converge normalement dans $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(\underline{X})$ uniformément sur $\Delta_{[0,T]}$ pour tout $T > 0$. Ce qui implique que la famille d'opérateurs

$$\phi_u(t,s) := \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t,s), \quad (t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+},$$

est fortement continue dans X et $\underline{X}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \phi_k(t,s)\,x &= \phi_0(t,s)\,x + \sum_{k=1}^{n} \phi_k(t,s)\,x \\ &= T(t-s)\,x + \sum_{k=1}^{n} \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\phi_{k-1}(\sigma,s)\,x\,d\sigma \\ &= T(t-s)\,x + \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(\sigma,s)\,x\,d\sigma. \end{aligned}$$

Donc, par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t,s)$ sur $\Delta_{[0,T]}$, pour tout $T > 0$, on déduit que $\phi_u(t,s)$ vérifie (1.3).
Maintenant, soient (t,r), $(r,s) \in \Delta_{[0,T]}$ pour certain $T > 0$ et $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} \phi_u(t,r)\,\phi_u(r,s)\,x &= T(t-s)\,x + \textstyle\int_s^r \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\phi_u(\sigma,s)\,x\,d\sigma \\ &\quad + \textstyle\int_r^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\phi_u(\sigma,r)\,\phi_u(r,s)\,x\,d\sigma \\ &= T(t-s)\,x + \textstyle\int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\phi_u(\sigma,s)\,x\,d\sigma \\ &\quad + \textstyle\int_r^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,B\left(\phi_u(\sigma,r)\,\phi_u(r,s) - \phi_u(\sigma,s)\right)x\,d\sigma. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On pose $f(\sigma) := \phi_u(\sigma,r)\,\phi_u(r,s)\,x - \phi_u(\sigma,s)\,x$ pour $\sigma \in [r,t]$. Alors, d'après (3.3), on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \textstyle\int_r^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,Bf(\sigma)\,d\sigma \\ &= \widehat{\Psi}_{t-r}\left(u(\cdot+r), f(.+r)\right). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.4, on obtient

$$\|f(t)\|^q \le const. \int_r^t \|f(\sigma)\|^q\,d\sigma, \quad 0 \le t \le T,$$

où la constante dépend de u et T. Le lemme de Gronwall permet donc de conclure que $f(\cdot) \equiv 0$, i.e., $\phi_u(t,s) = \phi_u(t,r)\,\phi_u(r,s)$. Ainsi, on a montré l'existence d'une famille d'évolution ϕ_u solution de (1.3).

<u>L'unicité de ϕ_u</u>: supposons qu'il y a une autre famille d'évolution $(\phi(t,s))_{(t,s)\in\Delta_{\mathbb{R}_+}}$ dans X solution de (1.3). Pour $x \in X$, on pose

$$g(t) := \phi_u(t,s)\,x - \phi(t,s)\,x.$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} g(t) &= \textstyle\int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,Bg(\sigma)\,d\sigma \\ &= \widehat{\Psi}_{t-s}\left(u(\cdot+s), g(.+s)\right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4, on obtient

$$\|g(t)\|^q \le const. \textstyle\int_s^t \|g(\sigma)\|^q\,d\sigma.$$

Ainsi, l'unicité de ϕ_u est obtenu en vertu du lemme de Gronwall. L'unicité de $\underline{\phi}_u$ s'obtient de la même manière, en travaillant dans $\underline{X}$ au lieu de X. □

Le théorème 2.8 permet de remplacer un opérateur admissible B, à image dans une extension $\overline{X}$ de X, par d'autres opérateurs, à images dans des espaces bien déterminés, pour lesquels $\underline{\phi}_u$ et ϕ_u sont aussi solutions de certains équations intégrales.

Corollaire 3.3. *Dans le cadre du théorème 3.2, si $\underline{X} = X_1^A$, alors il existe des opérateurs uniques $\underline{B} \in \mathcal{L}(X_1^A, F_A)$ et $\overline{B} \in \mathcal{L}(X, F_{A_{-1}})$ tels que, la famille d'évolution $\underline{\phi}_u$ est aussi solution de*

$$\phi(t,s)\,x = T(t-s)\,x + \int_s^t T(t-\sigma)\,u(\sigma)\,\underline{B}\phi(\sigma,s)\,x\,d\sigma, \quad \forall x \in X_1^A, \tag{3.4}$$

et ϕ_u est solution de

$$\phi(t,s)\,x = T(t-s)\,x + \int_s^t T_{-1}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,\overline{B}\phi(\sigma,s)\,x\,d\sigma, \quad \forall x \in X, \tag{3.5}$$

pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \in]1,\infty[$ et $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$. Par suite, on obtient la différentiabilité de $\underline{\phi}_u$ et ϕ_u respectivement dans X et X_{-1}^A, et on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{\phi}_u(t,s)\,x = \left(A + u(t)\,\underline{B}\right)\underline{\phi}_u(t,s)\,x, \quad \forall x \in X_1^A, \tag{3.6}$$

$$(3.7) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\phi_u(t,s)x = \left(A_{-1} + u(t)\overline{B}\right)\phi_u(t,s)x, \quad \forall x \in X$$

p.p. tout $t \geq s \geq 0$.

Preuve. Soit Ψ_t, $t \geq 0$, l'opérateur défini par (2.4) via l'opérateur $B \in \mathcal{B}_p\left(\underline{X}, \overline{X}, \underline{T}(\cdot)\right) \cap \mathcal{B}_p\left(X, \overline{X}, T(\cdot)\right)$. Alors, d'après la remarque 2.6, (ii), $(T(\cdot), \Psi)$ est un s.c.b.a. pour X et p. Ainsi, en vertu du théorème 2.8 et le corollaire 2.11, il existe des opérateurs uniques $\underline{B} \in \mathcal{L}\left(X_1^A, F_A\right)$ et $\overline{B} \in \mathcal{L}\left(X, F_{A_{-1}}\right)$ tels que, pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \in]1, \infty[$, on a

$$\widehat{\Psi}_t(u,x) = \int_0^t T(t-\sigma)\,u(\sigma)\,\underline{B}x(\sigma)\,d\sigma \text{ pour tout } x(\cdot) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, \underline{X})$$

et aussi

$$\widehat{\Psi}_t(u,x) = \int_0^t T_{-1}(t-\sigma)\,u(\sigma)\,\overline{B}x(\sigma)\,d\sigma \text{ pour tout } x(\cdot) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, X),$$

où $\widehat{\Psi}_t$ est défini à partir de Ψ_t par (2.3) avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Donc, d'après le théorème 3.2, on déduit que $\underline{\phi}_u$ et ϕ_u sont respectivement solutions de (3.4) et (3.5).

Pour la différentiabilité de $\underline{\phi}_u(\cdot, s)$: soit $x \in X_1^A$. Alors, par le théorème de Fubini et (3.4), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_s^t A\left(\underline{\phi}_u(\alpha,s) - T(\alpha - s)\right)x\,d\alpha &= \textstyle\int_s^t A \int_s^\alpha T(\alpha-\beta)\,u(\beta)\,\underline{B}\underline{\phi}_u(\beta,s)\,x\,d\beta\,d\alpha \\
&= \textstyle\int_s^t A_{-1}\int_\beta^t T(\alpha-\beta)\,u(\beta)\,\underline{B}\underline{\phi}_u(\beta,s)\,x\,d\alpha\,d\beta \\
&= \textstyle\int_s^t T(t-\beta)\,u(\beta)\,\underline{B}\underline{\phi}_u(\beta,s)\,x\,d\beta \\
&\qquad - \textstyle\int_s^t u(\beta)\,\underline{B}\underline{\phi}_u(\beta,s)\,x\,d\beta \\
&= \underline{\phi}_u(t,s)\,x - T(t-s)\,x - \textstyle\int_s^t u(\beta)\,\underline{B}\underline{\phi}_u(\beta,s)\,x\,d\beta.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\underline{\phi}_u(t,s)\,x - x = \int_s^t \left(A + u(\beta)\,\underline{B}\right)\underline{\phi}_u(\beta,\sigma)\,x\,d\beta.$$

Ce qui donne alors (3.6). Pour (3.9), on procède de la même manière. □

Remarque 3.4. *En utilisant la suite d'opérateurs suivante*

$$\begin{aligned}
\phi_0(t,s) &:= T(t-s), \\
\phi_{n+1}(t,s) &= \textstyle\int_s^t \phi_n(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\underline{B}T(\sigma - s)\,x\,d\sigma, \quad x \in X_1^A,
\end{aligned}$$

avec $\underline{B}$ *est l'opérateur donné dans le corollaire 3.3, on montre d'une manière similaire à la démonstration du théorème 3.2, que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t,s)$ *converge normalement vers* $\underline{\phi}_u$ *uniformément sur tout* $\Delta_{[0,T]}$, $T > 0$. *Ainsi, on obtient que* $\underline{\phi}_u$ *est aussi solution de l'équation*

$$(3.8) \quad \phi(t,s)\,x = T(t-s)\,x + \int_s^t \phi(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\underline{B}T(\sigma-s)\,x\,d\sigma, \quad (t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+} \text{ et } x \in X_1^A$$

ou encore

$$(3.9) \qquad \phi(t,s)\,x - x = \int_s^t \phi(t,\sigma)\left(A + u(\sigma)\,\underline{B}\right)x\,d\sigma, \quad (t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+} \text{ et } x \in X_1^A$$

i.e., $\underline{\phi}_u(t,\cdot)\,x$ *est dérivable presque partout sur* $[0,t[$ *et on a*

$$(3.10) \qquad \frac{\partial}{\partial s}\underline{\phi}_u(t,s)\,x = -\underline{\phi}_u(t,s)\left(A + u(s)\,\underline{B}\right)x, \quad \forall x \in X_1^A.$$

On termine cette section par deux exemples, l'un sur la localisation de certains opérateurs de contrôle admissibles et l'autre sur l'existence de la solution régulière d'une équation à retard.

Exemple 3.5. *Sur l'espace* $X := L^r(0,1)$, $1 < r < \infty$, *on considère le* C_0*-semi-groupe de translation à droite suivant*

$$(T(t)f)(s) := \chi_{[0,1]}(s-t)\,f(s-t),\ \ s \in [0,1],\ t \geq 0.$$

Soient $\underline{X}$ *et* $\overline{X}$ *des espaces définis comme suit*

$$\begin{array}{rcl} \underline{X} & := & C_0[0,1] = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\} \ \ (\textit{muni de la norme uniforme}) \\ \overline{X} & := & L^1(0,1). \end{array}$$

Alors il est clair que X, $\underline{X}$, $\overline{X}$ *et* $T(\cdot)$ *vérifient* $(\mathbf{H}_1)$, *où* $\underline{T}(\cdot)$ *et* $\overline{T}(\cdot)$ *sont aussi des semi-groupes de translation à droite dont les générateurs* $(\underline{A}, D(\underline{A}))$ *et* $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ *sont définis par*

$$\begin{array}{rcl} D(\underline{A}) & := & \{f \in C^1[0,1] \cap \underline{X} : f'(0) = 0\} \\ \underline{A}f & := & -f' \ \ \textit{pour } f \in D(\underline{A}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D(\overline{A}) & := & \left\{f \in \overline{X} : f \textit{ est absolument continue, } f' \in \overline{X} \textit{ et } f(0) = 0\right\} \\ \overline{A}f & := & -f' \ \textit{pour } f \in D(\overline{A}). \end{array}$$

Comme $D(\overline{A}) \hookrightarrow \underline{X} \hookrightarrow X$, *donc d'après le théorème (2.9) on déduit que*

$$\mathcal{L}(\underline{X}, F_{\overline{A}}) = \mathcal{L}(\underline{X}, F_{\overline{A}}) \cap \mathcal{L}(X, F_{\overline{A}}) \subseteq \mathcal{B}_p(\underline{X}, \overline{X}, T(\cdot)) \cap \mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$$

pour tout $p \in [1, +\infty]$. *Ainsi on est amené à identifier l'espace de Favard* $F_{\overline{A}}$. *Pour cela on introduit l'espace* $VB[0,1]$ *des fonctions à variation bornée sur* $[0,1]$, *i.e., vérifiant*

$$var(f) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,\ \textit{pour tout } 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1\right\} < \infty.$$

Alors, le résultat suivant montre que l'espace $F_{\overline{A}}$ *coïncide bien avec* $VB[0,1]$.

Proposition 3.6.

$$F_{\overline{A}} = VB[0,1]$$

et $\|\cdot\|_{F_{\overline{A}}}$ *est équivalente à la norme* $|||f||| := \|f\|_\infty + var(f)$, $f \in F_{\overline{A}}$.

Pour la démonstration, on fait appel au résultat suivant.

Lemme 3.7. *([4], prop. A.5) Soient* $f \in L^1(0,1)$ *et* $c > 0$ *une constante. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe* $f_1 \in VB[0,1]$ *telle que* $var(f_1) \leq c$ *et* $f(t) = f_1(t)$ *p.p. sur* $[0,1]$.

(ii) $\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|\,dt \leq ch$ *pour tout* $h \in]0,1[$.

Preuve de la proposition. *Soient* $h \in]0,1[$ *et* $f \in L^1(0,1)$. *Alors, l'égalité*

$$\|\overline{T}(h)f - f\|_{\overline{X}} = \int_0^h |f(s)|\,ds + \int_h^1 |f(s-h) - f(s)|\,ds$$

permet facilement, via le lemme 3.7, d'en déduire que $F_{\overline{A}} = VB[0,1]$ *avec*

$$var(f) \leq \|f\|_{F_{\overline{A}}} \leq 2\,|||f||| \tag{3.11}$$

pour tout $f \in VB[0,1] \subset L^\infty(0,1)$. *Les injections continues de* $L^\infty(0,1)$ *et de* $F_{\overline{A}}$ *dans* $L^1(0,1)$ *et les inégalités (3.11) entrainent que* $(VB[0,1], |||\cdot|||)$ *est un espace de Banach. Donc, d'après le théorème de l'application ouverte, les deux normes* $\|\cdot\|_{F_{\overline{A}}}$ *et* $|||\cdot|||$ *sont équivalentes.* □

Ainsi, d'après le théorème 3.2, on déduit le résultat suivant.

Proposition 3.8. *Pour tout opérateur $B \in \mathcal{L}(C_0[0,1], VB[0,1])$ il existe une famille d'évolution unique ϕ_u dans $L^r(0,1)$, $1 < r < \infty$, (resp. $\underline{\phi}_u$ dans $C_0[0,1]$) solution de l'équation intégrale*

$$\phi(t,s)f = T(t-s)f + \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)u(\sigma)B\phi(\sigma,s)f\,d\sigma$$

pour tout $f \in L^r(0,1)$ (resp. $f \in C_0[0,1]$) et $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, avec $p \in]1,+\infty[$.

Exemple 3.9. *On considère l'équation différentielle à retard suivante*

(3.12) $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Mx_t + Nv_t \qquad (x_t(\theta) := x(t+\theta),\ \theta \in [-r,0])$$

avec les conditions

(3.13) $$v(t) = u(t)x(t) \ \text{ et } \ x_0 = \varphi,\ v_0 = \psi,\ \ t \geq 0,$$

où A est le générateur d'un C_0-semi-groupe dans un espace de Banach E, $\varphi \in X := C([-r,0],E)$, $\psi \in V := L^1(-r,0;E)$, $u \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, et M (resp. N) est un opérateur borné de X (resp. de V) vers E.
Dans le but d'établir une reformulation du problème (3.12)-(3.13) sous la forme d'un système bilinéaire, on définit les opérateurs matriciels:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & A\delta_0 + M - \delta_0' \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\theta} \end{pmatrix} \ \text{avec}$$
$$D(A_1) := \{0\} \times \{\varphi \in C^1([-r,0],E),\ \varphi(0) \in D(A)\}$$

et

$$A_2 := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ \delta_0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{avec}$$
$$D(A_2) := W^{1,1}(-r,0;E) \times \{0\},$$

où $\delta_0\varphi := \varphi(0)$ et $\delta_0'\varphi := \varphi'(0)$.
Sur l'espace de Banach $\mathcal{Z} := E \times X \times V \times E$, l'opérateur

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_1 & D \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},\ \ D(\mathcal{A}) := D(A_1) \times D(A_2)$$

est un opérateur de Hille-Yosida, puisque c'est une perturbation additive de l'opérateur

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \ \text{avec le domaine } D(\mathcal{A}),$$

qui est de Hille-Yosida, voir [20] *et* [28, lem. 4.1.1]. *Ainsi, si on pose $z(t) := (0, x_t, v_t, 0)$, où $x(\cdot) \in C([-r,\infty[,E)$ et $v(\cdot) \in L^1(-r,\infty;E)$ sont solutions de (3.12)-(3.13), alors le Problème (3.12)-(3.13) est équivalent au système bilinéaire*

(3.14) $$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + u(t)Bz(t),\ \ z(0) = (0,\varphi,\psi,0)$$

où

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un opérateur borné dans $\mathcal{Z}$. D'après [13, cor. II.3.21], *la part $(\mathcal{D}, D(\mathcal{D}))$ de $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ sur $\mathcal{Z}_0 := \overline{D(\mathcal{A})} = 0 \times X \times V \times 0$ définie par*

$$D(\mathcal{D}) := \{z \in D(\mathcal{A}) : \mathcal{A}z \in \mathcal{Z}_0\}$$
$$\mathcal{D}z := \mathcal{A}z \ \text{ pour } z \in D(\mathcal{D})$$

engendre un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{Z}_0$. Comme $\mathcal{Z} \hookrightarrow F_{\mathcal{D}_{-1}}$ (cf. [23, prop. 3.2]*), alors $B \in \mathcal{L}\left(\mathcal{Z}_0, F_{\mathcal{D}_{-1}}\right)$. Donc, par le corollaire 2.11 et le théorème 3.2, on déduit que (3.12)-(3.13) admet une solution régulière dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{Z}_0)$ vérifiant*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_t \\ v_t \\ 0 \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t T_{-1}(t-s)\, u(s)\, B \begin{pmatrix} 0 \\ x_s \\ v_s \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in X \times V$. D'après le corollaire 3.3, la solution $z(t) = (0, x_t, u_t, 0)$ est différentiable p.p. sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathcal{Z}_0$ et on a

$$\frac{d}{dt} z(t) \;=\; (\mathcal{D}_{-1} + u(t) B)\, z(t) \quad p.p.\ t \geq 0.$$

4. Système bilinéaire observé par une famille admissible.

Nous abordons cette section par l'introduction de la notion de l'admissibilité d'une famille d'observation pour des systèmes non autonomes et qui généralise celle considérée par Weiss [30], pour des systèmes autonomes avec une observation qui ne dépend pas du temps.

Soient $\left(\underline{X}, \|\cdot\|_{\underline{X}}\right)$, $(X, \|\cdot\|)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces de Banach tels que

$$\underline{X} \overset{d}{\hookrightarrow} X.$$

Définition 4.1. *Soit $\phi := (\phi(t,s))_{(t,s)\in\Delta_{\mathbb{R}_+}}$ une famille d'évolution sur X qui laisse invariant l'espace $\underline{X}$ et $(C(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires de $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}_s(\underline{X}, Y))$ (espace des fonctions $\mathcal{F}(\cdot)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ telles que $\mathcal{F}(\cdot)x \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, Y)$ pour tout $x \in \underline{X}$). Alors la famille $(C(t))_{t\geq 0}$ est dite une famille d'observation admissible (f.o.a.), pour $(\underline{X}, X, Y, p, \phi)$, pour $p \in [1, \infty]$, s'il existe une fonction croissante $\gamma :]0, \infty[\to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\|C(\cdot)\phi(\cdot, s)x\|_{L^p(s,T;Y)} \leq \gamma(T-s)\,\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in \underline{X} \textit{ et } (T,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}. \tag{4.1}$$

Remarque 4.2. *(i) Soient $S(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans X qui laisse invariant $\underline{X}$ et $C \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ un opérateur d'observation admissible (o.o.a.) pour $(\underline{X}, X, Y, p, S(\cdot))$ au sens de Weiss, i.e., il existe $t_0 > 0$ et $c > 0$ telles que*

$$\|CS(\cdot)x\|_{L^p(s,t_0;Y)} \leq c\,\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in \underline{X}. \tag{4.2}$$

Alors la famille autonome $C(\cdot) \equiv C$ est une f.o.a. pour $(\underline{X}, X, Y, p, \phi_S)$, où $\phi_S(t,s) := S(t-s)$ (cf. lemme 4.3). Ainsi, l'admissibilité donnée dans la définition 4.1 est aussi vérifiée par la classe de systèmes autonomes de Pritchard-Salamon [25].
(ii) La notion d'admissibilité d'une famille d'évolution a été étudiée dans [16] *où il a été montré que c'est équivalent à l'admissibilité d'un opérateur d'observation, au sens de Weiss, pour certains systèmes autonomes via la théorie des semi-groupes d'évolution.*

On a vu que le théorème 3.2 assure l'existence d'une famille d'évolution fortement continue dans les espases $\underline{X}$ et X et qui donne la solution régulière du système bilinéaire (1.1), pour des opérateurs de contrôle non bornés admissibles. On est donc en mesure de discuter l'admissibilité d'une famille d'observations par rapport à ce système. On donne des conditions suffisantes, sur les données du problème, pour qu'une telle famille soit admissible. Nous commençons par le cas où la famille d'observation est autonome. Pour cela, on donne un lemme utile par la suite dont la démonstration est donnée dans [16] et [30].

Lemme 4.3. *Soient $S(\cdot)$ un C_0-semi-groupe dans X et $C \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ un o.o.a. pour $(\underline{X}, X, Y, p, S(\cdot))$ au sens de Weiss (cf. remarque 4.2, (i)). Alors il existe une fonction croissante $\delta :]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\|CS(\cdot)x\|_{L^p(0,t;Y)} \leq \delta(t)\|x\|_X, \ \forall x \in \underline{X}, \forall t > 0.$$

En particulier, si $S(\cdot)$ est exponentiellement stable alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|CS(\cdot)x\|_{L^p(0,\infty;Y)} \leq \delta\|x\|_X, \ \forall x \in \underline{X}.$$

Soit maintenant l'ensemble des fonctions suivant

$$U^p := \Big\{u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+) : \text{il existe une fonction } f_u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ croissante telle que } \|u\|_{L^p(a,b)} \leq f_u(b-a), \ \forall (a,b) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}\Big\}$$

qui est dense dans l'espace de Fréchet $L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $p \in [1,\infty[$.

Théorème 4.4. *Supposons que* (H_1) *est vérifiée. Soient $C \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ et $B \in \mathcal{B}_p(\underline{X}, \overline{X}, \underline{T}(\cdot)) \cap \mathcal{B}_p(X, \overline{X}, T(\cdot))$ avec $p \in]1,\infty[$. On suppose que*

(H_2) : *$X \subseteq D(\overline{A})$,*

(H_3) : *il existe $\lambda \in \rho(\overline{A}) \cap \rho(\underline{A})$ tel que $CR(\lambda, \overline{A})$ $(= CR(\lambda, \underline{A}))$ admet une extension par continuité à $\overline{X}$, notée par $\overline{CR(\lambda, \overline{A})} \in \mathcal{L}(\overline{X})$,*

(H_4) : *C est un o.o.a. pour $(\underline{X}, X, Y, p, T(\cdot))$ au sens de Weiss (cf. remarque 4.2, (i)).*

Alors $C(\cdot) \equiv C$ est une f.o.a. pour $(\underline{X}, X, Y, p, \phi_u)$ pour tout $u \in U^p$.

Preuve. Soient $x \in \underline{X}$ et $u \in U^p$. On pose

$$\xi(t,s) := \int_s^t \overline{T}(t-\sigma)\, u(\sigma)\, B\phi_u(\sigma,s)\, x\, d\sigma$$

pour $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$. Alors $\xi(t,s) \in \underline{X}$ et d'après la proposition 2.4, on a

$$\|\xi(t,s)\| \leq Le^{\omega(t-s)}(t-s)^{\frac{1}{q}} f_u(t-s) \sup_{s \leq r \leq t} \|\phi_u(r,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| \tag{4.3}$$

où $\omega > \sup(\omega_0(T(\cdot)), 0)$ et $L > 0$. En utilisant l'estimation (3.2), on obtient

$$\|\xi(t,s)\| \leq Le^{\omega(t-s)}(t-s)^{\frac{1}{q}} f_u(t-s)\,\sigma_u(t-s)\,\|x\| \tag{4.4}$$

où la fonction $\sigma_u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\sigma_u(r) := \sum_{n=0}^{\infty} L_0 e^{\omega r}\left(\frac{((L_0 e^{\omega r} f_u(r))^q\, r)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.5}$$

avec $q = \frac{p}{p-1}$. D'autre part, d'après (H_3), on a

$$\begin{aligned}
\int_s^t \|C\xi(r,s)\|_Y^p\, dr &= \int_s^t \left\|CR(\lambda,\overline{A})(\lambda-\overline{A})\,\xi(r,s)\right\|_Y^p dr \\
&= \int_s^t \left\|\overline{CR(\lambda,\overline{A})}(\lambda-\overline{A})\,\xi(r,s)\right\|_Y^p dr \\
&\leq const. \int_s^t \|(\lambda-\overline{A})\,\xi(r,s)\|_{\overline{X}}^p\, dr \\
&\leq const. \int_s^t \|\xi(r,s)\|_{\overline{X}_1^{A}}^p\, dr.
\end{aligned}$$

Ce qui implique, via (4.4),

$$\|C\xi(\cdot,s)\|_{L^p(s,t;Y)}^p \leq const.\left(e^{\omega(t-s)}(t-s)\, f_u(t-s)\,\sigma_u(t-s)\right)^p \|x\|,$$

car l'injection canonique $X \hookrightarrow D\left(\overline{A}\right)$ est continue (par $(\mathbf{H}_1)$ et le théorème du graphe fermé). En vertu de $(\mathbf{H}_4)$, on obtient alors

$$\begin{array}{rcl} \|C\phi_u(\cdot,s)\,x\|^p_{L^p(s,t;Y)} & \leq & const.\left(\|CT(\cdot)\,x\|^p_{L^p(0,t-s;Y)} + \|C\xi(\cdot,s)\|^p_{L^p(s,t;Y)}\right) \\ & \leq & \gamma_u(t-s)^p\,\|x\|^p \end{array}$$

où $\gamma_u(r) := const.\left(\delta(r)^p + \left(e^{\omega r} r f_u(r)\,\sigma_u(r)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\delta(\cdot)$ est la fonction donnée par le lemme 4.3. Comme γ_u est croissante, on en déduit le résultat. □

Dans certains exemples, il est difficile de vérifier $(\mathbf{H}_3)$. Alors on est amené à utiliser des résultats existant sur l'admissibilité de l'observation par rapport au semi-groupe $\overline{T}(\cdot)$, ce qui permet donc de donner une alternative assurant le résultat du théorème 4.4. Dans cette optique, on donne une condition suffisante pour que l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ soit vérifiée.

Proposition 4.5. *Supposons que* $(\mathbf{H}_1)$ *est satisfaite. Si* $C \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ *est un o.o.a. pour* $\left(\underline{X}, \overline{X}, Y, p, \overline{T}(\cdot)\right)$ *avec* $1 < p < \infty$, *alors pour tout* $\omega \geq \sup\left(\omega_0\left(\overline{T}(\cdot)\right), \omega_0\left(\underline{T}(\cdot)\right)\right)$ *il existe* $\alpha_\omega > 0$ *telle que*

$$\left\|CR\left(\lambda, \overline{A}\right)x\right\|_Y \leq \frac{\alpha_\omega}{(\lambda-\omega)^{\frac{1}{q}}}\,\|x\|_{\overline{X}}$$

pour tout $\lambda > \omega$ *et* $x \in \underline{X}$ *avec* $q = \frac{p}{p-1}$.

Notons ici, que $R\left(\lambda, \overline{A}\right)$ et $R(\lambda, \underline{A})$ existent, d'après le théorème de Hille-Yosida (cf. [13], [24]) et ils coïncident sur $\underline{X}$.

Preuve. Soient $\omega > \sup\left(\omega_0\left(\overline{T}(\cdot)\right), \omega_0\left(\underline{T}(\cdot)\right)\right)$ et $\lambda > \omega$. Alors, le semi-groupe $\overline{T}_\omega(t) := e^{-\omega t}\overline{T}(t)$ est exponentiellement stable dans $\overline{X}$ et C reste un o.o.a. pour $\left(\underline{X}, \overline{X}, Y, p, \overline{T}_\omega(\cdot)\right)$. Alors, via le lemme 4.3, il existe $c_\omega > 0$ telle que

$$\left(\int_0^\infty \left\|C\overline{T}_\omega(t)\,x\right\|^p_Y dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_\omega\,\|x\|_{\overline{X}},\ \forall x \in \underline{X}.$$

Donc, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \left\|CR\left(\lambda, \overline{A}\right)x\right\|_Y & = & \left\|C\int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{T}(t)\,x\,dt\right\|_Y \\ & = & \left\|\int_0^\infty e^{(\omega-\lambda)t}C\overline{T}_\omega(t)\,x\,dt\right\|_Y \\ & \leq & \left(\int_0^\infty \left\|C\overline{T}_\omega(t)\,x\right\|^p_Y dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty e^{q(\omega-\lambda)t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq & \frac{c_\omega}{(q(\lambda-\omega))^{\frac{1}{q}}}\,\|x\|_{\overline{X}}. \end{array}$$

D'où le résultat. □

Une conséquence directe du théorème 4.4 est le corollaire suivant.

Corollaire 4.6. *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Soient* $C \in \mathcal{L}(\underline{X}, Y)$ *et* $B \in \mathcal{B}_p\left(\underline{X}, \overline{X}, \underline{T}(\cdot)\right) \cap \mathcal{B}_p\left(X, \overline{X}, T(\cdot)\right)$. *Si* C *est un o.o.a. pour* $\left(\underline{X}, \overline{X}, Y, p, T(\cdot)\right)$ *avec* $p \in \,]1, \infty[$ *alors* $C(\cdot) \equiv C$ *est une f.o.a. pour* $(\underline{X}, X, Y, p, \phi_u)$, *pour tout* $u \in U^p$.

Dans le reste de cette section, on considère le cas général où la famille $(C(t))_{t\geq 0}$ est non autonome et qui appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\underline{X}, Y))$. On suppose que

(H_5) : la famille $(C(t))_{t\geq 0}$ est une f.o.a. pour $\left(\underline{X}, \overline{X}, Y, p, \phi_{\overline{T}}\right)$, où $\phi_{\overline{T}}(t,s) := \overline{T}(t-s)$, $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$. i.e., il existe une fonction croissante $\gamma_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$\left\|C(\cdot)\,\overline{T}(\cdot - s)\,x\right\|_{L^p(s,T;Y)} \leq \gamma_1(T-s)\,\|x\|_{\overline{X}},\ \forall x \in \underline{X} \text{ et } \forall (T,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}.$$

Alors, on a le résultat suivant qui assure, sous certaines conditions, l'admissibilité de l'observation non autonome par rapport à ϕ_u si elle l'est par rapport au semi-groupe $\overline{T}(\cdot)$.

Théorème 4.7. *Sous l'hypothèse* (H_1), *on suppose que* $D\left(\overline{A}^2\right) \subseteq \underline{X}$. *Soient* $B \in \mathcal{B}_p\left(\underline{X}, \overline{X}, \underline{T}(\cdot)\right) \cap \mathcal{B}_p\left(X, \overline{X}, T(\cdot)\right)$, *avec* $p \in]1, \infty[$, *et* $(C(t))_{t \geq 0} \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\underline{X}, Y)\right)$ *une famille qui vérifie* (H_5). *Alors,* $(C(t))_{t\geq 0}$ *est une f.o.a. pour* $(\underline{X}, X, Y, p, \phi_u)$ *pour tout* $u \in U^p$.

Preuve. Soient $x \in \underline{X}$, $u \in U^p$ et $\omega > \sup\left(\omega_0\left(\underline{T}(\cdot)\right), \omega_0\left(\overline{T}(\cdot)\right), 0\right)$. On pose

$$\xi_{\lambda,\mu}(t,s) := \lambda\mu C(t) R(\lambda, \underline{A}) R(u, \underline{A}) \int_s^t \overline{T}(t-\sigma) u(\sigma) B\phi_u(\sigma, s)\, x\, d\sigma$$

pour $(t,s) \in \Delta_{\mathbb{R}_+}$ et $\lambda, \mu \geq \omega$. Donc, par le théorème de Hille-Yosida (cf. [13], [24]), on a

$$\lim_{\mu,\lambda\to\infty} \xi_{\lambda,\mu}(t,s) = C(t) \int_s^t \overline{T}(t-\sigma) u(\sigma) B\phi_u(\sigma,s)\, x\, d\sigma. \tag{4.6}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $R(\lambda, \underline{A})$ est la restriction de $R\left(\lambda, \overline{A}\right)$ sur $\underline{X}$ et que $D\left(\overline{A}^2\right) \subseteq \underline{X}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_s^T \left\| \frac{1}{\lambda\mu} \xi_{\lambda,\mu}(t,s) \right\|^p dt = \\
&\textstyle\int_s^T \left\| \int_s^t C(t) \underline{T}(t-\sigma) u(\sigma) R\left(\lambda, \overline{A}\right) R\left(\mu, \overline{A}\right) B\phi_u(\sigma,s)\, x d\sigma \right\|^p dt \leq \\
&\qquad \textstyle const.\,(T-s)^{\frac{p}{q}} \int_s^T \int_s^t \left\| C(t) T(t-\sigma) u(\sigma) R\left(\lambda, \overline{A}\right) R\left(\mu, \overline{A}\right) B\phi_u(\sigma,s)\, x \right\|^p d\sigma dt
\end{aligned}$$

et par le théorème de Fubini, on a

$$\int_s^T \left\|\xi_{\lambda,\mu}(t,s)\right\|^p dt \leq const.\,(T-s)^{\frac{p}{q}} \int_s^T \int_\sigma^T \left\|C(t) T(t-\sigma) g_{\lambda,\mu}(\sigma,s)\right\|^p dt d\sigma,$$

où $g_{\lambda,\mu}(t,s) := \lambda\mu u(t) R\left(\lambda, \overline{A}\right) R\left(\mu, \overline{A}\right) B\phi_u(t,s)\, x$. Ce qui donne, via (H_5) et le théorème de Hille-Yosida appliqué cette fois dans $\overline{X}$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_s^T \left\|\xi_{\lambda,\mu}(t,s)\right\|^p dt &\leq \textstyle const.\,(T-s)^{\frac{p}{q}} \gamma_1(T-s)^p \int_s^T \left\|g_{\lambda,\mu}(\sigma,s)\right\|^p_{\overline{X}} d\sigma \\
&\leq \textstyle const.\,(T-s)^{\frac{p}{q}} \gamma_1(T-s)^p \int_s^T \left\|u(\sigma) B\phi_u(\sigma,s)\, x\right\|^p_{\overline{X}} d\sigma \\
&\leq const.\,(T-s)^{\frac{p}{q}} \gamma_1(T-s)^p f_u(T-s)^p \sigma_u(T-s)^p \|x\|^p,
\end{aligned}$$

où σ_u est donnée par (4.5). Ainsi, d'après (4.6), (1.3) et l'hypothèse (H_5), on obtient que

$$\left\|C(\cdot)\phi_u(\cdot,s)\, x\right\|_{L^p(s,T;Y)} \leq \theta(T-s)\|x\|,$$

avec $\theta(r) := const.\gamma_1(r)\left(1 + r^{\frac{p}{q}} f_u(r)^p \sigma_u(r)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. □

Remarque 4.8. *(i) Soient, en particulier,* $\underline{X} = X^A_\alpha$ *et* $\overline{X} = X^A_\beta$ *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, *où* X^A_γ *est l'espace de Sobolev associé à* A *si* $\gamma \in \mathbb{Z}$, *et c'est l'espace de Hölder associé à* A *si* $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *(cf. [13]). Alors, l'hypothèse* (H_1) *est satisfaite et si* $\beta \in]-\infty, -1]$ *alors,* (H_2) *l'est aussi.*
(ii) En général, $\rho\left(\overline{A}\right) \neq \rho\left(\underline{A}\right)$ *et on ne peut pas les comparer par inclusion. Toutefois, on a l'égalité dans le cas considéré dans (i) (cf. [13]) ou si* $D\left(\overline{A}\right) \subseteq \underline{X}$ *(e.g.,* $\overline{X} = X^A_\alpha$ *et* $\underline{X} = X^A_{\alpha+1}$*), (cf. [13], prop. IV.2.17). Cependant, cette dernière inclusion n'assure pas l'égalité des types* $\omega_0\left(\overline{T}(\cdot)\right)$ *et* $\omega_0\left(\underline{T}(\cdot)\right)$. *Pour avoir l'égalité de* $\omega_0\left(\overline{T}(\cdot)\right)$ *et* $\omega_0\left(\underline{T}(\cdot)\right)$, *il faut supposer, en plus de l'inclusion* $D\left(\overline{A}\right) \subseteq \underline{X}$, *que par exemple:*
(a) $\sigma\left(\underline{T}(t_0)\right) \subseteq \overline{\sigma_p\left(\underline{T}(t_0)\right)} \cup \{0\}$ *et* $\sigma\left(\overline{T}(t_1)\right) \subseteq \overline{\sigma_p\left(\overline{T}(t_1)\right)} \cup \{0\}$ *pour des réels* $t_0, t_1 > 0$, *ou que*
(b) $\underline{T}(t_0)$ *et* $\overline{T}(t_1)$ *sont auto-adjoints pour des réels* $t_0, t_1 > 0$.

Sur ce sujet, on renvoie le lecteur au travail de Curtain-Logemann-Townley-Zwart [6].
(iii) D'après le théorème 4.7, on déduit que, dans le cas où $(C(t))_{t\geq 0}$ *est autonome, le corollaire 4.6 reste vrai si on remplace* (H_2) *par l'inclusion* $D\left(\overline{A}^2\right) \subseteq \underline{X}$ *qui est aussi vérifiée par les espaces* $\underline{X}$, $\overline{X}$ *considérés dans (i).*

5. Application.

Dans cette section, on donne un exemple qui illustre notre approche théorique présentée dans la section 4, sur un système de conduction contrôlé par un opérateur non borné, avec des observations autonome et non autonome.

Exemple 5.1. *Considérons un système de conduction dont un modèle monodimensionnel simplifié est l'équation d'évolution bilinéaire suivante*

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}x(s,t) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}x(s,t) + u(t)Bx(\cdot,t)(s), & t\geq 0,\ s\in[0,1], \\ x(0,t) &= x(1,t) = 0, & t\geq 0, \\ x(s,0) &= x_0(s), & s\in[0,1], \end{cases}$$

muni de l'équation de sortie

$$(5.2) \qquad y(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}x(s,t), \quad t\geq 0,\ s\in[0,1].$$

Ici, l'opérateur d'observation $C := \frac{\partial}{\partial s}$ *représente le flux de la chaleur le long d'une barre de longueur 1. Cet opérateur est non borné puisque il n'est pas défini sur l'espace d'état* $X = \{x \in C[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$ $(=: C_{00}[0,1])$ *tout entier. On considère l'espace* $\underline{X} := C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ *muni de la norme induite de* $C^2[0,1]$ *et* B *un opérateur de contrôle borné de* X *mais à valeurs dans l'espace* $\overline{X} := L^2(0,1)$*. On montre que certains de ces opérateurs de contrôle assurent bien l'existence de la solution régulière associée à (5.1) et que l'opérateur d'observation autonome* C *est bien admissible pour le système (5.1), ce qui assure l'existence d'une fonction de sortie* $t \mapsto y(\cdot,t)$, L^p*-intégrable avec* p *bien choisi, pour toute donnée initiale* $x_0(\cdot)$ *dans l'espace d'état* $C_{00}[0,1]$.
Notre opérateur dynamique

$$\begin{aligned} A &:= \tfrac{\partial^2}{\partial s^2}, \\ D(A) &:= C^2[0,1]\cap C_{00}[0,1] \ (=\underline{X}), \end{aligned}$$

engendre le C_0*-semi-groupe de diffusion suivant*

$$T(t)x(s) := \int_0^1 g_t(s,r)\,x(r)\,dr, \quad t\geq 0,\ s\in[0,1],$$

où g_t *est la fonction de Green donnée par*

$$g_t(s,r) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left[e^{-\frac{(s-r-2k\pi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(s+r-2k\pi)^2}{4t}}\right].$$

Ainsi, on peut facilement vérifier que $T(\cdot), \underline{X}$, X *et* $\overline{X}$ *satisfont* (H_1) *et on remarque que l'opérateur* $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ *défini par*

$$\begin{aligned} \overline{A} &:= \tfrac{\partial^2}{\partial s^2} \ \text{(dérivée seconde au sens des distributions)}, \\ D(\overline{A}) &:= H^2[0,1]\cap H_0^1[0,1], \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique borné $\overline{T}(\cdot)$ *sur* $\overline{X}$ *qui prolonge le semi-groue de diffusion* $T(\cdot)$ *sur* $\overline{X}$.
Une conséquence direct du théorème 3.2 est le résultat suivant.

Proposition 5.2. *Soit $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$ avec $p \in]1, +\infty[$. Alors, pour tout opérateur $B \in \mathcal{L}(C_{00}[0,1])$ p-admissible, pour $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ et $T(\cdot)$, il existe une famille d'évolution unique ϕ_u qui donne l'unique solution régulière de (5.1) dans $C_{00}[0,1]$ (resp. $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$) si $x_0(\cdot) \in C_{00}[0,1]$ (resp. $x_0(\cdot) \in C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$).*

On s'intéresse maitenant à l'observation autonome $C \in \mathcal{L}(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], L^2(0,1))$ par rapport au système bilinéaire (5.1). On montre qu'il est admissible pour $p \in]1,2[$.

Proposition 5.3. *Soient $p \in]1,2[$ et $B \in \mathcal{L}(C_{00}[0,1], H^2[0,1] \cap H^1_0[0,1])$ un opérateur de contrôle p-admissible pour $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ et $T(\cdot)$. Alors,*

$$C \text{ est un o.o.a. pour } \left(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], C_{00}[0,1], L^2(0,1), p, \phi_u\right)$$

pour tout $u \in U^p$.

Preuve. *Comme $D(\overline{A}^2) \subseteq \underline{X}$, alors grâce à la remarque 4.8, (ii), il suffit de vérifier que C est un o.o.a. pour $\left(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], L^2(0,1), L^2(0,1), p, \overline{T}(\cdot)\right)$ pour $p \in [1,2[$. Ce qui nous permet alors de conclure via le corollaire 4.6.*
On sait que $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ engendre un semi-groupe analytique et borné $\overline{T}(\cdot)$ sur $\overline{X}$. Donc, d'après [13, thm. II.4.6], *il existe une constante $a > 0$ telle que*

$$\left\|\overline{A}\,\overline{T}(t)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} \le \frac{a}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Ainsi, par intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} \left\|C\overline{T}(t)x\right\|_{L^2} &= \int_0^1 \left|\tfrac{\partial}{\partial s}(\overline{T}(t)x)(s)\right|^2 ds \\ &= -\int_0^1 (\overline{A}\,\overline{T}(t)x)(s)\,\overline{T}(t)x(s)\,ds \\ &\le \tfrac{a}{t}\left\|\overline{T}(t)x\right\|_{L^2}\|x\|_{L^2} \\ &\le \tfrac{a'}{t}\|x\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

pour $x \in C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$, $t > 0$ et une constante $a' > 0$. Par cette majoration, on déduit alors que C est admissible pour $\left(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], L^2(0,1), L^2(0,1), p, \overline{T}(\cdot)\right)$ pour $p \in [1,2[$. Ce qui fallait démontrer. □

Dans la suite, on va considérer le système (5.1) dans l'espace d'état $X = \overline{X} = L^2(0,1)$ avec la famille d'observations non autonome suivante

$$C(t)x := x(c(t)), \quad x \in \underline{X}, \ t \ge 0,$$

où $c(\cdot)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $]0,1[$. Dans ce cas, les opérateurs $C(t)$, $t \ge 0$, sont non bornés et ils donnent des mesures de température aux points où la fonction $c(\cdot)$ prend ses valeurs. En particulier, lorsque $c(\cdot)$ est une fonction constante égale à $s_0 \in]0,1[$, alors la famille d'observations est autonome et c'est l'opérateur du Dirac δ_{s_0} au point de mesure s_0. Remarquons, d'après le théorème 3.2, que pour tout opérateur $B \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$, p-admissible pour $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ et $T(\cdot)$, il existe une famille d'évolution unique ϕ_u dans $L^2(0,1)$ et $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ qui engendre la solution régulière associée à (5.1). Le résultat suivant assure que la famille d'observation $C(\cdot)$ est admissible pour la famille d'évolution ϕ_u pour certains p.

Proposition 5.4. *Soient $p \in]1,4[$ et $B \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ un opérateur de contrôle p-admissible pour $C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1]$ et $\overline{T}(\cdot)$. Alors,*

$$C(\cdot) \text{ est une f.o.a. pour } \left(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], L^2(0,1), \mathbb{R}, p, \phi_u\right)$$

pour tout $u \in U^p$.

Preuve. *Dans* [16, prop.17], *les auteurs ont montré que $C(\cdot)$ est admissible pour*

$$\left(H^2[0,1] \cap H^1_0[0,1], L^2(0,1), \mathbb{R}, p, \phi_{\overline{T}}\right)$$

avec $p \in [1,4[$. Donc, elle l'est aussi pour $(C^2[0,1] \cap C_{00}[0,1], L^2(0,1), \mathbb{R}, p, \phi_{\overline{T}})$. Par suite, le résutat s'obtient du théorème 4.7. □

Remarque 5.5. *En particulier, si on prend $B = 0$ et $c(\cdot)$ constante (dans ce cas: $\phi_u \equiv \phi_{\overline{T}}$ et $C(\cdot) \equiv \delta_{s_0}$), ce résultat est proche de celui trouvé par Pritchard-Salamon, à savoir que l'opérateur δ_{s_0} est un o.o.a. pour $(C[0,1], L^2(0,1), \mathbb{R}, p, \overline{T}(\cdot))$ pour $p \in [1.4[$, (cf. [7], p. 216).*

References

[1] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995.

[2] B. Amir, M.Y. ElBoukfaoui, A. Idrissi and L. Maniar, *Admissibility of controle operators for bilinear systems.* Semesterbericht Funktionalanalysis, Sommersemester (1998), Tübingen.

[3] A. Benbrik, *Contrôle optimal des systèmes à paramètres répartis bilinéaires,* Doctorat, Perpignan 1987.

[4] H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North Holland 1973.

[5] P.L. Butzer and H. Berens, *Semigroups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag 1967.

[6] R.F. Curtain, H. Logemann, S. Townley and H. Zwart, *Well-posedness, stabilizability and admissibility for Pritchard Salamon systems,* J. Math. Systems, Estimation and control **7** (1997), 439 – 476.

[7] R. F. Curtain and A. J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear System Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences* **8** Springer-Verlag, 1978.

[8] ——, *An abstract theory for unbounded control action for distributed parameter systems*, SIAM J. Control and Opt. **15** (1977), 566 – 611.

[9] R. F. Curtain and G. Weiss, *Well posedness of triples of operators (in the sense of linear systems theory)*, International Series of Numerical Mathematics **91** Birkhäuser-Verlag, (1989), 41 – 58.

[10] G. Da Prato and P. Grisvard, *Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation,* J. Funct. Anal. **58**, (1984), 107 – 124.

[11] W. Desch and W. Schappacher, *Some generation results for perturbed semigroups, Semigroup Theory and Applications* (Proceedings Trieste 1987) (P. Clément, S. Invernizzi, E. Mitidieri and I.I. Vrabie, eds.), Lec. notes in pure and Appl. **116** Marcel Dekker, 1989, 125 – 152.

[12] N. ElAlami, *Analyse et commande optimale des systèmes bilinéaires distribués,* application aux procédés energétiques, Doctorat d'Etat-I.M.P. Perpignan 1986.

[13] K.J. Engel and R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,* Springer-Verlag, 1999.

[14] H.O. Fattorini, *Boundary control systems,* SIAM J. Control **6** (1968), 349 – 385.

[15] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard, *Robust stability of linear evolution operators on Banach spaces,* SIAM J. Cont. Optim. **32** (1994), 1503 – 1541.

[16] A. Idrissi and A. Rhandi, *Admissibility of time-varying observation for non-autonomous systems,* Semesterbericht Funktionalanalysis, Sommersemester (1999), Tübingen.

[17] B. Jacobe, V. Dragan and A.J. Pritchard, *Infinite dimensional time-varying systems with nonlinear output feedback,* Integr. Equat. Oper Th. **22** (1995), 440 – 462.

[18] B.V. Keulen, *$\mathcal{H}_\infty$-Control for Distributed Parameter Systems: a State-Space Approach,* Birkhäuser, 1993.

[19] J.L. Lions, *Optimal Control of Systems Gouverned by Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1971.

[20] L. Maniar and A. Rhandi, *Extrapolation and inhomogeneous retarded differential equations in infinite dimensional Banach spaces,* Rend. Circ. Mat. Palermo **47** (1998), 331 – 346.

[21] R. Nagel, *Sobolev spaces and semigroups,* Semesterberichte Funktionalanalysis, Sommersemester (1983), Tübingen.

[22] R. Nagel, G. Nickel and S. Romanelli, *Identification of extrapolation spaces for unbounded operators,* Tübinger Berichte Zur Funktionalanalysis (1995), Tübingen.

[23] R. Nagel and E. Sinestrari, *Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators,* Marcel Dekker, Lecture Notes Pure Appl. Math. **150** (1994), 51 – 70.

[24] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, 1983.

[25] A.J. Pritchard and D. Salamon, *The linear quadratic control problem for retarded systems with delays in control and observation*, IMA J. of Math. Control and Information **2** (1985), 335 – 362.

[26] D.L. Russell, *On boundary value controllability of linear symmetric hyperbolic systems*, Mathematical Theory of Control, Academic Press, New York, (1967), 312 – 321.

[27] ——, *Quadratic performance criteria in boundary control of linear symmetric hyperbolic systems*, SIAM J. Control Optim. **11** (1973), 475 – 509.

[28] J.M.A.M. van Neerven, *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators*, Lecture Notes Math. **1529** Springer-Verlag, 1992.

[29] D. Salamon, *Infinite-dimensional linear systems with unbounded control and observation: a functional analytic approach*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 383 – 431.

[30] G. Weiss, *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel J. Math. **65** (1989), 17 – 43.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES SEMLALIA, BP. 2390, 40000 MARRAKECH, MAROC.

E-mail address: `idrissi@ucam.ac.ma`