

BRAHIM HAJOUJ

Existence et unicité de solutions pour une inéquation de type hyperbolique du second ordre non linéaire

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 8, n° 1 (2001), p. 39-60

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2001__8_1_39_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Existence et unicité de solutions pour une inéquation de type hyperbolique du second ordre non linéaire

Brahim Hajouj

Résumé: On étudie l'existence et l'unicité de la solution pour une inéquation variationnelle gouvernée par l'opérateur hyperbolique défini par

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g(u)}{\partial x} - f$$

et les deux contraintes $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq 1$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$ p.p.. Deux situations sont considérées, la première lorsque la dérivée Φ' de la fonction Φ est minorée par une constante strictement positive, la seconde lorsque $\Phi' \geq 0$, l'opérateur L peut ainsi dégénérer dans toute partie du domaine où $\Phi'(u) = 0$.

Abstract: We study the existence and uniqueness of the solution of a variational inequality relative to the hyperbolic operator defined by

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g(u)}{\partial x} - f$$

and the two constraint $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq 1$ and $\frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$ a.e.. Two situations are examined, a first one when the derivative Φ' of the function Φ satisfies: $k \leq \Phi'$, where $k \in \mathbb{R}_+^*$, a second one when $\Phi' \geq 0$, in this case the operator L could degenerate in all part of domain where $\Phi'(u) = 0$.

Introduction

On s'intéresse dans ce papier aux solutions d'une inéquation variationnelle, issue de la théorie de l'elasto-plasticité non linéaire, régie par l'opérateur L et les contraintes $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq 1$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$ p.p. La non linéarité de L intervient au niveau des dérivées de u d'ordre un et deux par rapport à la variable d'espace. On distinguera deux cas selon que l'opérateur L est non dégénéré ou peut dégénérer dans toute partie du domaine où $\Phi'(u)$ s'annule.

Divers auteurs ont obtenus des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour des problèmes similaires. Nous citons par exemple les travaux de J.L. Lions [6] sur des inéquations variationnelles relative à l'opérateur $u \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + h \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$, N.A. Lar'kin [5] sur des inéquations régies par l'opérateur $u \rightarrow \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - f$ ($\varepsilon > 0$), Y-Ebihara [3], F.G. Maksudov, A.B. Aliev

and D.M. Tahirov [9] et plus récemment ceux de B. Hajouj [4] sur des inéquations gouvernées par l'opérateur $u \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[k(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \vartheta_\varepsilon \Delta u + h\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) - f$ ($\varepsilon > 0, \vartheta_\varepsilon > 0$).

Pendant, pour les inéquations ayant des non linéarités dans les termes dérivés d'ordre un et deux de u par rapport à la variable d'espace, il ne semble pas qu'un travail sur l'existence et l'unicité de la solution ait été entrepris et ce papier a pour objet de présenter et d'établir quelques résultats dans ce sens.

On désigne par Ω l'intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} , $a < b$, par $T > 0$ un réel donné et par Q le pavé ouvert $\Omega \times]0, T[$. \mathcal{K} est le convexe $\left\{ v \in H_0^1(\Omega); \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq 1 \text{ et } v \leq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$. On note (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et les produits de dualité entre les espaces $W_0^{1,q}(\Omega)$ et $W_0^{-1,q'}(\Omega)$ d'une part et les espaces $L^q(\Omega); L^q(\Omega)$ d'autre part avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Les dérivées de u , au sens des distributions vectorielles par rapport au temps t , sont représentées par u', u'', u''', \dots

On considère le problème variationnel hyperbolique P d'inconnue u :

$$P \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), u'(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. } t \in]0, T[, u'' \in L^2(Q), \\ \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \\ (u'' + \alpha u' + \frac{\partial g(u)}{\partial x} - f, v - u') + \left(\frac{\partial \Phi(u)}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(v - u') \right) \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x) \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où les données vérifient l'hypothèse:

$$H \left\{ \begin{array}{l} \Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction de classe } C^3 \text{ vérifiant: } \Phi(0) = 0 \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction de classe } C^2 \text{ vérifiant: } g(0) = 0 \\ \alpha > 0, f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ telle que } f' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

en outre, on suppose d'une part que la fonction g vérifie l'hypothèse

$$H_g \left\{ \begin{array}{l} \exists (c_0, c_1, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \text{ tel que: } |g'(v)| \leq c_0 + c_1 |v|^\mu, \forall v \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

d'autre part, que la dérivée Φ' de Φ notée φ satisfait soit à l'hypothèse

$$H_\sigma \left\{ \begin{array}{l} \exists \sigma \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(v) \geq \sigma, \forall v \in \mathbb{R}, \\ \varphi'(v) \text{ est non négative sur } \mathbb{R}, \end{array} \right. \text{ soit à l'hypothèse } H_0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi(v) \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}, \\ \varphi'(v) \text{ est non négative sur } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Le plan est le suivant:

Au paragraphe I, on établit sous la condition H_σ , un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème non dégénéré P . Sous l'hypothèse H_0 , le problème P peut dégénérer,

dans ce cas aussi, on obtient au § II, un résultat d'existence d'une solution de P . A l'aide d'une condition supplémentaire sur φ et g , on obtient l'unicité.

I- Existence et unicité de la solution pour le problème non dégénéré

Théorème 1-1: *Sous les hypothèses H , H_σ et H_g le problème P admet une unique solution u :
 $tu'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Preuve du théorème 1-1:

Existence : On utilise une méthode de pénalisation et de régularisation. On commence par régulariser le problème P . On note \mathcal{L} l'espace $\{v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) / v' \in L^\infty(Q)\}$, ρ un réel positif, $\eta > 0$ destiné à tendre vers 0_+ et A un opérateur de régularisation tels que:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \max(3, \mu) < \frac{\rho}{2} \quad (\mu \text{ est défini dans l'hypothèse } H_g), \\ \forall v \in \mathcal{L}; A(v) = (\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial x})^2 v' + |v'|^\rho v', \end{cases}$$

puis, pour tout $\eta > 0$, on considère le problème P_η régularisé de P , d'inconnue u_η suivant

$$P_\eta \left\{ \begin{array}{l} (1.2) \quad \begin{cases} u_\eta \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u'_\eta \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u'_\eta(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ u''_\eta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \\ (u''_\eta + \alpha u'_\eta + \eta A(u_\eta) + \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} - f; v - u'_\eta) + (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(v - u'_\eta)) \geq 0, \\ u_\eta(x, 0) = u_0(x), \quad u'_\eta(x, 0) = u_1(x) \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases} \end{array} \right.$$

L'étude du problème P_η , se fait à l'aide de la méthode classique de pénalisation (cf. J.L. Lions [6]). On considère les opérateurs standard de pénalisation B_1 et B_2 associés respectivement aux convexes $\mathcal{K}_1 = \{v \in H_0^1(\Omega); \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq 1 \text{ p.p. sur } \Omega\}$ et $\mathcal{K}_2 = \{v \in H_0^1(\Omega); v \leq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}$. B_1 est défini comme suit: Soit $W = W_0^{1,4}(\Omega)$ (W est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ avec injection continue de W dans $H_0^1(\Omega)$) et \mathcal{K}_1 est un convexe fermé dans W et dans $H_0^1(\Omega)$; alors B_1 est l'opérateur de W vers W' tel que::

$$\forall u \in W, \forall v \in W, (B_1(u), v) = \int_{\Omega} (1 - (\frac{\partial u}{\partial x})^2)^- \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \text{ où } (1 - (\frac{\partial u}{\partial x})^2)^- = \max(0, (\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 1).$$

De même B_2 est défini de $W \rightarrow W'$ par $B_2(v) = v^+ = \max(v, 0)$.

On note que:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_1 = \{w \in W; B_1(w) = 0\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{w \in W; B_2(w) = 0\}, \\ \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2, \end{cases}$$

et que B_1 et B_2 sont en particulier monotones et hémicontinus.

Soient $\delta > 0$ et $\zeta > 0$ deux paramètres destinés à tendre vers 0_+ . On considère pour tout $\delta > 0$, $\zeta > 0$ et $\eta > 0$, le problème pénalisé $P_{\eta, \zeta, \delta}$ associé à P_η , d'inconnue $w_{\zeta, \delta}$ suivant:

$$P_{\eta, \zeta, \delta} \left\{ \begin{array}{l} (1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{\zeta, \delta} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad w'_{\zeta, \delta} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0, T; W_0^{1,4}(\Omega)), \\ w''_{\zeta, \delta} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{p.p. } t \in]0, T[, \\ w''_{\zeta, \delta} - \Delta \Phi(w_{\zeta, \delta}) + \alpha w'_{\zeta, \delta} + \frac{\partial g(w_{\zeta, \delta})}{\partial x} + \eta A(w_{\zeta, \delta}) + \frac{1}{\delta} B_1(w'_{\zeta, \delta}) \\ + \frac{1}{\zeta} B_2(w'_{\zeta, \delta}) = f \text{ dans } D'(\Omega), \end{array} \right. \\ w_{\zeta, \delta}(x, 0) = u_0(x), \quad w'_{\zeta, \delta}(x, 0) = u_1(x) \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On commence par montrer au § I-1, l'existence d'une solution unique $w_{\zeta, \delta}$ de $P_{\eta, \zeta, \delta}$ puis, on établit des estimations a priori sur $w_{\zeta, \delta}$ qui vont nous permettre au § I-2 de passer à la limite en δ et ζ et d'établir l'existence d'une solution u_η du problème P_η . Enfin, au § I-3, on établit la convergence de la suite $(u_\eta)_\eta$ vers l'unique solution u du problème P .

I-1) Existence et unicité de la solution de $P_{\eta, \zeta, \delta}$:

Lemme 1-2 : *Sous les hypothèses du théorème 1-1 et pour chaque $\delta \in]0, 1[$, $\zeta \in]0, 1[$ et $\eta \in]0, 1[$, $P_{\eta, \zeta, \delta}$ admet une unique solution notée $w_{\zeta, \delta}$, telle que: $w_{\zeta, \delta} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$.*

Preuve du lemme 1-2 : On utilise une méthode de Galerkin. On considère l'espace

$V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ la base spéciale de V constituée des vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$ ($-\Delta v_n = \pi_n v_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n \in \mathbb{R}$) et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $V_m = [\{v_n\}_{n=1}^{n=m}]$. On introduit le problème approché P_m

$$P_m \left\{ \begin{array}{l} (1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_m \in V_m \text{ telle que : } \forall p = 1, \dots, m \\ \left\{ \begin{array}{l} (u''_m, v_p) + \left(\frac{\partial \Phi(u_m)}{\partial x}, \frac{\partial v_p}{\partial x} \right) + \alpha (u'_m, v_p) + \left(\frac{\partial g(u_m)}{\partial x}, v_p \right) + \eta (A(u_m), v_p) \\ + \frac{1}{\delta} (B_1(u'_m), v_p) + \frac{1}{\zeta} (B_2(u'_m), v_p) = (f, v_p), \\ u_m(x, 0) = u_{0,m}(x), \quad u'_m(x, 0) = u_{1,m}(x), \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où on a choisi $u_{0,m} = \sum_{p=1}^{p=m} \alpha_p v_p$ et $u_{1,m} = \sum_{p=1}^{p=m} \beta_p v_p \in V_m \cap \mathcal{K}$ telles que: $u_{0,m} \rightarrow u_0$ dans V et $u_{1,m} \rightarrow u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On établit à l'aide de la théorie des systèmes différentiels que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P_m admet une solution unique u_m telle que: $u_m \in C^3([0, T]; V)$.

On commence par établir des estimations a priori sur u_m , qui vont nous permettre de passer à la limite sur m et d'établir l'existence d'une solution $w_{\zeta,\delta}$ de $P_{\eta,\zeta,\delta}$, après, on montre l'unicité de la solution $w_{\zeta,\delta}$.

I-1-1) Estimations a priori sur u_m

Dans ce paragraphe, on cherche à établir des estimations a priori sur u_m indépendantes non seulement du paramètre m mais aussi des trois paramètres m, δ et ζ afin, d'étudier au § I-2 le comportement quand $\delta \rightarrow 0_+$ et $\zeta \rightarrow 0_+$ des solutions $(w_{\zeta,\delta})_{\zeta,\delta}$ de $(P_{\eta,\zeta,\delta})_{\zeta,\delta}$. On convient, dans toute la suite de ce paragraphe, de noter C toute constante positive indépendante de m, δ et ζ .

Lemme 1-3 : *Sous les hypothèses du théorème 1-1, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\zeta \in]0, 1[$ et $\delta \in]0, 1[$*

- i) $\|u_m\|_{L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega))} + \|u'_m\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C,$ ii) $\left\| \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C,$
- iii) $\|u''_m\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))} + \|u'_m\|_{L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega))} \leq C,$
- iv) $\|\Delta u_m\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))} \leq C.$

Preuve du lemme 1-3 : On considère la décomposition de u_m dans V_m , $u_m = \sum_{p=1}^{p=m} h_{p,m}(t)v_p$.

i) On multiplie l'égalité (1.5) par $h'_{p,m}(t)$ ($p = 1, \dots, m$). On ajoute les m égalités obtenues, puis on intègre de 0 à t . A l'aide de deux intégrations par parties, on obtient:

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u_m)} \frac{\partial u_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \eta \int_0^t (A(u_m), u'_m) d\tau \\
 & + \frac{1}{\delta} \int_0^t \int_\Omega (1 - (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2) - (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2 dx d\tau + \frac{1}{\zeta} \int_0^t (B_2(u'_m), u'_m) d\tau = \int_0^t (f, u'_m) d\tau + \frac{1}{2} \|u_{1,m}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u_{0,m})} \frac{\partial u_{0,m}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \varphi'(u_m) u'_m (\frac{\partial u_m}{\partial x})^2 dx d\tau - \int_0^t (g'(u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x}, u'_m) d\tau.
 \end{aligned}$$

Les propriétés sur la suite $u_{0,m}$, l'inégalité $|g'(u_m)| \leq c_0 + c_1 |u_m|^\mu$ donné par l'hypothèse H_g , l'inégalité de Hölder-Young relative au couple $(2, 2)$ et à $(\frac{2(\rho+2)}{\rho-2\mu}, \frac{\rho+2}{\mu}, 2, \rho+2)$ appliquée successivement aux produits $[\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}] \frac{\partial u_m}{\partial x}$ et $c_1 |u_m|^\mu |\frac{\partial u_m}{\partial x}| |u'_m|$ entraînent:

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le second membre de (1.6) est majoré par:} \\ C + C \int_0^t \|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\eta}{2} \int_0^t (A(u_m), u'_m) d\tau. \end{array} \right.$$

L'estimation i) résulte de (1.6) grâce à la minoration de $\varphi(u_m)$ par $\sigma > 0$, à (1.7), à la définition de l'opérateur A donnée par (1.1), à la monotonie de B_1 et B_2 , au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré .

ii) On déduit de (1.6) grâce à l'estimation i) précédente la majoration

$$\frac{1}{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} \left(1 - \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2 dx d\tau \leq C,$$

d'où l'estimation ii).

iii) On dérive l'égalité (1.5) par rapport à t , puis, on multiplie par $h''_{p,m}(t)$ ($p = 1, \dots, m$). On ajoute les m égalités obtenues et on intègre de 0 à t . Après une intégration par parties par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} (1.8) \quad & \frac{1}{2} \|u''_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left(\varphi(u_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x} + \varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}\right) d\tau + \alpha \int_0^t \|u''_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ & + \eta \int_0^t \left((A(u_m))', u''_m\right) d\tau + \frac{1}{\delta} \int_0^t \left(\left[1 - \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)', \frac{\partial u''_m}{\partial x}\right) d\tau + \frac{1}{\zeta} \int_0^t \left([B_2(u'_m)]', u''_m\right) d\tau \\ & = \int_0^t (f', u''_m) d\tau - \int_0^t \left(g''(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + g'(u_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x}, u''_m\right) d\tau + \frac{1}{2} \|u''_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Etude de l'égalité (1.8).

a) Minoration de $\int_0^t \left(\varphi(u_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}\right) d\tau$: On obtient, après une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\varphi(u_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}\right) d\tau &= \frac{1}{2} \left\| \left(\sqrt{\varphi(u_m)} \frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u_{0,m})} \frac{\partial u_{1,m}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \int_0^t \left(\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u'_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}\right) d\tau. \end{aligned}$$

L'inclusion algébrique et topologique $H_0^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ et l'estimation i) précédente impliquent que u_m est bornée dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de m , ζ et δ . Il en résulte grâce à la régularité sur φ , à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit $u'_m \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)^2$ et aux estimations i) et ii) précédentes, la minoration:

$$\int_0^t \left(\varphi(u_m) \frac{\partial u'_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}\right) d\tau \geq \frac{1}{2} \left\| \left(\sqrt{\varphi(u_m)} \frac{\partial u'_m}{\partial x}\right)(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C$$

b) Majoration du terme $\int_0^t (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}) d\tau$: En effet, une intégration par parties

conduit à

$$\int_0^t (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}) d\tau = (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) - (\varphi'(u_{0,m}) u_{1,m} \frac{\partial u_{0,m}}{\partial x}, \frac{\partial u_{1,m}}{\partial x}) - \int_0^t (\varphi''(u_m) u''_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} \varphi'(u_m) u'_m (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2 dx d\tau - \int_0^t (\varphi'(u_m) u''_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) d\tau.$$

l'inégalité de Hölder-Young relative à (4, 4, 2,) appliquée au produit $u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x}$ implique

$$\left| (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) \right| \leq C \|u'_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + C \left\| \frac{\partial u_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{\sigma}{4} \left\| \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

de plus, on remarque que $\|u'_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 - \|u_{1,m}\|_{L^4(\Omega)}^4 = 4 \int_0^t \int_{\Omega} u_m^3 u''_m dx d\tau$, il résulte de l'inégalité

de Hölder-Young relative à $(2, \rho, \frac{2\rho}{\rho-2})$ appliquée au produit $|u_m^3 u''_m| = u_m^2 [|u'_m| |u''_m|^{\frac{2}{\rho}}] |u''_m|^{\frac{\rho-2}{\rho}}$ et des estimations i) et ii), la majoration:

$$\left| (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) \right| \leq C + \frac{\eta(\rho+1)}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |u'_m|^{\rho} u''_m{}^2 dx d\tau + C \int_0^t \|u''_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\sigma}{4} \left\| \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'autre part, on applique l'inégalité de Hölder relative à (2, 4, 4), (2, 4, 4) et à (2, 2) successivement aux produits $u_m^2 (\frac{\partial u_m}{\partial x}) \frac{\partial u'_m}{\partial x}$, $u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x}$ et $u'_m (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2$, puis, on utilise les estimations i) et ii) et la régularité sur la fonction φ , on obtient

$$\left| \int_0^t (\varphi''(u_m) u''_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \varphi'(u_m) u'_m (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2 dx d\tau + \int_0^t (\varphi'(u_m) u''_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x}) d\tau \right| \leq C + C \int_0^t \|u''_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

d'où la majoration

$$\left| \int_0^t (\varphi'(u_m) u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u''_m}{\partial x}) d\tau \right| \leq C + C \int_0^t \|u''_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \frac{\eta(\rho+1)}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |u'_m|^{\rho} u''_m{}^2 dx d\tau + \frac{\sigma}{4} \left\| \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

c) Minoration du terme $\eta \int_0^t ((A(u_m))', u''_m) d\tau$: En effet,

$$\begin{aligned} \eta \int_0^t ((A(u_m))', u_m'') d\tau &= 2\eta \int_0^t (\varphi'(u_m)\varphi''(u_m)(u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x})^2, u_m'') d\tau + \eta \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi'(u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x} u_m'')^2 dx d\tau \\ &\quad + 2\eta \int_0^t ((\varphi'(u_m))^2 u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u_m'}{\partial x}, u_m'') d\tau + \eta(\rho+1) \int_0^t \int_{\Omega} |u_m'|^\rho u_m''^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

La régularité sur φ , l'inégalité de Hölder-Young relative à $(2, 4, 4)$ appliquée successivement aux produits $[\varphi'(u_m)u_m'' \frac{\partial u_m}{\partial x}] (u_m')^2 \frac{\partial u_m}{\partial x}$ et $[\varphi'(u_m)u_m'' \frac{\partial u_m}{\partial x}] (u_m') \frac{\partial u_m'}{\partial x}$, la relation $8 \leq \rho + 2$ qui résulte de la condition (1.1) et enfin les estimations i) et ii) précédentes conduisent à

$$\begin{aligned} \left| 2\eta \int_0^t (\varphi'(u_m)\varphi''(u_m)(u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x})^2, u_m'') d\tau + 2\eta \int_0^t ((\varphi'(u_m))^2 u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u_m'}{\partial x}, u_m'') d\tau \right| \\ \leq C + \frac{\eta}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi'(u_m)u_m'' \frac{\partial u_m}{\partial x})^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

d'où la minoration

$$\eta \int_0^t ((A(u_m))', u_m'') d\tau \geq \frac{\eta}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (\varphi'(u_m)u_m'' \frac{\partial u_m}{\partial x})^2 dx d\tau + \eta(\rho+1) \int_0^t \int_{\Omega} |u_m'|^\rho u_m''^2 dx d\tau - C.$$

d) L'inégalité de Hölder relative à $(4, 4, 2)$ appliquée au produit $u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x} u_m''$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la C^2 -régularité sur g et les estimations i) et ii) entraînent

$$\left| \int_0^t (f', u_m'') d\tau - \int_0^t (g'(u_m)u_m' \frac{\partial u_m}{\partial x} + g'(u_m) \frac{\partial u_m'}{\partial x}, u_m'') d\tau \right| \leq C + C \int_0^t \|u_m''\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$$

e) Enfin, un calcul simple conduit à

$$\frac{1}{\delta} \int_0^t \left(\left[\left(1 - \left(\frac{\partial u_m'}{\partial x}\right)^2\right) - \frac{\partial u_m'}{\partial x} \right]', \frac{\partial u_m''}{\partial x} \right) d\tau + \frac{1}{\zeta} \int_0^t ([B_2(u_m')]', u_m'') d\tau \geq 0,$$

puis la propriété $B_1(u_{1,m}) = B_2(u_{1,m}) = 0$ qui résulte de (1.3) et de $u_{1,m} \in \mathcal{K}$ entraîne

$$\frac{1}{2} \|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

L'estimation iii) découle ainsi de (1.8) grâce aux points a), ..., e), à la minoration de $\varphi(u_m)$ par $\sigma > 0$, au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré.

iv) On multiplie l'équation (1.5) par $\pi_p h'_{p,m}(t)$, ($p = 1, \dots, m$) puis on ajoute les m égalités obtenues et on intègre de 0 à t . Il vient après utilisation de la formule de Green et une intégration par parties par rapport à t :

$$\begin{aligned}
 (1.9) \quad & \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\Delta \Phi(u_m), \Delta u'_m) d\tau + \alpha \int_0^t \left\| \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - \int_0^t \left(\frac{\partial g(u_m)}{\partial x}, \Delta u'_m \right) d\tau \\
 & - \eta \int_0^t (A(u_m), \Delta u'_m) d\tau - \frac{1}{\zeta} \int_0^t \int_{\Omega} \left(1 - \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{\partial u'_m}{\partial x} \frac{\partial \Delta u'_m}{\partial x} dx d\tau + \frac{1}{\zeta} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x} [B_2(u'_m)], \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right) d\tau \\
 & = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right) d\tau + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_{1,m}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Etude de l'égalité (1.9).

a) Minoration du terme $\int_0^t (\Delta \Phi(u_m), \Delta u'_m) d\tau$: A l'aide d'une intégration par parties par rapport à t et de la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^t (\Delta \Phi(u_m), \Delta u'_m) d\tau &= \int_0^t (\varphi(u_m) \Delta u_m + \varphi'(u_m) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2, \Delta u'_m) d\tau = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u_m)} \Delta u_m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &- \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u_{0,m})} \Delta u_{0,m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi'(u_m) u'_m (\Delta u_m)^2 dx d\tau \\
 &- \int_0^t \int_{\Omega} \left[\varphi''(u_m) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^3 + 2\varphi'(u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x} \Delta u_m \right] \frac{\partial u'_m}{\partial x} dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Puisque u_m et u'_m sont bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de m , ζ et δ , alors, la C^2 -régularité sur φ , l'inégalité de Hölder relative à $(\frac{4}{3}, 4)$ (resp. $(4, 2, 4)$) appliquée au produit $(\frac{\partial u_m}{\partial x})^3 \frac{\partial u'_m}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u_m}{\partial x} \Delta u_m \frac{\partial u'_m}{\partial x}$) et l'estimation ii) conduisent à la minoration

$$\int_0^t (\Delta \Phi(u_m), \Delta u'_m) d\tau \geq \frac{1}{2} \left\| (\sqrt{\varphi(u_m)} \Delta u_m)(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C.$$

b) La formule de Green, la C^2 -régularité sur g , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations i) et iii) entraînent

$$\left| \int_0^t \left(\frac{\partial g(u_m)}{\partial x}, \Delta u'_m \right) d\tau \right| \leq C + C \int_0^t \|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

c) Majoration du terme $-\eta \int_0^t (A(u_m), \Delta u'_m) d\tau$: La formule de Green, entraîne

$$\begin{aligned}
 -\eta \int_0^t (A(u_m), \Delta u'_m) d\tau &= \eta(\rho + 1) \int_0^t \int_{\Omega} |u'_m|^\rho \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x} \right)^2 dx d\tau + \eta \int_0^t \int_{\Omega} \left[\varphi'(u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right]^2 dx d\tau \\
 &+ 2\eta \int_0^t \left(\varphi'(u_m) \varphi''(u_m) u'_m \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^3, \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right) d\tau + 2\eta \int_0^t \left((\varphi'(u_m))^2 u'_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \Delta u_m, \frac{\partial u'_m}{\partial x} \right) d\tau.
 \end{aligned}$$

Puisque u_m et u'_m sont bornées dans $L^\infty(Q)$, alors, la C^2 -régularité sur φ , l'inégalité de Hölder relative à $(\frac{4}{3}, 4)$ (resp. $(4, 2, 4)$) appliquée au produit $(\frac{\partial u_m}{\partial x})^3 \frac{\partial u'_m}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u_m}{\partial x} \Delta u_m \frac{\partial u'_m}{\partial x}$) et l'estimation ii) conduisent à la minoration

$$-\eta \int_0^t (A(u_m), \Delta u'_m) d\tau \geq -C - C \int_0^t \|\Delta u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$$

d) Enfin, un calcul simple montre que

$$-\frac{1}{\delta} \int_0^t \int_\Omega (1 - (\frac{\partial u'_m}{\partial x})^2) - \frac{\partial u'_m}{\partial x} \frac{\partial \Delta u'_m}{\partial x} dx d\tau + \frac{1}{\zeta} \int_0^t (\frac{\partial}{\partial x} [B_2(u'_m)], \frac{\partial u'_m}{\partial x}) d\tau \geq 0.$$

L'estimation iv) résulte alors de (1.9) grâce aux propriétés a), ..., d), à la minoration de $\varphi(u_m)$ par $\sigma > 0$, au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré. Ce qui achève la preuve du lemme 1-3. ■

I-1-2) Passage à la limite sur m et existence d'une solution de $P_{\zeta, \delta}$:

Convergence faible : On déduit du lemme 1-3, l'existence d'une sous-suite extraite de $(u_m)_m$ notée encore $(u_m)_m$ et une fonction $w_{\zeta, \delta}$ telles que:

$$(1.10) \quad \begin{cases} u_m \rightharpoonup w_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ faible*}, \\ u'_m \rightharpoonup w'_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible*}, \\ u''_m \rightharpoonup w''_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible*}, \\ \frac{\partial u'_m}{\partial x} \rightharpoonup \frac{\partial w'_{\zeta, \delta}}{\partial x} & \text{dans } L^4(Q) \text{ faible.} \end{cases}$$

Condition initiale satisfaite par $w_{\zeta, \delta}$: Grâce à (1.10) et à l'injection continue de l'espace $\{v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) : v' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))\}$ muni de la norme du graphe dans $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ on obtient:

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], u_m(t) \rightharpoonup w_{\zeta, \delta}(t) & \text{faible dans } H_0^1(\Omega) \\ \forall t \in [0, T], u'_m(t) \rightharpoonup w'_{\zeta, \delta}(t) & \text{faible dans } H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

d'où les égalités:

$$(1.11) \quad \begin{cases} w_{\zeta, \delta}(x, 0) = u_0(x), & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ w'_{\zeta, \delta}(x, 0) = u_1(x), & \text{p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Convergence forte : L'injection de $\{v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) : v' \in L^2(Q)\}$ (resp. $\{v \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) : v' \in L^2(Q)\}$) muni de la norme du graphe dans $L^2(0, T; C(\bar{\Omega}))$ (resp.

$L^2(0, T; C^1(\bar{\Omega}))$) est compacte (cf. J.L. Lions [6], chap.1, §.5). On déduit donc des résultats (1.10) les propriétés de convergence forte:

$$(1.12) \quad \begin{cases} u_m \rightarrow w_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^2(0, T; C^1(\bar{\Omega})), \\ u'_m \rightarrow w'_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^2(0, T; C(\bar{\Omega})). \end{cases}$$

En observant que les fonctions φ , φ' et g' sont de classe C^1 donc lipshitzziennes sur tout borné de \mathbb{R} d'une part, et en extrayant d'autre part, une nouvelle sous suite notée encore $(u_m)_m$, en utilisant la continuité des fonctions φ , φ' et g' et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient

$$(1.13) \quad \begin{cases} u_m \rightarrow w_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^2(0, T; C^1(\bar{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \forall q \in [1, \infty[, \\ u'_m \rightarrow w'_{\zeta, \delta} & \text{dans } L^2(0, T; C(\bar{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q), \forall q \in [1, \infty[, \\ \frac{\partial u_m}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial w_{\zeta, \delta}}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(u_m)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \Phi(w_{\zeta, \delta})}{\partial x}, \frac{\partial g(u_m)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial g(w_{\zeta, \delta})}{\partial x} & \text{et} \\ A(u_m) \rightarrow A(w_{\zeta, \delta}) & \text{dans } L^q(Q), \forall q \in [1, \infty[. \end{cases}$$

D'autre part, puisque l'opérateur B_1 (resp. B_2) : $W_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow W^{-1,4}(\Omega)$ est monotone et hémicontinu et comme grâce à (1.10) u'_m converge dans $L^4(0, T; W_0^{1,4}(\Omega))$ faible vers $w'_{\zeta, \delta}$, alors

$$(1.14) \quad \begin{cases} B_1(u'_m) \rightarrow B_1(w'_{\zeta, \delta}) & \text{faiblement dans } L^{3/4}(0, T; W^{-1,4}(\Omega)), \\ B_2(u'_m) \rightarrow B_2(w'_{\zeta, \delta}) & \text{faiblement dans } L^{3/4}(0, T; W^{-1,4}(\Omega)). \end{cases}$$

Maintenant, on peut passer à la limite en m dans l'égalité (1.5). En effet, soient $\Psi \in W_0^{1,4}(\Omega)$ et $(\Psi_p)_p$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telles que $\Psi_p \rightarrow \Psi$ dans $W_0^{1,4}(\Omega)$ et $\Psi_p \in V_p$. Soit $m > p$, on choisit dans (1.5) $v_p = \Psi_p$. Dans l'égalité obtenue et grâce aux propriétés (1.10), (1.12),..., (1.14), on tend $m \rightarrow \infty$ puis $p \rightarrow \infty$, il vient:

$$(1.15) \quad (w'_{\zeta, \delta}, \Psi) + \left(\frac{\partial \Phi(w_{\zeta, \delta})}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + (\eta A(w_{\zeta, \delta}) + \alpha w'_{\zeta, \delta} + \frac{\partial g(w_{\zeta, \delta})}{\partial x}, \Psi) + \frac{1}{\delta} (B(w'_{\zeta, \delta}), \Psi) + \frac{1}{\zeta} (B_2(w'_{\zeta, \delta}), \Psi) = (f, \Psi).$$

On vient de montrer que $w_{\zeta, \delta}$ est une solution du problème $P_{\eta, \zeta, \delta}$.

I-1-3) Unicité de la solution de $P_{\eta, \zeta, \delta}$:

Pour simplifier les calculs on note $w = w_{\zeta, \delta}$ cette solution de $P_{\eta, \zeta, \delta}$ obtenue au paragraphe précédent. Soit u une autre solution de $P_{\eta, \zeta, \delta}$ vérifiant (1.15). Grâce à la monotonie des opérateurs B_1 et B_2 , la différence $s = u - w$ vérifie

$$(1.16) \quad \frac{1}{2} \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau + \eta \int_0^t (A(u) - A(w), s') d\tau \\ + \alpha \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \int_0^t (\frac{\partial(g(u) - g(w))}{\partial x}, s') d\tau \leq 0.$$

Etude de l'inégalité (1.16).

a) Minoration du terme $\int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau$: Une transformation simple, deux intégrations par parties et l'égalité $\frac{\partial s(x,0)}{\partial x} = 0$ impliquent

$$\int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi'(u) u' (\frac{\partial s}{\partial x})^2 dx d\tau \\ + ([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) - \int_0^t ([\varphi'(u) - \varphi'(w)] u' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau - \int_0^t (\varphi'(w) s' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau \\ - \int_0^t ([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w'}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau.$$

On déduit d'abord, du théorème de la valeur moyenne et la C^2 -régularité sur φ les inégalités

$$|\varphi(u) - \varphi(w)| \leq C |s|, \quad |\varphi'(u) - \varphi'(w)| \leq C |s|,$$

d'autre part, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, les appartenances $u' \in L^\infty(Q)$, $\frac{\partial w}{\partial x} \in L^\infty(Q)$, $\frac{\partial w'}{\partial x} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, la formule de Poincaré et l'inégalité $\|s(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq t \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$

entraînent la minoration:

$$\int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau \geq \\ \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\sigma}{4} \left\| \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \left\| \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

b) La monotonie de l'application $v \rightarrow |v|^\rho v$, les appartenances de $w', g'(u), \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial x}$ à $L^\infty(Q)$, le théorème de la valeur moyenne et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent la minoration

$$\eta \int_0^t (A(u) - A(w), s') d\tau + \int_0^t (\frac{\partial(g(u) - g(w))}{\partial x}, s') d\tau \geq -C \int_0^t \left\| \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Il résulte de (1.16) grâce aux points a) et b), à la minoration de $\varphi(u)$ par $\sigma > 0$, au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré que $u = w$ sur Q . Ce qui achève la preuve du lemme 1-2. ■

I-2) Passage à la limite en δ et ζ et existence d'une solution de P_η :

On procède de la manière suivante. On fixe ζ dans l'équation (1.4) puis on passe à la limite en δ . Après, dans l'inégalité obtenue, on passe à la limite en ζ .

a) *Passage à la limite en δ dans l'équation (1.4)*: On fixe ζ dans $]0, 1[$. On déduit du lemme 1-3 et de (1.10) que les suites $(w_{\zeta,\delta})_{\delta>0}$, $(w'_{\zeta,\delta})_{\delta>0}$ et $(w''_{\zeta,\delta})_{\delta>0}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, d'où l'existence d'une sous-suite extraite de $(w_{\zeta,\delta})_{\delta>0}$ notée encore $(w_{\zeta,\delta})_{\delta>0}$ et d'une fonction w_ζ telles que:

$$(1.17) \quad \begin{cases} w_{\zeta,\delta} \rightharpoonup w_\zeta & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ faible*}, \\ w'_{\zeta,\delta} \rightharpoonup w'_\zeta & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible*}, \\ w''_{\zeta,\delta} \rightharpoonup w''_\zeta & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible*}. \end{cases}$$

Ces propriétés de convergence faible (1.17) entraînent d'une part, les conditions initiales $w_\zeta(x, 0) = u_0(x)$ et $w'_\zeta(x, 0) = u_1(x)$ p.p. $x \in \Omega$, d'autre part, grâce aux résultats de compacité classiques (cf. § I-1-2), des propriétés des convergence forte qui sont suffisantes pour passer à la limite dans les termes non linéaires de l'égalité (1.4).

On remarque de plus que l'égalité provenant de (1.4)

$$B_1(w'_{\zeta,\delta}) = \delta \left[f - w''_{\zeta,\delta} + \Delta\Phi(w_{\zeta,\delta}) - \alpha w'_{\zeta,\delta} - \frac{\partial g(w_{\zeta,\delta})}{\partial x} - \eta A(w_{\zeta,\delta}) - \frac{1}{\zeta} B_2(w'_{\zeta,\delta}) \right],$$

entraîne

$$\|B_1(w'_{\zeta,\delta})\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C\delta,$$

où $C > 0$, est une constante indépendante de δ , et par conséquent, grâce aux propriétés de l'opérateur B_1 , on a: $w'_\zeta(t) \in \mathcal{K}_1$, p.p. $t \in]0, T[$.

On considère maintenant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ des deux membres de (1.4) avec $v - w'_{\zeta,\delta}$ où v est quelconque dans \mathcal{K} , puis, on utilise la monotonie de l'opérateur B_1 et l'égalité $B_1(v) = 0$ qui résulte de (1.3), enfin, on passe à la limite en $\delta \rightarrow 0_+$. On obtient que w_ζ vérifie l'inéquation

$$(1.18) \quad \begin{cases} \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \\ (w'_\zeta + \alpha w'_\zeta + \eta A(w_\zeta) + \frac{\partial g(w_\zeta)}{\partial x} + \frac{1}{\zeta} B_2(w'_\zeta) - f, v - w'_\zeta) + \left(\frac{\partial \Phi(w_\zeta)}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(v - w'_\zeta) \right) \geq 0. \end{cases}$$

b) *Passage à la limite en ζ dans (1.18)*: On déduit du lemme 1-3, des propriétés (1.10), (1.17), de la propriété $w'_\zeta(t) \in \mathcal{K}_1$ p.p. $t \in]0, T[$ et que \mathcal{K}_1 est fermé dans $H_0^1(\Omega)$, l'existence d'une sous-suite extraite de $(w_\zeta)_{\zeta>0}$ notée encore $(w_\zeta)_{\zeta>0}$ et une fonction u_η tel que

$$(1.19) \quad \begin{cases} w_\zeta \rightharpoonup u_\eta & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ faible*}, \\ w'_\zeta \rightharpoonup u'_\eta & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible* et } u'_\eta(t) \in \mathcal{K}_1, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \\ w''_\zeta \rightharpoonup u''_\eta & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible*}, \end{cases}$$

de plus, on choisit $v = 0$ dans (1.18) et on remarque que $(B_2(w'_\zeta), w'_\zeta) = \|B_2(w'_\zeta)\|_{L^2(\Omega)}^2$, il en résulte grâce à la propriété $w'_\zeta(t) \in \mathcal{K}_1$ p.p. $t \in]0, T[$, la majoration:

$$(1.20) \quad \|B_2(w'_\zeta)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C\zeta, \text{ où } C > 0 \text{ est une constante indépendante de } \zeta.$$

On déduit de (1.20) grâce aux propriétés de l'opérateur B_2 , que $u'_\eta(t) \in \mathcal{K}_2$, p.p. $t \in]0, T[$. Il résulte donc de (1.19), la propriété: $u'_\eta(t) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$, p.p. $t \in]0, T[$.

Maintenant, on considère l'inéquation (1.18), puis, on tend $\zeta \rightarrow 0_+$, il résulte de la monotonie de B_2 et l'égalité $B_2(v) = 0$ qui découle de (1.3), que u_η vérifie l'inéquation (1.2). Les conditions initiales et l'unicité sont obtenues comme aux § I-1-2 et § I-1-3. On obtient donc que le problème P_η admet une solution unique u_η .

I-3) Passage à la limite en η et existence d'une solution de P

I-3-1) Estimations a priori sur u_η

Il résulte du § I-2, que pour chaque $\eta > 0$, le problème P_η admet une solution unique u_η telle que $u'_\eta(t) \in \mathcal{K}$, p.p. $t \in]0, T[$; et par conséquent, les suites $(u_\eta)_{\eta>0}$ et $(u'_\eta)_{\eta>0}$ sont bornées dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ indépendamment de η . On complète ces résultats par les estimations suivantes sur u''_η :

Lemme 1-4: Pour chaque $\eta \in]0, 1[$, la solution u_η du problème P_η est telle que:

$$\begin{aligned} i) \quad & \|u''_\eta\|_{L^2(Q)} \leq C, \\ ii) \quad & \|\sqrt{t}u''_\eta\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C, \end{aligned}$$

où $C > 0$, est une constante indépendante de $\eta \in]0, 1[$.

Preuve du lemme 1-4 : On utilise une méthode de quotients différentiels.

i) Soit ϖ_0 un réel tel que $0 < \varpi_0 < T$. On considère l'inéquation (1.2) satisfaite par u_η pour p.p. $t \in]\varpi_0, T[$, puis, on choisit $v = u'_\eta(\tau - \varpi)$, où ϖ est un réel fixé tel que $0 < \varpi < \varpi_0$. Après, on multiplie par $\frac{1}{\varpi}$ et on pose $w(\tau) = \frac{1}{\varpi}(u'_\eta(\tau) - u'_\eta(\tau - \varpi))$, il vient:

$$(u''_\eta + \alpha u'_\eta + \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} - f, w') + \eta(A(u_\eta), w') + (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}, \frac{\partial w'}{\partial x}) \leq 0 \text{ p.p. } \tau \in]\varpi_0, T[.$$

Soit $t \in]\varpi_0, T[$; on intègre l'inégalité précédente de ϖ_0 à t . Puisque $\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, on peut intégrer par parties le terme $(\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}, \frac{\partial w'}{\partial x})$, il vient:

$$(1.21) \quad \int_{\varpi_0}^t (u''_\eta, w') d\tau \leq - \int_{\varpi_0}^t (\alpha u'_\eta + \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} - f, w') d\tau - \eta \int_{\varpi_0}^t (A(u_\eta), w') d\tau - (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t)) \\ + (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}(\varpi_0), \frac{\partial w}{\partial x}(\varpi_0)) + \int_{\varpi_0}^t (\varphi'(u_\eta) u'_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x} + \varphi(u_\eta) \frac{\partial u'_\eta}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}) d\tau.$$

Le passage à la limite en $\varpi \rightarrow 0_+$ dans les deux membres de l'inégalité (1.21) est légitime, en effet, $u''_\eta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $u'_\eta \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega))$, donc w' et $\frac{\partial w}{\partial x}$ convergent respectivement vers u'_η et $\frac{\partial u'_\eta}{\partial x}$ dans $L^q(0, T; L^2(\Omega))$, pour tout $q \in [1, \infty[$. De plus, on obtient grâce à la régularité sur u'_η que $\frac{\partial u'_\eta}{\partial x} \in C^s([0, T]; L^2(\Omega))$, où $C^s([0, T]; L^2(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ telles que pour chaque $y \in L^2(\Omega)$, l'application $t \rightarrow (v(t), y)$ est continue (cf. J.L. Lions et E. Magenes [7]). Par conséquent, pour chaque $t \in [0, T]$, $\frac{\partial w(t)}{\partial x}$ converge faiblement vers $\frac{\partial u'_\eta(t)}{\partial x}$ dans $L^2(\Omega)$. On déduit alors de (1.21) l'inégalité

$$\int_{\varpi_0}^t \|u''_\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq - \int_{\varpi_0}^t (\alpha u'_\eta + \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} - f, u''_\eta) d\tau - \eta \int_{\varpi_0}^t (A(u_\eta), u''_\eta) d\tau - (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}(t), \frac{\partial u'_\eta}{\partial x}(t)) \\ + (\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}(\varpi_0), \frac{\partial u'_\eta}{\partial x}(\varpi_0)) + \int_{\varpi_0}^t (\varphi'(u_\eta) u'_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x} + \varphi(u_\eta) \frac{\partial u'_\eta}{\partial x}, \frac{\partial u'_\eta}{\partial x}) d\tau,$$

qui implique grâce à l'inégalité de Young et à la propriété $u'_\eta(\tau) \in \mathcal{K}$, p.p. $\tau \in]0, T[$:

$$(1.22) \quad \frac{1}{2} \int_{\varpi_0}^t \|u''_\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq C, \text{ p.p. } \varpi_0 \in]0, 1[, \text{ p.p. } t \in]0, T[$$

où C est une constante positive indépendante de ϖ_0 et de $\eta \in]0, 1[$.

On passe à la limite en ϖ_0 dans (1.22), on obtient l'estimation i).

ii) Soit ϖ un réel de $]0, T[$, destiné à tendre vers 0_+ . On considère l'inéquation (1.2) satisfaite par u_η aux instants τ et $\tau + \varpi$, où τ est un réel fixé de $]0, T - \varpi[$, avec les choix respectifs $v = u'_\eta(\tau + \varpi)$ et $v = u'_\eta(\tau)$. On ajoute ces deux inégalités obtenues, on multiplie par $\frac{\tau}{\varpi^2}$, puis, on intègre de 0 à t . Pour chaque fonction $w : Q \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $w_\varpi(\tau) = \frac{1}{\varpi}(w(\tau + \varpi) - w(\tau))$. La monotonie de l'application $v \mapsto |v|^p v$ et une intégration par parties conduisent à:

$$(1.23) \quad \frac{1}{2} \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \tau \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - \int_0^t \tau \left(\frac{\partial [g(u_\eta)]_{\varpi}}{\partial x}, u'_{\eta, \varpi} \right) d\tau \\ + \int_0^t \tau (f_{\varpi}, u'_{\eta, \varpi}) d\tau - \eta \int_0^t \tau \left[\varphi^2(u_\eta) u'_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right)^2 \right]_{\varpi}, u'_{\eta, \varpi} d\tau - \int_0^t \tau \left(\frac{\partial [\Phi(u_\eta)]_{\varpi}}{\partial x}, \frac{\partial u'_{\eta, \varpi}}{\partial x} \right) d\tau.$$

Majoration du second membre de (1.23). En effet, on effectue une transformation simple sur les termes $\frac{\partial [\Phi(u_\eta)]_{\varpi}}{\partial x}$ et $\left[\varphi^2(u_\eta) u'_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right)^2 \right]_{\varpi}$, puis, des intégrations par parties. L'utilisation de la propriété $u'_\eta \in \mathcal{K}$, p.p. $\tau \in]0, T[$, la régularité sur φ et g , la propriété $\|w_\varpi(\tau)\|_{L^q(Q)} \leq \|w'\|_{L^q(Q)}$ valable pour tout fonction $w : w' \in L^q(Q)$ ($q \in [1, \infty[$) et tout réel ϖ , nous permettent de déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation i) précédente, la majoration:

$$(1.24) \quad \left| \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - \int_0^t \tau \left(\frac{\partial [\Phi(u_\eta)]_{\varpi}}{\partial x}, \frac{\partial u'_{\eta, \varpi}}{\partial x} \right) d\tau - \int_0^t \tau \left(\frac{\partial [g(u_\eta)]_{\varpi}}{\partial x} - f_{\varpi}, u'_{\eta, \varpi} \right) d\tau \right| \\ + \left| \eta \int_0^t \tau \left[\varphi^2(u_\eta) u'_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right)^2 \right]_{\varpi}, u'_{\eta, \varpi} d\tau \right| \leq C + C \int_0^t \tau \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau,$$

où C est une constante positive indépendante de $\eta \in]0, 1[$ et de $\varpi \in]0, 1[$.

Il résulte de (1.23) grâce à (1.24), l'inégalité

$$(1.25) \quad \frac{1}{2} \|u'_{\eta, \varpi}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + C \int_0^t \tau \|u'_{\eta, \varpi}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

D'où, par passage à la limite en ϖ et utilisation du lemme de Gronwall, on obtient l'estimation ii). ■

I-3-2) Passage à la limite en η dans l'inéquation (1.2)

Il résulte de l'appartenance $u'_\eta(t) \in \mathcal{K}$, p.p. $t \in]0, T[$, et des estimations du lemme 1-4, les propriétés de convergence faible

$$(1.26) \quad \begin{cases} u_\eta \rightharpoonup u & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible*}, \\ u'_\eta \rightharpoonup u' & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible* et } u'(t) \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[\\ u''_\eta \rightharpoonup u'' & \text{dans } L^2(Q) \text{ faible}, \\ tu''_\eta \rightharpoonup \chi & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible* et } \chi = tu''. \end{cases}$$

En effet, $u'(t) \in \mathcal{K}$, p.p. $t \in]0, T[$, puisque \mathcal{K} est un sous-ensemble fermé de $H_0^1(\Omega)$. De plus, $\chi = tu''$ puisque tu''_η converge vers tu'' dans $D'(0, T; L^2(\Omega))$ car pour chaque fonction φ dans $D(]0, T[)$, on a $\langle tu''_\eta, \varphi \rangle = -\langle u'_\eta, (t\varphi)' \rangle$.

On déduit de (1.26) les résultats suivants

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u'(x, 0) = u_1(x), \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

$$(1.27) \quad u_\eta \rightarrow u \text{ (resp. } u'_\eta \rightarrow u') \text{ dans } L^2(0, T; C(\bar{\Omega})) \text{ et } L^q(Q) \forall q \in [1, \infty[,$$

et

$$(1.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x} \rightharpoonup \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} \text{ (resp. } \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} \rightharpoonup \frac{\partial g(u)}{\partial x}) \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible*}, \\ \eta A(u_\eta) \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible*}. \end{cases}$$

Maintenant, le passage à la limite en η dans l'inégalité (1.2) est possible. En effet (1.2) entraîne:

$$\begin{aligned} & \int_0^t (u''_\eta + \alpha u'_\eta + \eta A(u_\eta) + \frac{\partial g(u_\eta)}{\partial x} - f, v - u'_\eta) d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi(u_\eta)}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\tau \\ & \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi(u_\eta) \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi(u_0) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \varphi'(u_\eta) u'_\eta \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial x} \right)^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

il résulte donc de (1.26), ..., (1.28), de $-\varphi'(u_\eta)u'_\eta \geq 0$ et $-\varphi'(u)u' \geq 0$ et des propriétés de convergence faible

$$\sqrt{\varphi(u_\eta)} \frac{\partial u_\eta}{\partial x} \rightharpoonup \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (resp. } \sqrt{-\varphi'(u_\eta)u'_\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial x} \rightharpoonup \sqrt{-\varphi'(u)u'} \frac{\partial u}{\partial x}) \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible*},$$

que la fonction limite u satisfait à:

$$\int_0^t (u'' + \alpha u' + \frac{\partial g(u)}{\partial x} - f, v - u') d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi(u)}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} (v - u') \right) d\tau \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[.$$

On conclut par une opération standard, que u vérifie l'inéquation (1) et par suite u est une solution du problème P . L'unicité de u s'obtient comme au § I-1-3.

Ce qui achève la preuve du théorème 1-1 et le § I. ■

II- Existence et unicité de la solution pour un problème dégénéré

Existence:

On suppose que la fonction Φ satisfait à l'hypothèse H_0 . Les autres conditions H et H_g sont inchangées. On considère alors le problème dégénéré:

$$\tilde{P} \left\{ \begin{array}{l} (2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega)), u' \in L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega)), u'(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. } t \in]0, T[, u'' \in L^2(Q), \\ \forall v \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \\ (u'' + \alpha u' + \frac{\partial g(u)}{\partial x} - f, v - u') + \left(\frac{\partial \Phi(u)}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} (v - u') \right) \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x) \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour ce problème, on établit le:

Lemme 2-1: *Le problème \tilde{P} admet au moins une solution.*

Preuve: Pour établir l'existence d'une solution de \tilde{P} , on utilise une méthode d'approximation. Pour chaque réel $\sigma > 0$, on considère la fonction $\Phi_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi_\sigma(v) = \Phi(v) + \sigma v$, qui satisfait à la condition H_σ et on note par P_σ le problème similaire au problème P tel que dans (1), la fonction Φ_σ prend la place de la fonction Φ .

Il résulte du § I, que P_σ admet une solution unique u_σ , telle que $tu_\sigma'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

D'autre part, on procède comme pour établir les estimations du lemme 1-4, on obtient ceux sur u_σ

$$(2.2) \quad \|u_\sigma''\|_{L^2(Q)} + \|\sqrt{t}u_\sigma''\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C, \quad (C > 0 \text{ est une constante indépendante de } \sigma \in]0, 1[).$$

Maintenant, grâce aux estimations (2.2) et à la propriété $u'_\sigma(t) \in \mathcal{K}$, p.p. $t \in]0, T[$, nous allons montrer que la suite $(u_\sigma)_{\sigma > 0}$ converge, quand $\sigma \rightarrow 0_+$, vers une solution u du problème \tilde{P} .

En effet, comme au paragraphe 1-3-2, on établit l'existence d'une sous-suite $(u_\sigma)_{\sigma > 0}$, notée encore $(u_\sigma)_{\sigma > 0}$ telle que: quand $\sigma \rightarrow 0_+$,

$$u_\sigma \rightarrow u, \quad u'_\sigma \rightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible* et } u'(t) \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in]0, T[,$$

$$u_\sigma'' \rightarrow u'' \text{ faiblement dans } L^2(Q),$$

$$\forall t \in [0, T], \quad u_\sigma(t) \rightarrow u(t) \text{ (resp. } u'_\sigma(t) \rightarrow u'(t)) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Il résulte d'une part:

$$(2.3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u'(x, 0) = u_1(x) \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

et d'autre part, grâce aux résultats de compacité classiques, les propriétés de convergence forte:

$$u_\sigma \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; C(\bar{\Omega})) \text{ et } L^q(Q), \forall q \in [1, +\infty[,$$

$$u'_\sigma \rightarrow u', \quad \Phi(u_\sigma) \rightarrow \Phi(u), \quad g(u_\sigma) \rightarrow g(u) \text{ dans } L^q(Q), \forall q \in [1, +\infty[.$$

Maintenant, on peut passer la limite quand $\sigma \rightarrow 0_+$ dans l'inégalité satisfaite par u_σ . Il en résulte que la fonction limite u vérifie l'inégalité (2.1) pour chaque $v \in \mathcal{K}$ et pour p.p. $t \in]0, T[$, et par conséquent u est une solution de \tilde{P} . ■

L'hypothèse H_0 et H_g sont insuffisantes pour conclure sur l'unicité de la solution de \tilde{P} . On est amené donc à ajouter d'autres conditions sur φ et g afin d'obtenir cette unicité de la solution.

On remarque que toute solution u de \tilde{P} vérifie $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, il en résulte grâce à l'inclusion algébrique et topologique $H_0^1(\Omega) \subset C^{0, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})^{(*)}$ et au théorème d'Ascoli que $u \in C(\bar{Q})$.

On note $\mathbf{M} = \{v \in C(\bar{Q}) : v' \in L^\infty(0, T; \mathcal{K}) \text{ et } v(x, 0) = u_0(x)\}$, alors toute solution de \tilde{P} est dans \mathbf{M} . On pose $d_0 = \inf \{v(x, t) : v \in \mathbf{M} \text{ et } (x, t) \in \bar{Q}\}$, on remarque que d_0 est fini, puisque tout élément de \mathbf{M} est borné sur Q par $\|u_0\|_{C(\bar{\Omega})} + \text{mes}(Q)$. On ajoute à H_0 et H_g la condition

$$H_d \begin{cases} \text{i)} & \exists \ell \in \mathbb{R}, \ell \geq 4, \exists d \in \mathbb{R}, \exists (k_0, k_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \forall v \in [d_0, +\infty[\\ & k_0 |v - d|^\ell \leq \varphi(v), 0 \leq \varphi'(v) \leq k_1 |v - d|^{\ell-1}, |\varphi''(v)| \leq k_1 |v - d|^{\ell-2}, \\ \text{ii)} & \exists (c, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \text{ tel que } \mu \geq \frac{\ell}{2} \text{ et } |g'(v)| \leq c |v - d|^\mu \quad \forall v \in [d_0, +\infty[. \end{cases}$$

L'hypothèse H_d ii) entraîne en particulier que $|g'(v)| \leq c' + c'' |v|^\mu$ sur $[d_0, +\infty[$.

Un exemple de fonctions φ vérifiant l'hypothèse H_0 et la condition i) de H_d est

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ sur }]-\infty, d_0] \\ k |x - d_0|^\ell \text{ sur } [d_0, +\infty[, \text{ avec } \ell \geq 4 \text{ et } k > 0. \end{cases}$$

On a le

Lemme 2-2: *Sous la condition H_d , le problème \tilde{P} admet une unique solution.*

Preuve: Soit w une solution du problème \tilde{P} et soit u la solution obtenue par le lemme 2-1. Alors $s = u - w$ vérifie:

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau + \alpha \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \int_0^t (\frac{\partial(g(u) - g(w))}{\partial x}, s') d\tau \leq 0.$$

La difficulté principale ici est le traitement du second terme du premier membre de (2.4).

a) En effet, une transformation simple conduit à

$$(2.5) \quad \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial s}{\partial x} + [\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(w) \frac{\partial s}{\partial x} + [\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau.$$

(*) $C^{0, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions holdériennes v d'ordre $\frac{1}{2}$, muni de la norme:

$$\|v\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)| + \sup_{(x,y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}}.$$

On va minorer chaque terme du second membre de (2.5). Puisque $\frac{\partial s(x,0)}{\partial x} = 0$ alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial s}{\partial x} + [\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau = \frac{1}{4} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} ([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) \\ & - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi'(u) u' \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi'(w) s' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t ([\varphi'(u) - \varphi'(w)] u' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t ([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w'}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau. \end{aligned}$$

Il résulte d'une part, du théorème de la valeur moyenne, de la C^2 -régularité sur φ et de l'hypothèse H_d , les inégalités

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(w)| &\leq C(|u - d|^{\ell-1} + |w - d|^{\ell-1}) |s|, \\ |\varphi'(u) - \varphi'(w)| &\leq C(|u - d|^{\ell-2} + |w - d|^{\ell-2}) |s|, \end{aligned}$$

d'autre part, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, la propriété $u'(t)$ (resp. $w'(t)$) $\in \mathcal{K}$, la condition $\ell \geq 4$, la minoration $k_0 |v - d|^\ell \leq \varphi(v)$ et l'inégalité $\|s(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq t \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$, entraînent les deux majorations:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \left([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x} - \int_0^t ([\varphi'(u) - \varphi'(w)] u' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau \right) + \frac{1}{2} \left([\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w'}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x} - \int_0^t ([\varphi'(u) - \varphi'(w)] u' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ & \quad + C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \end{aligned}$$

et

$$\left| -\frac{1}{2} \int_0^t (\varphi'(w) s' \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}) d\tau \right| \leq C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Finalement, on déduit de la propriété $-\varphi'(u)u' \geq 0$, la minoration

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial s}{\partial x} + [\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau \geq \frac{1}{6} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ & - \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Par un procédé analogue, on établit la minoration

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(w) \frac{\partial s}{\partial x} + [\varphi(u) - \varphi(w)] \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau &\geq \frac{1}{6} \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &- \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Il résulte des deux minoration précédentes, la minoration

$$\begin{aligned} \int_0^t (\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(w) \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial s'}{\partial x}) d\tau &\geq \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &- C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

b) Enfin, la régularité sur g , l'inégalité $|g'(v)| \leq c|v - d|^\mu$ sur $[d_0, +\infty[$, la condition $\mu \geq \frac{t}{2}$, la propriété $u'(t)$ (resp. $w'(t)$) $\in \mathcal{K}$, l'inégalité $\|s(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq t \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$ et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young conduisent à

$$\left| \int_0^t \left(\frac{\partial(g(u) - g(w))}{\partial x}, s' \right) d\tau \right| \leq C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

On déduit finalement de (2.4) grâce aux points a), b), l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|s'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{12} \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s(t)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(u)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \left\| \sqrt{\varphi(w)} \frac{\partial s}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + C \int_0^t \|s'\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

qui, à l'aide du lemme de Gronwall nous donne $u = w$ sur Q . ■

Bibliographie

- [1] M.L. Bernardi - L. Pozzi : On class of singular nonlinear parabolic variational inequalities, ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. Tomo CLIX, VOL. 159, 1991, p. 117-132.
- [2] G. Duvaut et J.L. Lions : Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [3] Y. Ebihara : Modified Variational Inequalities to Semilinear Wave Equation, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Appl., 7, n° 8, 1983, p. 821-826.
- [4] B. Hajouj : On an Elasto-Plasticity Problem with Small Parameters. Advances in Mathematical Sciences

and Applications, Gakkōtoshō, Tokyo, Vol. 9, No. 1 (1999), pp. 209-227.

- [5] N. A. Lar'kin : Hyperbolic Regularization of the Burgers Equation, *Diff. Eq.*, 16, n° 1, 1980, p. 77-79.
- [6] J.L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [7] J.L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [8] M. Madaune-Tort : Thèse, PAU et PAYS de L'ADOUR, FRANCE, 1981
- [9] F.G. Maksudov, A.B. Aliev and D.M. Tahirov : A one-sided Problem for a Quasilinear Equation of Hyperbolic Type, *Soviet Math. Dokl.*, 23, n° 3, 1981, p. 592-594.

Ecole Normale Supérieure, Département de Mathématiques,
B.P. S/41, Marrakech, Maroc
e – mail : bhajouj@ensma.ac.ma