

JEAN-PIERRE GRENIER

## Représentation discrète de fonctions généralisées

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 4, n° 1 (1997), p. 49-56

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1997\\_\\_4\\_1\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_49_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## REPRESENTATION DISCRETE DE FONCTIONS GENERALISEES

Jean-Pierre Grenier ( Univ. Blaise Pascal, Clermont-Ferrand)

### 1) Introduction.

Les parties 1 (notations), 2 (distributions standards), 3 (fonctions généralisées) décrivent sans démonstration la partie utile pour la suite des résultats obtenus dans l'article [1] *Représentation Discrète des Distributions Standards, Osaka J. of Math. sept 95*. La partie 4 propose des applications et quelques thèmes de recherche.

Les notations sont 'Nelsonniennes'.

La base canonique de  $\mathbf{R}^n$  est  $(e_1, \dots, e_n)$ , la norme  $|\cdot|$  sur  $\mathbf{R}^n$  est la norme du sup. On se fixe un entier illimité pair  $\omega$ , on pose  $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ . On considère le réseau hyperfini  $X = \{\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon x_i e_i / x_i \in \mathbf{Z}, \frac{-\omega}{2} \leq \varepsilon x_i < \frac{\omega}{2}\}$ , et l'ensemble  $R = R(X)$  des applications internes de  $X$  dans  $\mathbf{C}$ ; en cas de nécessité un élément de  $R$  est prolongé par périodicité au réseau  $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z} \varepsilon e_i$ .

Pour  $f \in R$ , on définit les différences divisées à droite (resp. gauche)  $D_i f(x) = (f(x + \varepsilon e_i) - f(x))/\varepsilon$  (resp.  $D_{i-} f(x) = -(f(x - \varepsilon e_i) - f(x))/\varepsilon$ ). Par récurrence on définit pour tout entier  $\alpha_i$ ,  $D_i^{\alpha_i+1} = D_i^{\alpha_i} \circ D_i$  et pour tout multi-entier  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $D^\alpha = \bigcirc_{1 \leq i \leq n} D_i^{\alpha_i}$ , on définit de même  $D_-^\alpha$ .  $D^\alpha$  est un endomorphisme de  $R(X)$ . Pour  $g : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{C}$  interne, lorsque le contexte permettra de lever l'ambiguïté, on notera plus simplement  $g$  au lieu de  $g|_X$ . Pour  $g \in R$  et  $k \in \mathbf{R}_+^*$ , on note  $|g|_k = \sup\{|g(x)| / |x| \leq k\}$ .

Dans toute la suite, les lettres  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des multi-entiers standards.

Les notations  $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'$  sont les notations classiques des ensembles standards du cours de Distributions de maitrise. L'opérateur standard de dérivation au sens distribution est noté  $\partial^\alpha$ .

## 2) Distributions standards.

Soit  $f \in R$ , on dit que:

$f \in E$  ( $f$  à différences limitées) lorsque pour tous  $k$  et  $\alpha$  standard,  $|D^\alpha f|_k$  est limité.

$f \in D$  ( $f$  fonction test limitée) lorsque  $f \in E$  et  $f$  est à support limité.

$f \in S$  ( $f$  fonction de Schwartz) lorsque  $f \in E$  et pour tous  $\alpha, \beta$ ,  $|x^\alpha D^\beta f|$  est limité sur  $X$ .

Pour  $f, g \in R$ , on note  $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} \varepsilon^n f(x)g(x)$ .

Pour toute forme linéaire interne  $\Pi : R \rightarrow \mathbb{C}$ , il existe une et une seule  $f \in R$  tel que  $\langle f, g \rangle = \Pi(g)$  pour tout  $g$ . De plus pour tout  $\alpha$ , on a  $\langle D^\alpha f, g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha g \rangle$ .

On dit que  $\Pi$  (ou  $\Pi_f$  ou  $f$ ) est une distribution limitée et on écrit  $f \in D'$  lorsque  $\langle f, g \rangle$  est limité pour tout  $g \in D$ . L'application  $P_f : D \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $P_f(\psi) = \langle f, \psi \rangle$  est alors une distribution standard et on a  $\partial^\alpha P_f = P_{D^\alpha f}$ . Nous utiliserons l'exemple suivant: si  $g$  est continue alors  $P_{g|_X}$  est la distribution  $\phi \mapsto \int g\phi$ .

**Théorème de représentation des distributions standards.** Soit  $T$  une distribution standard, il existe une distribution limitée  $f \in D'$  telle que  $T = P_f$ .

La démonstration, inspirée de Moto-O-Kinoshita (voir [3]), se fait en deux étapes. Pour  $T$  à support compact, il existe (Théorème de Schwartz) une fonction continue standard  $\theta$  et un multi-entier  $\alpha$  tels que  $T = \partial^\alpha \theta$ . On définit la fonction  $\tau$  de  $R(X)$  par  $\tau := \theta|_X$

( on peut prendre tout relèvement uniforme donc  $S$ -continu de  $\theta$ ) et on pose  $f := D^\alpha \tau$ ; on a alors  $T = P_f$ . Dans le cas général, on utilise une partition interne de l'unité pour se ramener au cas des distributions à support compact.

### Distributions tempérées.

On dit que  $f$  est une distribution limitée tempérée et on note  $f \in S'$  lorsque  $\langle f, g \rangle$  est limité pour tout  $g \in S$ ;  $P_f$  est alors une distribution tempérée et toute distribution tempérée est représentée par une fonction  $f \in S'$ . Par exemple la mesure de Dirac en  $y \in \mathbf{R}^n$  peut être représentée par la fonction  $\delta_y(x)$  qui vaut  $\varepsilon^{-n}$  si  $x = y$  et 0 sinon; cependant le choix d'autres représentants peut être indispensable dans les applications.

On définit comme suit les transformées de Fourier directe et inverse des éléments de  $S$  et  $S'$ : pour tout  $y \in X$ , on pose

$$Ff(y) = \sum_{x \in X} \varepsilon^n e^{-2i\pi xy} f(x) \quad \text{et} \quad \bar{F}f(y) = \sum_{x \in X} \varepsilon^n e^{2i\pi xy} f(x)$$

Ces transformées de Fourier ont "à un infinitésimal près" les propriétés classiques des transformées de Fourier habituelles: ce sont des isomorphismes de  $R$  qui satisfont pour tous  $f, \varphi \in R(X)$  les formules

$$\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, \bar{F}\varphi \rangle \quad \text{donc} \quad F\bar{F} = \bar{F}F = 1_{R(X)}. \quad \text{et} \quad F\delta_y(x) = e^{-2i\pi xy}$$

D'autre part, en generalisant Kinoshita ( voir [4]) pour tout multi-entier  $\alpha$ , on définit l'application  $\lambda^\alpha \in R(X)$  par la formule

$$\lambda^\alpha(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \left( \frac{e^{2i\pi x \varepsilon_j} - 1}{\varepsilon} \right)^{\alpha_j}$$

Pour  $x$  limité, on a  $\lambda^\alpha(x) \sim (2ix)^\alpha$ . De plus différences et transformées de Fourier sont liées par les formules  $D^\alpha F\varphi = F(\bar{\lambda}^\alpha\varphi)$  et  $FD^\alpha\varphi = \lambda^\alpha F\varphi$ ; pour  $x$  limité on obtient à un infinitésimal près les relations classiques liant dérivation et transformées de Fourier standards.

On dit qu'une fonction  $f$  de  $R(X)$  est à croissance modérée lorsqu'il existe un polynôme standard  $Q$  tel que pour tout  $x \in X$ , on ait  $|f(x)| \leq |Q(x)|$ , on dit qu'elle est à croissance lente lorsque toutes ses dérivées sont à croissance modérée. Par exemple  $\lambda^\alpha$  est à croissance lente alors que  $x \mapsto e^x$  ne l'est pas. On note  $O$  l'ensemble des fonctions à croissance lente.

### 3) Fonctions généralisées.

On appelle fonction généralisée discrète (GF) un élément  $f \in R(X)$  qui satisfait une des trois propriétés équivalentes suivantes:

- (i) Pour tout  $k > 0$  standard, il existe un entier  $m$  standard tel que  $|f|_k < \varepsilon^{-m}$ .
- (ii) Pour tout  $k > 0$  et  $\alpha$  standards, il existe un entier  $m$  standard tel que  $|D^\alpha f|_k < \varepsilon^{-m}$ .
- (iii) Pour tout  $k > 0$  standard, il existe un entier  $m$  standard tel que  $\sum_{|x| \leq k} |f| < \varepsilon^{-m}$ .

L'ensemble des GF est une  $E$  sous algèbre externe de  $R(X)$  stable par les  $D^\alpha$ , Les fonctions S-continues sont des GF, donc toute distribution limitée est une GF.

S'il existe  $k > 0$  standard tel que  $|f(x)| < \varepsilon^{-k}$  pour tout  $x \in X$ , on dit que  $f$  est une fonction généralisée tempérée (TGF). L'ensemble des TGF est une sous  $O$ -algèbre de  $R(X)$ , stable par les  $D^\alpha$  et par transformée de Fourier. C'est le plus petit sous anneau

externe contenant les fonctions  $S$ -uniformément continues sur  $X$  et stable par différences. Toute distribution limitée tempérée est une TGF, en particulier une distribution limitée à support limité est une TGF, par exemple la fonction de Dirac  $\delta_y$ .

De plus pour  $f \in R(X)$ , les conditions suivantes sont équivalentes:

(i)  $f$  est une TGF.

(ii) Pour tout  $\alpha$  standard,  $D^\alpha f$  est une TGF.

(iii) Il existe des entiers standards  $l$  et  $m$  tels que  $\sum_{x \in X} \varepsilon^m \frac{|f(x)|}{(1 + |x|^2)^l}$  est limité.

#### 4) Applications.

Ces *applications* présentent des thèmes de recherche que je n'ai pas encore étudiés en détail; certains s'avèreront peut être fructueux d'autres pas. Ils sont destinés à faire l'objet de recherches, de discussions et d'échanges avec tout nonstandardicien intéressé.

Le produit de fonctions généralisées fournit une application au produit de distributions:

Soient  $S$  et  $T$  deux distributions et  $s$  et  $t$  deux fonctions généralisées telles que  $S = P_s$  et  $T = P_t$ ;  $st$  est une fonction généralisée produit de  $S$  et  $T$ ; cependant même lorsque  $st$  est une distribution,  $P_{st}$  dépend du choix des représentants, il est probablement nécessaire de restreindre le choix de ces représentants.

Composé de deux fonctions généralisées.

Si  $f \in R(X)$  satisfait  $f(X) \subset X$ , alors pour tout  $g \in R(X)$ , le composé  $g \circ f$  appartient

à  $R(X)$ , si  $g$  est à croissance modérée, alors  $g \circ f$  est une TGF; en particulier, on peut définir  $g(T)$  lorsque  $T$  est une distribution dont on a choisi un représentant convenable.

Equations différentielles:

Soit  $f : X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ; considérons l'équation aux différences (E)  $Dy = f(t, y)$ . On suppose qu'il existe un entier standard  $m$  tel que pour tout  $t$  limité, on ait  $|f(t, y)| \leq \varepsilon^{-m}$ , on choisit un  $y_0$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $|y_0| \leq \varepsilon^{-l}$  pour un entier standard  $l$  donné. Il existe une et une seule solution  $y \in \text{GF}$  de (E) telle que  $y(0) = y_0$ . De plus soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que pour tout entier standard  $k$ ,  $|z_0 - y_0| \leq \varepsilon^k$ , et soit  $z$  l'unique solution de (E) telle que  $z(0) = z_0$ ; alors  $|(z - y)(t)| \leq \varepsilon^k$  pour tout entier  $k$  standard et tout  $t$  limité.

On peut donner un sens (puis résoudre) des équations différentielles du type

$y'(x) = (a(x) + \delta)y(x)$  où  $a$  est une fonction continue et où les solutions  $y$  ne sont pas nécessairement continues. Le choix du représentant de la fonction de Dirac intervient.

Cela permet également de donner un sens à (puis de résoudre) des EDP comme l'équation de Hopf  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  lorsque les solutions  $u$  ne sont pas  $C^0$ .

Les EDP linéaires devraient se résoudre au sens fonctions généralisées par des méthodes classiques (convolution, opérateurs) même lorsque les coefficients ne sont pas  $C^\infty$ .

D'autre part les fonctions généralisées se développent facilement en ondelettes de Haar, d'où peut être d'autres applications par exemple dans le cadre des martingales. Dans le même ordre d'idées, il sera peut-être fructueux de relier les fonctions généralisées à l'analyse stochastique hyperfinie (voir par exemple [2]).

**Remarque.**

Il existe actuellement plusieurs constructions classiques d'algèbre de fonctions généralisées.

Il est bien connu qu'il ne peut exister d'algèbre différentiable satisfaisant la règle de Leibniz et contenant les fonctions continues. La plupart des constructions standards ou non (Colombeau, Oberguggenberger), conservent la dérivation et modifient légèrement le produit; notre construction conserve le produit et remplace la dérivation par les différences qui ne satisfont la règle de Leibniz qu'à un infinitésimal près et seulement pour les fonctions  $S^1$ .

**Références bibliographiques**

- [1 ] Jean-Pierre GRENIER, *Représentation discrète des distributions standards*, Osaka J. of Math. 32 (1995) , 799-815.
- [2 ] H. J. KEISLER, *An infinitesimal approach to stochastic analysis*, Memoirs of the American Mathematical Society, Number 297, (1984).
- [3 ] Moto-O-KINOSHITA, *Nonstandard representation of distributions I*, Osaka J. of Math. 25 (1988) , 805-824.
- [4 ] Moto-O-KINOSHITA, *Nonstandard representation of distributions II*, Osaka J. of Math. 27 (1990) , 843-861.

Jean-Pierre GRENIER

Adresse professionnelle

Classes préparatoires aux grandes écoles  
Lycée Pothier  
2 bis rue M. Proust  
45000 ORLEANS  
e-mail : Jean.Pierre.Grenier@univ-orleans.fr

Adresse personnelle

276, rue des Glycines  
45160 OLIVET  
Tél et fax : 02-38-76-27-13

---

A la suite d'une erreur technique lors de la réalisation de ce fascicule, la bibliographie de l'article *Représentation discrète de fonctions généralisées*, de J.-P. Grenier, n'a pas été imprimée à la page 56. Nous reproduisons sur ce feuillet les références correspondantes, et présentons nos excuses à l'auteur et aux lecteurs.