ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

B. BRUNET

Une approche non-standard de la dimension d'un espace topologique

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, nº 1 (1997), p. 15-18
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_15_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp. 15-18

Une approche non-standard de la dimension d'un espace topologique

par B. BRUNET.

Dans cet exposé, reprenant une idée de J.P. REVEILLES (6), nous proposons une définition non-standard de la dimension d'un espace topologique et nous montrons que ce nouvel invariant topologique coïncide dans le cas des espaces métriques séparables avec les définitions classiques – petite dimension inductive (*ind*), grande dimension inductive (*Ind*) et dimension de LEBESGUE (*dim*).

1 - Epaisseur d'un espace topologique.

Dans ce qui suit, on désigne par X un espace topologique et par $\mathcal{E}$ un élargissement (voir par exemple (4)) de cet espace et on appelle base de X toute base d'ouverts de X supposée stable par intersections finies.

1.1 : Etant donné un élément a de $^*X$, on appelle ***halo en base*** $\mathcal{B}$ ***de*** a l'ensemble, noté $h_{\mathcal{B}}(a)$ défini par $h_{\mathcal{B}}(a) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_a} {}^*B$ où $\mathcal{B}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in {}^*B\}$.

1.2 : A toute base $\mathcal{B}$ de X, on peut associer une relation de préordre $\leq$ sur $^*X$ par : $a \leq b$ si et seulement si $a \in h_{\mathcal{B}}(b)$.
(Dans la suite on écrira $a < b$ si et seulement si $a \leq b$ mais pas $b \leq a$).

1.3 : Etant donné un point x de X, on dit que l'épaisseur en x d'une base $\mathcal{B}$ de X est inférieure à n, ce que l'on note $ep\ (x, \mathcal{B}) \leq n$, si et seulement si toute chaîne de type $a_p < ... < a_1 < {}^*x$ est de longueur $p \leq n$.
Notons que cette définition est équivalente à celle donnée dans (6) à condition de corriger la notion de « halos consécutifs » page 707.

1.4 : On appelle ***épaisseur d'une base*** $\mathcal{B}$ de X, l'élément de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, noté $ep\ \mathcal{B}$, défini par $ep\ \mathcal{B} = sup\{\ ep\ (x, \mathcal{B}) : x \in X\}$.

1.5 : On appelle ***épaisseur de*** X, l'élément de $\overline{\mathbb{N}}$, noté epX, défini par $ep\ X = inf\{ep\ \mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{B}(X)\}$, $\mathcal{B}(X)$ désignant l'ensemble des bases de X.

On déduit alors de ces définitions les propriétés suivantes :

1.6 : a) $ep\ X = 0$ si et seulement si X possède une base d'ouverts - fermés.
b) Pour tout espace totalement ordonné X, $ep\ X \leq 1$ (en effet, si $\mathcal{B}_0$ désigne la base formée des intervalles ouverts de X, on a $ep\ \mathcal{B}_0 \leq 1$). En particulier, puisque $\mathbb{R}$ est connexe, $ep\ \mathbb{R} = 1$.
c) Pour tout espace topologique X et toute partie A de X, $ep\ A \leq ep\ X$.
d) Pour tout couple (X, Y) d'espaces topologiques, $ep\ (X \times Y) \leq ep\ X + ep\ Y$.
e) Pour tout entier $n \geq 1$, $ep\ \mathbb{R}^n \leq n$.

Il convient de noter qu'à la différence des définitions classiques de la dimension les propriétés c) et d) sont valables sans aucune hypothèse particulière sur les espaces considérés.

2 - Comparaison avec les définitions classiques de la dimension.

Théorème 2.1 : *Pour tout espace topologique X, on a :*

a) $ep\ X = 0$ si et seulement si $ind\ X = 0$,

b) $ind\ X \leq ep\ X$.

a) est immédiat puisque les deux assertions équivalent à dire que X possède une base d'ouverts-fermés.

b) Ecartons le cas trivial où $ep\ X = +\infty$ et prouvons le résultat par récurrence sur $n = ep\ X$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ d'après a). Supposons le montré pour tout espace d'épaisseur $n - 1$. Comme par hypothèse $ep\ X = n$, il existe une base $\mathcal{B}$ de X telle que $ep\ \mathcal{B} = n$. Soit B un élément de $\mathcal{B}$ et soit $F = FrB$ (FrB désignant la frontière de B). Désignons par $\mathcal{C}$ la trace sur F de $\mathcal{B}$. Soit x un élément de F et soit $\{a_p, \ldots, a_1\}$ une chaine de $h_{\mathcal{C}}({}^*x)$. Comme $a_p \in^* F$, a_p n'est pas minimal pour le préordre associé à $\mathcal{B}$. Il existe donc un élément a_{p+1} de ${}^*X$ tel que $\{a_{p+1}, a_p, \ldots, a_1\}$ soit une chaine de $h_{\mathcal{B}}({}^*x)$. Comme $ep\ \mathcal{B} = n$, on en déduit que $p \leq n-1$ et donc que $ep\ \mathcal{C} \leq n - 1$. Il résulte alors de la définition de $ep\ F$ et de l'hypothèse de récurrence que $ind\ F \leq n - 1$ ce qui entraine que $ind\ X \leq n$.

Corollaire 2.2 : *Pour tout entier $n \geq 1$, $ep\ \mathbb{R}^n = n$.*

On sait en effet que $ind\ \mathbb{R}^n = n$. Le résultat découle alors de 1.6 e).

Il convient de noter que, contrairement à ce qui est dit dans (6), il n'est pas possible de montrer ce dernier résultat sans utiliser le théorème du point fixe de BROUWER , la démonstration proposée reposant sur le résultat non établi suivant : pour toutes parties Y et Z d'un espace topologique X, on a $ep\,(Y \cup Z) \leq\ ep\,Y +\ ep\,Z + 1$.

De plus, et toujours contrairement à ce qui est dit dans (6), il n'est pas possible de déduire de 2.2 et des théorèmes classiques de plongement que, pour tout espace métrique séparable X, on a $ep\ X = ind\ X (= Ind\ X = dim\ X)$, sauf à établir que, pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, $ep\ A = ind\ A$.

2.3 *Un exemple d'espace X pour lequel $ind\ X <\ ep\ X$ et $Ind\ X <\ epX$.*

Dans (3), V.V. FILIPPOV a montré qu'il existait deux espaces topologiques compacts non métriques X_1 et X_2 tels que $ind\,X_1 = IndX_1 = 1$, $ind\,X_2 = Ind\,X_2 = 2$ et $ind\ (X_1 \times X_2) \geq 4$. Il résulte alors de cet exemple et de la propriété 1.6. d), que l'un de ces deux espaces X_i (et on peut montrer que c'est X_1) est tel que $ind\,X_i = Ind\,X_i <\ ep\,X_i$.

2.4 : *Un exemple d'espace X pour lequel $ep\ X = ind\ X < Ind\ X = dimX$.*

Dans (7), P. ROY a montré qu'il existait un espace métrique X tel que $ind\ X = 0$ et $Ind\ X = dim\ X = 1$. Cet espace X est donc tel que $ep\ X = ind\ X < Ind\ X = dim\ X$.

2.5 : *Un exemple d'espace X pour lequel $dim\ X < ep\ X$.*
Dans (5), O.V. LOKUCIEVSKII a prouvé qu'il existe un espace compact (non métrique) tel que $dim\ X = 1 < 2 = ind\ X = Ind\ X$. Cet espace X est donc tel que $dim\ X < ep\ X$.

3 - Cas des espaces métriques.

Théorème 3.1 : *Pour tout espace métrique X, on a $ind\ X \leq ep\ X \leq dim\ X = Ind\ X$.*
Puisque, pour tout espace métrique Y, on a $dim\ Y = Ind\ Y$ (voir par exemple (2)), il suffit, d'après 2.1 b), d'établir que, pour tout espace métrique X, on a $ep\ X \leq dim\ X$.
Dans ce qui suit, on posera, pour toute famille indexée $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ de parties de X et tout point x de X, $ord\ (x, \mathcal{F}) = |\{i \in I : x \in F_i\}| - 1$ ($|\mathcal{A}|$ désignant le cardinal de $\mathcal{A}$) et $ord\ \mathcal{F} = sup\{ord\ (x, \mathcal{F}) : x \in X\}$.
Lemme 3.1.1. : *Pour toute base $\mathcal{B}$ de X, si $\mathcal{F} = (Fr\ B)_{B \in \mathcal{B}}$, on a $ep\ \mathcal{B} \leq\ ord\ \ \mathcal{F}+1$.*
Soit x un élément de X et soit $\{a_p, ...a_1\}$ une chaîne de $h_{\mathcal{B}}({}^*x)$. Il existe alors p éléments distincts de $\mathcal{B}$, $B_1, ..., B_p$, tels que, pour tout $i \in \{1, ..., p\}, a_j \in {}^*B_i$ si et seulement si $j \geq i$ et tels que $x \in FrB_i$. Par conséquent, par définition de $ord\ (x, \mathcal{F})$, on a $p \leq ord\ (x, \mathcal{F}) + 1$ ce qui entraine que $ep\ (x, \mathcal{B}) \leq ord\ (x, \mathcal{F}) + 1$. Il résulte alors des définitions de $ep\ \mathcal{B}$ et de $ord\ \mathcal{F}$ que $ep\ \mathcal{B} \leq ord\ \mathcal{F} + 1$.

3.1.2 : démonstration de 3.1.
L'assertion est triviale si $dim\ X = +\infty$. Supposons donc que $dim\ X = n$. Il existe alors (voir par exemple (2), 4.2.2) une base σ-localement finie $\mathcal{B}$ de X telle que, si on pose $\mathcal{F} = (Fr\ B)_{B \in \mathcal{B}}$, on a $ord\ \mathcal{F} \leq n - 1$. Cette base $\mathcal{B}$ est donc, d'après 3.1.1, telle que $ep\ \mathcal{B} \leq n$, ce qui entraine que $ep\ X \leq n$.

3.2 : Notons que l'espace de P. ROY déjà cité est un exemple d'espace métrique tel que $ind\ X = ep\ X = 0 < dim\ X = Ind\ X = 1$.

3.3 : **Théorème de coïncidence pour les espaces métriques séparables.**
Pour tout espace métrique séparable X, on a $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X$.
Ce résultat est alors une conséquence immédiate de 3.1 et du théorème classique suivant : « Pour tout espace métrique séparable X, on a $ind\ X = Ind\ X = dim\ X$ ».

3.4 : *Un exemple d'espace métrique non séparable X pour lequel on a $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X$.*
Dans (8), E.K. VAN DOUWEN a montré l'existence d'un espace métrique non séparable X tel que $ind\ X = Ind\ X = dim\ X = 1$.
Cet espace X est donc tel que $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X$.

3.5 : Question : Existe-t-il un espace métrique non séparable X tel que $ind\ X <\ ep\ X$?

4 - Un autre cas de coïncidence.

On peut également prouver que l'épaisseur coïncide avec les dimensions classiques dans le cas des espaces totalement ordonnés et plus généralement des lignes (espaces homéomorphes à un sous-espace d'un espace totalement ordonné). De façon précise, on peut montrer (1) que, pour toute ligne non vide X, on a :

i) $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X = 0$ si et seulement si X est totalement discontinue,

ii) $ep\ X = ind\ X = Ind\ X = dim\ X = 1$ sinon.

REFERENCES

(1) B. BRUNET : *On the dimension of ordered spaces,* à paraître dans Collectanea Mathematica.

(2) R. ENGELKING : *Dimension theory*, North-Holland, 1978.

(3) V.V. FILIPPOV : *On the inductive dimension of the product of bicompacta*, Soviet. Math. Dokl, 13 (1972), N°1, 250-254.

(4) L. HADDAD : *Introduction à l'analyse non-standard*, Ecole d'Eté, Beyrouth, 1973.

(5) O.V. LOKUCIESVKII : *On the dimension of bicompacta*, (en russe), Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 67 (1949), 217-219.

(6) J.P. REVEILLES : *Une définition externe de la dimension topologique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Serie I, N° 14, 1984, 707-710.

(7) P. ROY : *Nonequality of dimension for metric spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., 134 (1968), 117-132.

(8) E.K. VAN DOUWEN : *The small inductive dimension can be raised by the adjunction of a single point,* Indagationes Mathematicae, 35 (1973), Fasc. 5, 434-442.

Bernard BRUNET

Laboratoire de Mathématiques Pures

Université Blaise Pascal *(Clermont-Ferrand)*

63177 AUBIERE CEDEX - FRANCE

Tél. : (33) 04-73-40-70-75

Fax : (33) 04-73-40-70-64

e.mail :brunet@ucfma.univ-bpclermont.fr