

MAXIME ZUBER

Suites de Honda

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 2, n° 1 (1995), p. 307-314

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1995__2_1_307_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES DE HONDA

Maxime ZUBER, Université de Neuchâtel, Suisse

Résumé: Dans son étude de la version p -adique du problème des moments [2], L. van Hamme définit certaines suites numériques particulières: les p - F -suites. Nous présentons ici une généralisation de cette notion en introduisant les suites polynomiales dites *de Honda* et nous établissons un lien avec le point de vue de vue exposé dans le livre de M. Hazewinkel [3].

I. NOTATIONS ET DEFINITIONS:

Sur l'anneau $A = \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_k]$ nous considérons l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \sigma : A &\longrightarrow A \\ x_i &\longmapsto x_i^p \end{aligned}$$

et notons a^σ l'image par σ du polynôme a : i.e.

$$a^\sigma(x_1, \dots, x_k) = a(x_1^p, \dots, x_k^p).$$

Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n \in A[[z]]$ est une série formelle sur A , alors f^σ désigne la série formelle

$$f^\sigma(z) = \sum_{n \geq 0} f_n^\sigma z^n.$$

Définition 1: (T. Honda et M. Hazewinkel) Une série formelle $h(z) = \sum_{n \geq 1} H_n z^n / n$ est de type $p - T$ sur A , si

$$h(z) - \frac{1}{p} h^\sigma(z^p) \in A[[z]].$$

Définition 2: (L. van Hamme) Une suite $(c_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ est une p - F -suite si, pour tous les entiers m et $r \geq 1$, on a

$$c_{mp^r} \equiv c_{mp^{r-1}} \pmod{p^r \mathbb{Z}_p}.$$

Définition 3: Une suite $(H_n)_{n \geq 0} \subset A$ est une suite de Honda si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la congruence suivante est vérifiée

$$H_{np} \equiv H_n^\sigma \pmod{npA};$$

c'est-à-dire, si

$$H_{np}(x_1, \dots, x_k) \equiv H_n(x_1^p, \dots, x_k^p) \pmod{npA}.$$

Définition 4: On dit qu'un polynôme $Q(x_1, \dots, x_k)$ est une pseudo-puissance n de x_i , si la dérivée partielle $\partial Q / \partial x_i$ appartient à l'anneau $n \cdot A$.

Exemples: A l'origine de la terminologie, les polynômes x_i^n , $(1+x_i)^n$, $r(x_1, \dots, x_k)^n$ (avec $r(x_1, \dots, x_k) \in A$) sont des pseudo-puissances n de x_i .

II. RELATIONS ENTRE LES DEFINITIONS:

Proposition 1: Pour une suite $(H_n)_{n \geq 1} \subset A$, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) La série formelle $\sum_{n \geq 1} H_n z^n / n$ est de type p - T sur A ;
- (ii) La suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Honda;
- (iii) $\exp\left(\sum_{n \geq 1} H_n z^n / n\right) \in A[[z]]$.

Preuve: Posons $h(z) = \sum_{n \geq 1} H_n z^n / n$. L'équivalence (i) \Leftrightarrow (iii), dont on trouvera une démonstration dans [9], énonce le fait que la série formelle $F(y, z) = h^{-1}(h(y) + h(z))$ définit une loi de groupe formel sur un anneau contenant A . Pour démontrer l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii), il suffit d'écrire

$$h(z) - \frac{1}{p} h^\sigma(z^p) = \sum_{n \geq 1} d_n z^n$$

et alors l'identification des coefficients des puissances de z correspondantes conduit aux identités

$$H_{np} - H_n^\sigma = np \cdot d_n, \quad (n \geq 1).$$

L'équivalence s'ensuit directement. ■

Proposition 2: Si $(H_n)_{n \geq 1} \subset A$ est une suite de Honda, alors

- (i) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le polynôme H_n est une pseudo-puissance n de x_i ;
- (ii) La suite $(\hat{H}_n(t))_{n \geq 1}$ obtenue par spécialisation $x_i = x_i(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$, ($i = 1, \dots, k$) est une suite de Honda.

Preuve: La première assertion se démontre par induction sur $\nu = \text{ord}_p(n)$ l'ordre p -adique de n . Si $\nu = 0$, alors l'entier n est une unité p -adique. Ainsi $n \cdot A = A$ et comme $H_n \in A$, il s'ensuit que $\partial H_n / \partial x_i \in A$. Supposons ensuite que $n = mp^\nu$ avec $\nu > 0$. En dérivant la congruence

$$H_{mp^\nu}(x_1, \dots, x_k) \equiv H_{mp^{\nu-1}}(x_1^p, \dots, x_k^p) \pmod{p^\nu A}$$

par rapport à la variable x_i , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^\nu}(x_1, \dots, x_k) \equiv p \cdot x_i^{p-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^{\nu-1}}(x_1^p, \dots, x_k^p) \pmod{p^\nu A}.$$

Par hypothèse d'induction, on a $\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^{\nu-1}}(x_1^p, \dots, x_k^p) \in mp^{\nu-1}A$; ainsi le second membre de la congruence précédente est nul modulo $p^\nu A$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_{mp^\nu}(x_1, \dots, x_k) \in mp^\nu A.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème, considérons les polynômes $\xi_i(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$ définis par les relations

$$x_i(t)^p = x_i(t^p) + p \cdot \xi_i(t). \quad (i = 1, \dots, k).$$

Grâce au point (i) et en appliquant successivement la version vectorielle du théorème des accroissements finis p -adique [5], on peut écrire

$$\begin{aligned} H_{np}(x_1(t), \dots, x_k(t)) &\equiv H_n(x_1(t^p) + p \cdot \xi_1(t), \dots, x_k(t^p) + p \cdot \xi_k(t)) \pmod{np\mathbb{Z}_p[t]} \\ &\equiv H_n(x_1(t^p), \dots, x_k(t^p)) \pmod{np\mathbb{Z}_p[t]}. \end{aligned}$$

Ceci signifie que la nouvelle suite $(\tilde{H}_n(t))_{n \geq 1}$ est suite de Honda. ■

Corollaire 1: Si $(H_n)_{n \geq 1} \subset A$ est une suite de Honda, alors pour tout entier p -adique $a \in \mathbb{Z}_p$, la suite $c_n := H_n(a)$ est une p - F suite.

Preuve: La suite (c_n) correspond à la spécialisation $x_i = a$ pour tout i . ■

La réciproque de ce corollaire n'est (généralement) pas vraie, sauf dans un cas particulier que nous introduisons maintenant.

Définition 5: Une suite de polynôme $(A_n(x))_{n \geq 0}$ est une famille d'Appell si, pour tout $n \geq 1$

$$A'_n(x) = n \cdot A_{n-1}(x).$$

Remarque: Si $(A_n(x))_{n \geq 0} \subset \mathbb{Z}_p[x]$ est une famille d'Appell, alors, pour tout n , le polynôme $A_n(x)$ est une pseudo-puissance n de x .

Exemples: a) La suite définie par $A_n(x) = (1+x)^n$.

b) La suite $(B_n(x))_{n \geq 0}$ des *polynômes de Bernoulli* définie par la fonction génératrice

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

c) La suite $(E_n(x))_{n \geq 0}$ des *polynômes d'Euler* définie par

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n \geq 0} E_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 3: Pour une famille d'Appell $(A_n(x))_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{Z}_p[x]$, les affirmations suivantes sont équivalentes

- (i) Il existe un entier $a \in \mathbb{Z}_p$ pour lequel la suite $(A_n(a))$ est une $p - F$ suite;
- (ii) La suite $(A_n(x))$ est une suite de Honda.

Preuve: l'implication (ii) \Rightarrow (i) est immédiate; elle découle directement du corollaire 1. Pour démontrer la réciproque (i) \Rightarrow (ii), il s'agit de voir, par exemple (cf. Proposition 1), que

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} A_n(x) \frac{z^n}{n} \right) \in \mathbb{Z}_p[x][[z]].$$

Or, si l'on pose

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} A_n(x) \frac{z^n}{n} \right) = \sum_{n \geq 0} q_n(x) z^n,$$

on peut calculer les coefficients $q_n(x)$ et constater qu'ils vérifient la relation

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n-1+A_0}{k} q_{n-k}(a)(x-a)^k.$$

L'hypothèse stipule que la série

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} A_n(a) \frac{z^n}{n} \right) = \sum_{n \geq 0} q_n(a) z^n,$$

appartient à $\mathbb{Z}_p[[z]]$ puisque $\sum_{n \geq 0} q_n(a) \frac{z^n}{n}$ est de type $p - T$ sur \mathbb{Z}_p . Comme $q_n(a) \in \mathbb{Z}_p$, il s'ensuit que $q_n(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ceci achève la preuve. ■

III. EXEMPLES DE SUITES DE HONDA

a) Commençons par citer quelques suites de polynômes à deux variables. Pour cela, considérons la suite $(V_n(x, y))_{n \geq 0}$ définie récursivement par la formule

$$\begin{cases} V_{n+1} &= \gamma x V_n + \delta y V_{n-1}; \\ V_0 = \alpha &, \quad V_1 = \beta x. \end{cases}$$

On peut montrer [8] que la suite correspondant au choix de paramètres $\alpha = 2$, $\beta = \gamma$ et $\delta \in \mathbb{Z}_p$ est une suite de Honda. En prescrivant des valeurs numériques particulières à ces paramètres on obtient quelques suites bien connues; notamment celle des *polynômes de Lucas* à deux variables ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = 1$) et à une variable ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \delta = y = 1$), puis celle des *polynômes de Tchebychev* à deux variables ($\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$ et $\delta = -1$).

b) Les *polynômes de Legendre* $(P_n(x))_{n \geq 0} \subset \mathbb{Z}[1/2][x]$ définis par la fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n,$$

donnent lieu pour $p \neq 2$ à deux suites de Honda $H_n(x) := P_n(x)$ et $H_n(x) := P_{n-1}(x)$. En effet, si l'on pose $R := \sqrt{1-2xz+z^2}$, alors on peut montrer que les séries formelles

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n \geq 1} P_{n-1}(x) \frac{z^n}{n}\right) &= \frac{z-x+R}{1-x}, \\ \exp\left(\sum_{n \geq 1} P_n(x) \frac{z^n}{n}\right) &= \frac{2}{1-xz+R} \end{aligned}$$

ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}[1/2]$. On trouvera une preuve simple de ce résultat dû à Taira Honda [4] dans [6].

c) Les *polynômes de Tchebychev* de première espèce $(T_n(x))_{n \geq 0}$, définis par la relation $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, définissent, pour $p \neq 2$, une suite de Honda. Ceci se déduit de la relation

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} T_n(x) \frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n$$

dans laquelle réapparaissent les polynômes de Legendre (qui, comme on l'a vu, sont à coefficients dans $\mathbb{Z}[1/2]$).

b) Voyons maintenant une application de la proposition 3. Rappelons que les polynômes d'Euler $E_n(x)$ définis par la fonction génératrice

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n \geq 0} E_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

forment une suite d'Appell dans $\mathbb{Z}_p[x]$, ($p \neq 2$). Nous allons démontrer que

La suite des polynômes d'Euler est une suite de Honda.

En vertu de la proposition 3, il suffit de trouver un entier p -adique a pour lequel $(E_n(a))_{n \geq 0}$ soit une p - F suite. En étudiant la fonction génératrice, on observe que, pour tout $n \geq 0$, $E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$. Et de là, suit la propriété

$$S_k(N) := 1^k - 2^k + \dots + (-1)^N (N-1)^k = \frac{-E_k(0) + (-1)^N E_k(N)}{2}, \quad (k \in \mathbb{N}, N > 2).$$

La congruence

$$\ell^{np} \equiv \ell^n \pmod{np\mathbb{Z}_p},$$

(que l'on démontre à l'aide du théorème des accroissements finis) entraîne directement la suivante

$$S_{np}(N) \equiv S_n(N) \pmod{np\mathbb{Z}_p}.$$

Il s'ensuit que

$$(-1)^N \{E_{np}(N) - E_n(N)\} \equiv E_{np}(0) - E_n(0) \pmod{np\mathbb{Z}_p}.$$

Si N est un entier impair assez proche de 0, par exemple $N = p$, alors $|N| \leq r_e = |p|^{1/(p-1)}$ et le théorème des accroissements finis montre que la dernière congruence peut s'écrire

$$-\{E_{np}(0) - E_n(0)\} \equiv E_{np}(0) - E_n(0) \pmod{np\mathbb{Z}_p};$$

et ceci montre que $E_{np}(0) - E_n(0) \equiv 0 \pmod{np\mathbb{Z}_p}$. Autrement dit, que la suite $(E_n(0))_{n \geq 0}$ est une p - F - suite. ■

IV. UNE CONJECTURE SUR LES POLYNOMES D'EULER

Nous terminons cet article par une conjecture que nous livrons à la perspicacité du lecteur.

Sur l'espace vectoriel V des suites de polynômes à coefficients dans \mathbb{Q}_p , considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \quad V &\longrightarrow V \\ (v_n)_{n \geq 1} &\longmapsto \Psi((v_n)) \end{aligned}$$

définie comme suit

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} v_n \frac{z^n}{n} \right) = \sum_{n \geq 0} \Psi((v_n)) z^n.$$

On dit que les suites (v_n) et $\Psi((v_n))$ sont liées par l'identité de Spitzer [1].

Conjecture: Si $(E_n(x))$ désigne la suite des polynômes d'Euler, alors $\Psi^k(E_n(x))$ est une suite de Honda pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque: Nous avons établi le cas $k = 1$.

REFERENCES:

- [1] Cartier P. et Foata D. : Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements), *LN 85, Springer Verlag, 1969.*
- [2] van Hamme L. : The p -Adic Moment Problem ,
in p-adic Functional Analysis
Editorial Universidad de Santiago-Chile (1994). p. 151-163.
- [3] Hazewinkel M. : Formal Groups and Applications
Academic Press, Mathematics 78, 1978
- [4] Honda T. : Two congruence properties of Legendre polynomials,
Osaka Journal of Math. 13, 1976. p. 131-133.
- [5] Robert A. : Le théorème des accroissements finis p -adique,
Ce Volume.
- [6] Robert A. : Polynômes de Legendre mod p ,
Publication du Département de Mathématiques Pures, Université Blaise Pascal,
Clermont 2. (à paraître).
- [7] Zuber M. : Propriétés p -adiques de polynômes classiques,
Thèse 1992. Inst. de Mathématiques, CH-2007 Neuchâtel.
- [8] Zuber M. : Une suite récurrente remarquable,
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318. Série I. p. 205-208. 1994.

- [9] Zuber M. : Propriétés de congruence de certaines familles classiques de polynômes,
C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 869-872, 1992

Maxime ZUBER
Institut de Mathématiques
Emile-Argand 11
CH-2007 NEUCHATEL
(Suisse)