ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

MARIN GUTAN

Sur une classe d'hypergroupes de type C

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 1, n° 1 (1994), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1994__1_1_1_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 1, N° 1, 1994, pp. 1 - 19

Sur une classe d'hypergroupes de type C

par Marin GUTAN

Résumé : Soit m entiers naturels $n_1, \ldots, n_m$ tels que $1 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_m$. On note par $\mathcal{H}_{1,n_1,\ldots,n_m}$ la classe de tous les hypergroupes de type C pour lesquels la partition associée à l'élément neutre est constituée de $m+1$ classes admettant respectivement $1, n_1, \ldots, n_m$ éléments.

Dans ce travail , on détermine , à isomorphisme près, tous les hypergroupes de la classe $\mathcal{C}_m = \mathcal{H}_{1,2,\ldots,2}$ ($n_1 = \ldots = n_m = 2$). On montre que tous les hypergroupes de $\mathcal{C}_m$ sont des D-hypergroupes et que le nombre d'hypergroupes deux à deux non isomorphes de la classe $\mathcal{C}_m$ est égal au nombre de groupes commutatifs, deux à deux non isomorphes d'ordre $2m+1$.

Abstract : If $n_1, \ldots, n_m$ are positive integers such that $1 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_m$, we denote by $\mathcal{H}_{1,n_1,\ldots,n_m}$ the class of all the hypergoups of type C for which the partition associated to the identity has $m+1$ classes and these classes respectively contain $1, n_1, \ldots, n_m$ elements.

In this paper all the hypergroups of the class $\mathcal{C}_m = \mathcal{H}_{1,2,2,\ldots,2}$ ($n_1 = \ldots = n_m = 2$) are determined (up to isomorphism). It is shown that all the hypergroups of $\mathcal{C}_m$ are D-hypergroups and the number of non-isomorphic hypergroups of $\mathcal{C}_m$ is equal to the number of non-isomorphic commutative groups having $2m+1$ elements.

1. Introduction

Un hypergroupe $(H, \circ)$ qui vérifie les conditions suivantes :

i) Il existe $e \in H$ tel que $x \circ e = x$ pour tout $x \in H$;

ii) Pour tous $x, y, z \in H$ tels que $x \circ y \cap x \circ z \neq \emptyset$ on a $e \circ y = e \circ z$;

s'appelle un *hypergroupe de type C* (weak cogroup [1]).

Un hypergroupe de type C est un *cogroupe* si $|y \circ x| = |z \circ x|$ pour tous $x, y, z \in H$ (on a noté par $|A|$ le cardinal de l'ensemble A).

Si $(H, \circ)$ est un hypergroupe de type C et e est l'élément neutre de H on peut définir sur H une relation d'équivalence "$\approx$" par :

$$x \approx y \text{ si et seulement si } e \circ x = e \circ y.$$

L'ensemble $H/_{\approx}$ de toutes les classes d'équivalence relatives à la relation d'équivalence "$\approx$", muni de l'hyperloi naturelle, est un polygroupe (quasi-canonical hypergroup) (voir [1] , [2]). On dit que deux hypergroupes de type C , H et K, sont *équivalents* si leurs polygroupes associés, $H/_{\approx}$ et $K/_{\approx}$ sont isomorphes.

On connaît trois méthodes pour obtenir des cogroupes : la méthode de Krasner, la méthode de Utumi et la méthode de Haddad et Sureau.

Soient $(\mathcal{G}, .)$ un groupe et g un sous-groupe de $\mathcal{G}$. On peut définir sur $\mathcal{G}/g = \{xg | x \in \mathcal{G}\}$ une hyperloi "$\circ$" par :

$$(xg) \circ (yg) = \{zg | z \in xgy\}.$$

Alors $(\mathcal{G}/g, \circ)$ est un cogroupe et M. Krasner a nommé *D-hypergroupe* tout hypergroupe isomorphe à un hypergroupe de ce type.

J.Eaton ([3]) pose la question : tout cogroupe est-il un D-hypergroupe? C'est Y. Utumi ([11]) qui a indiqué une méthode pour obtenir des cogroupes qui ne sont pas des D-hypergroupes.

Soit $(H, \circ)$ un D-hypergroupe et soit θ une relation d'équivalence sur H qui vérifie les conditions suivantes :

i) $\theta(e) = \{e\}$;

ii) $\theta(x \circ (\theta(y))) = (\theta(x)) \circ (\theta(y))$;

iii) $e \circ x \subseteq \theta(x)$

pour tous $x, y \in H$(θ s'appelle une *partition de Utumi* pour H). Alors sur l'ensemble H on peut définir une hyperloi "$\bullet$" par :

$$x \bullet y = x \circ (\theta(y)), \text{ pour tous } x, y \in H$$

et $H^{*\theta} = (H, \bullet)$ est un cogroupe.

Les hypergroupes qui peuvent être obtenus par cette méthode sont appelés des *hypergroupes de type Utumi*. En utilisant cette technique Y. Utumi ([11]) a donné un exemple de cogroupe d'ordre huit qui n'est pas un D-hypergroupe. De plus , dans [4], on a démontré que tous les cogroupes ayant tout au plus sept éléments sont des D-hypergroupes. S. Comer ([1]) a posé la question : tous les cogroupes sont-ils des cogroupes de type Utumi?

L. Haddad et Y. Sureau ([5] ,[6]) ont donné des caractérisations pour les D-hypergroupes et les cogroupes de type Utumi en utilisant les multiplicateurs (voir aussi M. Krasner [4] et Y. Utumi [11]).

On appelle *multiplicateur* de l'hypergroupe $(H, \circ)$ une permutation σ de H telle que $\sigma(x \circ y) = \sigma(x) \circ y$ pour tous x et y de H. Si $\mathcal{G}$ est un groupe de multiplicateurs de H et $x \in H$ on note $\mathcal{G}(x) = \{\sigma(x) | \sigma \in \mathcal{G}\}$. Un multiplicateur σ de H s'appelle un *multiplicateur spécial* relativement à l'élément x de H si $\sigma(x) = x$.

1.1. Théorème ([6]) . *Soit $(H, \circ)$ un cogroupe et soit e l'élément neutre de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *H est un D-hypergroupe;*

ii) *Il existe un groupe $\mathcal{G}$ de multiplicateurs de H tel que :*

  α) *$g(x) = e \circ x$ pour tout $x \in H$ (avec $g = \{\sigma \in \mathcal{G} | \sigma(e) = e\}$) ;*

  β) *$\mathcal{G}(e) = H$.*

De plus , dans ce cas , H est isomorphe au D-hypergroupe $\mathcal{G}/g$. ■

1.2. Théorème ([6]) . *Soit $(H, \circ)$ un cogroupe et soit e l'élément neutre de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

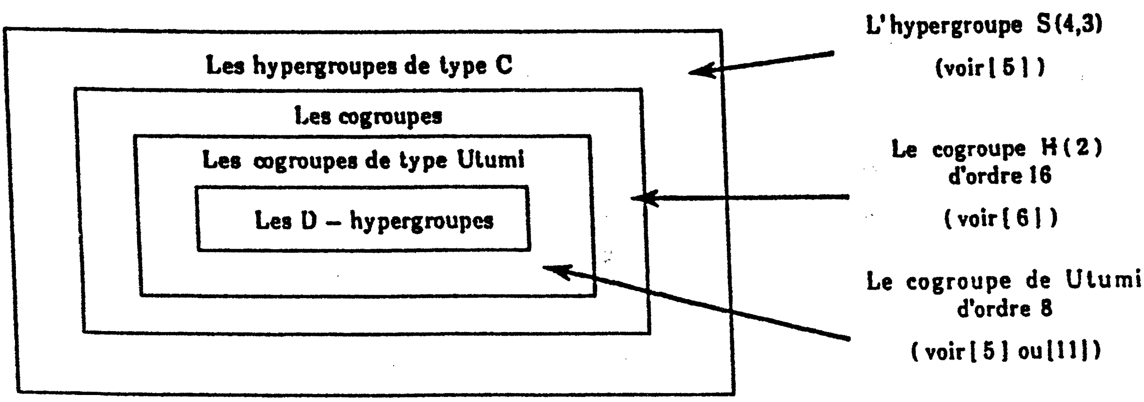
i) *H est de type Utumi;*

ii) *Il existe un groupe $\mathcal{G}$ de multiplicateurs de H tel que $\mathcal{G}(e) = H$.* ■

Dans [6], L. Haddad et Y. Sureau ont donné une réponse négative pour le problème de Comer. Ils ont indiqué une méthode pour obtenir des cogroupes qui ne sont pas de type Utumi et pour lesquels le polygroupe associé est présenté par le tableau :

•	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0,1,2	1,2
2	2	1,2	0,1,2

Les relations entre les hypergroupes de type C, les cogroupes, les cogroupes de type Utumi et les D-hypergroupes peuvent être présentées par le diagramme :



Dans [2], S. Comer a posé le problème suivant : " Trouver une famille de constructions qui permettent d'obtenir tous les cogroupes (les cogroupes finis) en utilisant les groupes (les groupes finis)". Dans ce travail nous donnons une réponse partielle à ce problème. Nous montrons qu'on peut obtenir tous les hypergroupes de la classe $\mathcal{C}_n = \mathcal{H}_{1,2,2,\ldots,2}$ (n fois 2) en utilisant les groupes commutatifs d'ordre $2n+1$.

2. Une méthode générale pour obtenir des hypergroupes de $\mathcal{C}_n$

Dans [4] , en étudiant les hypergroupes de type C ayant au plus sept éléments , nous avons trouvé trois hypergroupes :

$H_{1,2}$

o	1	2
1	1	2,3
2	2	1,3
3	3	1,2

$H_{1,2,2}$

o	1	2	4
1	1	2,3	4,5
2	2	1,4	3,5
3	3	1,5	2,4
4	4	3,5	1,2
5	5	2,4	1,3

$H_{1,2,2,2}$

o	1	2	4	6
1	1	2,3	4,5	6,7
2	2	1,4	3,6	5,7
3	3	1,5	2,7	4,6
4	4	2,6	1,7	3,5
5	5	3,7	1,6	2,4
6	6	4,7	2,5	1,3
7	7	5,6	3,4	1,2

avec $H_{1,2} \in \mathcal{C}_1$, $H_{1,2,2} \in \mathcal{C}_2$, $H_{1,2,2,2} \in \mathcal{C}_3$.

De plus, pour $n \in \{1,2,3\}$, dans [4] , il est montré qu'il existe , à isomorphisme près, un seul hypergroupe dans la classe $\mathcal{C}_n$.

Un premier exemple général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, +)$, $\mathbb{Z}/_{(2n+1)} = \{0, 1, \ldots, 2n\}$.

Soit θ l'équivalence sur le groupe $\mathbb{Z}/_{(2n+1)}$ pour laquelle les classes d'équivalence sont :

$$\overline{0} = \{0\},\ \overline{1} = \overline{2n} = \{1, 2n\}, \overline{2} = \overline{2n-1} = \{2, 2n-1\}, \ldots, \overline{n} = \overline{n+1} = \{n, n+1\}.$$

Donc $\overline{x} = \{\alpha x | \alpha \in \{-1,1\}\}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/_{(2n+1)}$.

Alors $\overline{x} + \overline{y} = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in \{-1,1\}\}$ et $\overline{x+y} = \overline{\{x + \beta y \mid \beta \in \{-1,1\}\}} = \{\alpha(x+\beta y) \mid \alpha, \beta \in \{-1,1\}\}$, donc $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}/_{(2n+1)}$. Il s'ensuit que $\left(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}\right)^{*\theta} = \left(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus\right)$ est un cogroupe de type Utumi.

Si $x, y \in \mathbb{Z}/_{(2n+1)}$ on a $x \oplus y = \{x+y\} \cup \{x-y\}$ et l'hyperloi "$\oplus$" peut être présentée par le tableau :

$\oplus$	0	1	2	...	n
0	0	1,2n	2,2n−1	...	n,n+1
1	1	0,2	3,2n	...	n+1,n+2
2n	2n	0,2n−1	2n−2,1	...	n,n−1
2	2	1,3	0,4	...	n+2,n+3
2n−1	2n−1	2n,2n−2	0,2n−3	...	n−1,n−2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	n−1,n+1	n−2,n+2	...	0,2n
n+1	n+1	n+2,n	n+3,n−3	...	0,1

Donc $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus) \in \mathcal{C}_n$.

Soient α et β deux permutations de $\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \alpha = [0\ 1\ 2\ 3\ \ldots (2n-1)\ (2n)]$ et $\beta = [1(2n)]\ [2(2n-1)] \ldots [n(n+1)]$. Alors $\alpha(s) = s+1$ et $\beta(s) = 2n+1-s$ pour tout $s \in \mathbb{Z}/_{(2n+1)}$. On peut vérifier que α et β sont des multiplicateurs pour le cogroupe $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$. Soit $\mathcal{G}$ le sous-groupe du groupe des permutations de $\mathbb{Z}/_{(2n+1)}$ engendré par α et β et soit g le sous-groupe de $\mathcal{G}$ engendré par β. On a $g = <\beta \mid \beta^2 = 1> = \{1, \beta\}$ et $\mathcal{G} = <\alpha, \beta \mid \alpha^{2n+1} = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1> = D_{2n+1}$ (le groupe des transformations de symétrie d'un polygone régulier à $2n+1$ cotés).

En utilisant le théorème 1.1 on obtient que $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$ est un D-hypergroupe et $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus) \simeq (\mathcal{G}/g, \circ)$.

L'isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$ et $(\mathcal{G}/g, \circ)$ est $\phi : \mathbb{Z}/_{(2n+1)} \longrightarrow \mathcal{G}/g, \phi(s) = \alpha^s g$ pour tout $s \in \mathbb{Z}/_{(2n+1)}$.

2.1. Proposition . *Le cogroupe $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$ a $\tau(2n+1)$ sous-hypergroupes, où $\tau(s)$ est le nombre des diviseurs de s pour tout $s \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration : L'ensemble des sous-hypergroupes de $(\mathcal{G}/g, \circ)$ est $\{\mathcal{G}'/g | \mathcal{G}'$ sous-groupe de $\mathcal{G}$ avec $g \subseteq \mathcal{G}'\}$. Soit $\mathcal{G}'$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$ tel que $g \subseteq \mathcal{G}'$ et $|\mathcal{G}'| = 2(2t+1)$, où $2t+1$ divise $2n+1$, donc $2n+1 = (2t+1)(2s+1)$, avec $t, s \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{G}' \cap < \alpha >$ est un sous-groupe du groupe cyclique engendré par α. Donc $\mathcal{G}' \cap < \alpha > = < \alpha^m >$ avec m diviseur de $2n+1$. Si $d = \dfrac{2n+1}{m}$ on a $\mathcal{G}' \cap < \alpha > =$

$$= \{1, \alpha^m, \alpha^{2m}, \ldots, \alpha^{(d-1)m}\} \text{ et } \mathcal{G}' = \{1, \alpha^m, \ldots, \alpha^{(d-1)m}\} \cup \{\beta, \beta\alpha^m, \ldots, \beta\alpha^{(d-1)m}\}.$$

Donc $d = 2t+1, m = 2s+1, \mathcal{G}' = < \alpha^{2t+1}, \beta >, \mathcal{G}'/g = \{1.g, \alpha^m.g, \alpha^{2m}.g, \ldots, \alpha^{2tm}.g\}$ et $\phi^{-1}(\mathcal{G}'/g) = \{0, m, 2m, \ldots, 2tm\} = \{0\} \cup \{m, 2tm\} \cup \{2m, (2t-1)m\} \cup \ldots$. Ainsi on obtient qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-hypergroupes du cogroupe $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$ et l'ensemble des diviseurs de $2n+1$. ■

Remarque . Le treillis des sous-hypergroupes du cogroupe $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$ est isomorphe au treillis des diviseurs de $2n+1$.

2.3. Exemple . Les sous-hypergroupes du cogroupe $(\mathbb{Z}/_{(9)}, \oplus)$ sont : $\{0\}, \{0,3,6\}$ et $\mathbb{Z}/_{(9)}$.

Pour $n \in \{1,2,3\}$ tous les hypergroupes de la classe $\mathcal{C}_n$ sont isomorphes à l'hypergroupe $(\mathbb{Z}/_{(2n+1)}, \oplus)$. En étudiant la classe $\mathcal{C}_3$ on peut remarquer qu'elle contient, à isomorphisme près , deux hypergroupes ,$(\mathbb{Z}/_{(9)}, \oplus)$ et l'hypergroupe présenté par le tableau :

$\circ$	e	x_1	x_2	x_3	x_4
e	e	x_1, x'_1	x_2, x'_2	x_3, x'_3	x_4, x'_4
x_1	x_1	e, x'_1	x_3, x_4	x_2, x'_4	x'_2, x'_3
x'_1	x'_1	e, x_1	x'_3, x'_4	x'_2, x_4	x_2, x_3
x_2	x_2	x'_3, x_4	e, x'_2	x_1, x'_4	x'_1, x'_3
x'_2	x'_2	x_3, x'_4	e, x_2	x'_1, x_4	x_1, x'_3
x_3	x_3	x'_2, x'_4	x_1, x_4	e, x'_3	x'_1, x_2
x'_3	x'_3	x_2, x_4	x'_1, x'_4	e, x_3	x_1, x'_2
x_4	x_4	x_2, x'_3	x_1, x_3	x'_1, x'_2	e, x'_4
x'_4	x'_4	x'_2, x_3	x'_1, x'_3	x_1, x_2	e, x_4

Un deuxième exemple général

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif d'ordre $2n+1$ et soit θ la relation d'équivalence sur G pour laquelle les classes d'équivalence sont $\overline{x} = \{x\} \cup \{-x\}$, pour tout $x \in G$. On peut vérifier que $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+\overline{y}}$ pour tous $x,y \in G$, et , si on considère l'hyperloi "$\oplus$" sur G définie par :

$$x \oplus y = x + \overline{y} \quad \text{pour tous} \quad x,y \in G$$

on obtient un cogroupe $G^{*\theta} = (G,\oplus)$ et $G^{*\theta} \in \mathcal{C}_n$. Soient les permutations φ et $(\beta_x)_{x\in G}$ de G définies par :

$$\varphi(\lambda) = -\lambda \ , \ \beta_x(\lambda) = x + \lambda \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in G.$$

Alors φ et β_x sont des multiplicateurs de $(G,\oplus)$,

$$\beta_x \circ \beta_y = \beta_{x+y} \quad \text{et} \quad \varphi \circ \beta_x \circ \varphi = \beta_{-x} = (\beta_x)^{-1}.$$

Soient les sous-groupes du groupe des permutations de $G, \mathcal{G} =< \{\varphi\} \cup \{\beta_x\} x \in G\} >$ et $g = \{1,\varphi\}$ donc $\mathcal{G} = \{\beta_x | x \in G\} \cup \{\varphi \circ \beta_x | x \in G\}$. Alors $\mathcal{G}/g = \{\beta_x g | x \in G\}$ et $(\beta_x g) \circ (\beta_y g) = \{\beta_{x+y} g\} \cup \{\beta_{x-y} g\}$. Si on considère $\phi : G \longrightarrow \mathcal{G}/g, \phi(x) = \beta_x g$ pour tout $x \in G$, ϕ est un isomorphisme d'hypergroupes. Donc $(G,\oplus)$ est un D-hypergroupe et $(G,\oplus) \simeq (\mathcal{G}/g, \circ)$.

2.4. Remarque . En étudiant la classe $\mathcal{C}_3$ on peut noter qu'elle contient, à isomorphisme près, deux hypergroupes $(\mathbb{Z}/_{(9)},\oplus)$ et $(\mathbb{Z}/_{(3)} \times \mathbb{Z}/_{(3)},\oplus)$

3. Propriétés des hypergroupes de la classe $\mathcal{C}_n$

Soit $(H,\circ) \in \mathcal{C}_n$, donc $|H| = 1+2n$. Supposons que e est l'élément neutre de $H, H = \{e, x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n\}$, et la partition de H associée à l'élément neutre e est $P_e = \{\{e\},\{x_1,x'_1\},\ldots,\{x_n,x'_n\}\}$. Soit $\varphi : H \to H$ définie par :

$$\varphi(e) = e, \varphi(x_i) = x'_i \text{ et } \varphi(x'_i) = x_i \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Alors $\varphi \circ \varphi = 1_H$. Notons $x_i \circ x_j = A_{i,j}$ et $x'_i \circ x_j = A'_{i,j}$.

3.1. Lemme . *Pour tous $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ on a :*

$$A_{i,j} \cup A'_{i,j} = e \circ A_{i,j} = e \circ A'_{i,j}. \blacksquare$$

3.2. Lemme . *Pour tous $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ on a $|A_{i,j}| = |A'_{i,j}| = 2$ (donc tous les hypergroupes de C_n sont des cogroupes).* $\blacksquare$

3.3. Lemme . *Pour tous $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ on a :*

$$A'_{i,j} = \varphi(A_{i,j}) \quad \text{et} \quad A_{i,j} = \varphi(A'_{i,j}).$$

Démonstration : Soit $x \in A_{i,j}$. Si $x = e$, parce que $e \in e \circ A_{i,j} = e \circ A'_{i,j}$ il résulte $\varphi(x) = \varphi(e) = e \in A'_{i,j}$. Si $x \neq e$ alors $e \circ x = \{x, \varphi(x)\} \subseteq e \circ A_{i,j} = A_{i,j} \cup A'_{i,j}$. Donc $\varphi(x) \in A'_{i,j}$ car si $\varphi(x) \notin A'_{i,j}$ on a $A_{i,j} = \{x, \varphi(x)\} = A'_{i,j} \ni \varphi(x)$,ce qui est absurde. Il s'ensuit que $\varphi(A_{i,j}) \subseteq A'_{i,j}$, d'où on obtient $A'_{i,j} = \varphi(A_{i,j})$ et $A_{i,j} = \varphi(A'_{i,j})$. $\blacksquare$

3.4. Lemme . *φ est un multiplicateur spécial de $(H,\circ)$ relativement à e.* $\blacksquare$

3.5. Lemme . *$\{1,\varphi\}$ est le groupe des multiplicateurs spéciaux relativement à e de $(H,\circ)$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe ψ, un multiplicateur spécial relativement à l'élément e de $(H,\circ)$, tel que $\psi \neq 1_H$ et $\psi \neq \varphi$. Parce que $\psi(e) = e$ et $\psi(e \circ x) = e \circ x$ pour tout $x \in H$, on peut supposer que $\psi = [x_1x'_1]\ldots[x_kx'_k]$, où $k \in \mathbb{N}^*, k < n$. Alors $\psi(x_{k+1} \circ x) = x_{k+1} \circ x$ pour tout $x \in H$. Montrons que $x_1 \notin x_{k+1} \circ x$. Si $x_1 \in x_{k+1} \circ x$, on obtient $x'_1 = \psi(x_1) \in x_{k+1} \circ x$, donc $x_{k+1} \circ x = \{x_1, x'_1\}$ ce qui est absurde (voir lemme 3.7). Donc $x_1 \notin \bigcup\limits_{x \in H} x_{k+1} \circ x = x_{k+1} \circ H$,ce qui est absurde. $\blacksquare$

3.6. Proposition . *Soit $(H,\circ) \in C_n$, H cogroupe de type Utumi. Alors :*

i) *H est un D-hypergroupe ;*

ii) *Il existe un groupe $\mathcal{G}$ d'ordre $2(2n+1)$ et un sous-groupe g de $\mathcal{G}$, d'ordre 2, tels que $(H,\circ) \simeq (\mathcal{G}/g,\circ)$.* $\blacksquare$

3.7. Lemme . *Pour tous $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ on a :*

$$A_{i,j} \neq \{x_k, x'_k\} \neq A'_{i,j}.$$

Démonstration : Supposons le contraire : $x_i \circ x_j = A_{i,j} = \{x_k, x'_k\} = A'_{i,j} = x'_i \circ x_j$. Evidemment $k \neq i$. Soit $x_j^{-1} = \{x_\ell, x'_\ell\}$ avec $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $x_i \in x_k \circ x_j^{-1} = x_k \circ x_\ell$ et $x'_i \in x_k \circ x_\ell$, donc $x_k \circ x_\ell = \{x_i, x'_i\} = x'_k \circ x_\ell$. Soit $x_j \circ x_j^{-1} = \{e, \alpha\}$, où $\alpha \in H \backslash \{e\}$. Alors $\{x_i, x'_i\} = (x_i \circ x_j) \circ x_\ell = x_i \circ (x_j \circ x_\ell) = \{x_i\} \cup x_i \circ \alpha$. Donc $x_i \circ \alpha = \{x_i, x'_i\}$, c'est-à-dire $x_i \in x_i \circ \alpha$ et $\alpha \neq e$,ce qui est absurde. ∎

3.8. Lemme . *Soit $x, y \in H \backslash \{e\}$. Alors :*

i) $|e \circ x \circ y| \in \{3, 4\}$;

ii) $|e \circ x \circ y| = 3$ *si et seulement si* $e \in x \circ y$;

iii) Si $x \circ y \cap \varphi(x) \circ y \neq \emptyset$ *il résulte que* $x \circ y \cap \varphi(x) \circ y = \{e\}$.

Démonstration : Soit $x \circ y = \{u, v\}$, où $u, v \in H$.

i) $2 = |x \circ y| \leq |e \circ x \circ y| = |e \circ u \cup e \circ v| \leq |e \circ u| + |e \circ v| \leq 4$.
Supposons $|e \circ x \circ y| = 2$. Alors $e \circ u = e \circ v$,ce qui est absurde (voir lemme 3.7).

ii) Si $|e \circ x \circ y| = 3$ il résulte que $e \circ u \neq e \circ v$ donc on peut supposer que $|e \circ u| = 1$. Ainsi on a : $u = e \in x \circ y$.

iii) Si $x \circ y \cap \varphi(x) \circ y \neq \emptyset$ il résulte que $|e \circ x \circ y| = 3$, donc $e \in x \circ y \cap \varphi(x) \circ y$. ∎

3.9. Lemme . *Soient $x \in H \backslash \{e\}$ et $y \in H$. Alors :*

i) $|x \circ y \cap \varphi(x) \circ y| < 2$;

ii) $|x \circ \varphi(x) \cap \varphi(x) \circ x| < 2$. ∎

3.10. Lemme . *Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, on a :*

$$A_{i,i} \neq \{x'_i, x_j\},\ A_{i,i} \neq \{x'_i, x'_j\},\ A'_{i,i} \neq \{x_i, x_j\} \quad \text{et} \quad A'_{i,i} \neq \{x_i, x'_j\}.$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, tels que $A_{i,i} = \{x'_i, x_j\}$. On peut considérer $i = 1$ et $j = 2$, donc $A_{1,1} = \{x'_1, x_2\}$. Alors

$$\{x'_1, x_2\} \cup x_1 \circ x_2 = x_1 \circ x'_1 \cup x_1 \circ x_2 = x_1 \circ (x_1 \circ x_1) = (x_1 \circ x_1) \circ x_1 = x'_1 \circ x_1 \cup x_2 \circ x_1 = \{x_1, x'_2\} \cup x_2 \circ x_1.$$

Il résulte que $x_1 \in x_1 \circ x_2$, ce qui est absurde. ∎

3.11. Lemme . *Soient $x, y \in H$ tels que $\varphi(x) \in x \circ y$. Alors $e \in y \circ y$.*

Démonstration : Si $\varphi(x) \in x \circ y$ on a que $x \in \varphi(x) \circ y \cap \varphi(x) \circ y^{-1}$, donc $y^{-1} = \{y\} \cup \{\varphi(y)\}$. ■

3.12. Lemme . *Il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $e \in A_{i,i}$.* ■

3.13. Lemme . *Soit H' un sous-hypergroupe de H et soit $x \in H \backslash H'$. Alors $x \circ H' \cap \varphi(x) \circ H' = \emptyset$.*

Démonstration : Supposons $x \circ H' \cap \varphi(x) \circ H' \neq \emptyset$. Alors $x \circ H' = \varphi(x) \circ H' = x \circ H' \cup \varphi(x) \circ H' = e \circ x \circ H'$, donc $x \circ H'$ est une réunion de classes de $P_e \backslash \{\{e\}\}$. Il s'ensuit que $|x \circ H'| = |H'|$ est un nombre pair,ce qui est absurde, parce que $|H'|$ divise $|H|$. ■

3.14. Lemme . *Soit $x \in H$. Alors :*

$$e \cup x \cup x^2 \cup x^3 \cup \ldots = e \cup x^2 \cup x^4 \cup \ldots$$

Démonstration : Soit $H' = e \cup x \cup x^2 \cup x^3 \cup \ldots$ le sous-hypergroupe de H engendré par x et $H" = e \cup x^2 \cup x^4 \cup \ldots$. Parce que $H" \circ H" \subseteq H"$ il résulte que $H"$ est un sous-hypergroupe de H'. Mais $H' = H" \cup x \circ H"$ et $H" \cap x \circ H" \neq \emptyset$. Donc $H' = H"$. ■

3.15. Proposition . *Soit $H \in \mathcal{C}_n$. Alors H n'est pas isomorphe à un hypergroupe $H' \times H"$, où H' et $H"$ sont des hypergroupes de type C ayant au moins deux éléments.*

Démonstration : Supposons H est isomorphe à un hypergroupe $H' \times H"$, où $H' \in \mathcal{H}_{1,n_1,\ldots,n_k}$ et $H" \in \mathcal{H}_{1,n'_1,\ldots,n'_\ell}$. Il s'ensuit que $H' \times H" \in \mathcal{H}_{(1+n_1+\ldots n_k).(1+n'_1+\ldots+n'_\ell)}$, donc $n_k n'_\ell = 2$, d'où on obtient $n'_1 = \ldots = n'_\ell = 1$, c'est-à-dire que $H"$ est un groupe. Mais alors on a $1 = |s(H)| = |s(H' \times H")| = 1 + \ell > 1$ ce qui est absurde (voir [4]). ■

4. Quand $G^{*\pi} \in \mathcal{C}_n$?

Soient $(G, .)$ un groupe , π une relation d'équivalence sur G et $\pi(x) = \overline{x} =$ la classe d'équivalence de l'élément $x \in G$ relative à la relation π. Supposons que $\overline{x}\overline{y} = \overline{\overline{x}\overline{y}}$ pour tous $x, y \in G$. On peut définir sur G une hyperloi "$\odot$" par :

$$x \odot y = x\overline{y}, \text{pour tous } x, y \in G.$$

et $(G, \odot)$ est un cogroupe. Notons ce cogroupe par $G^{*\pi}$.

4.1. Théorème . *$G^{*\pi} \in \mathcal{C}_n$ si et seulement si le groupe G et la relation d'équivalence π sur G vérifient les conditions suivantes :*

i) $|G| = 2n + 1$;

ii) $\pi(x) = \{x\} \cup \{x^{-1}\}$*pour tout* $x \in G$ *(* x^{-1} *est l'inverse de* x *dans le groupe* G *)*;

iii) *Gest commutatif.*

Démonstration : Si G et π vérifient les conditions i) - iii) alors évidemment $G^{*\pi} \in \mathcal{C}_n$ (le deuxième exemple général).

Supposons maintenant que $G^{*\pi} \in \mathcal{C}_n$. Alors $|G| = 2n + 1, \pi(1) = 1$ (1 étant l'élément neutre du groupe G) et $|\pi(x)| = 2$, pour tout $x \in G\backslash\{1\}$. Soit $\varphi : G \to G$ telle que $\pi(x) = \{x\} \cup \{\varphi(x)\}$ pour tout $x \in G$. Donc $\varphi(1) = 1$ et $\varphi \circ \varphi = 1_G$. Soit $x \in G\backslash\{1\}$. Alors $x \odot x^{-1} = \{1, x\varphi(x^{-1})\}$, $\varphi(x) \odot x^{-1} = \{\varphi(x)x^{-1}, \varphi(x)\varphi(x^{-1})\}$ et parce que $1 \in 1 \odot x \odot x^{-1}$, d'après le lemme 3.8 on a $1 \in x \odot x^{-1} \cap \varphi(x) \odot x^{-1}$. Mais $\varphi(x)x^{-1} \neq 1$, donc $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1$ et $\varphi(\varphi(x)x^{-1}) = x\varphi(x^{-1})$.

Il résulte que pour tout $x \in G$, on a :

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} \text{ et } \varphi(\varphi(x)x^{-1}) = (\varphi(x)x^{-1})^{-1}.$$

Pour démontrer ii) il suffit de prouver que la fonction $\psi : G \to G, \psi(x) = \varphi(x)x^{-1}$, pour tout $x \in G$, est surjective (injective). Montrons que ψ est injective . Evidemment $\psi(x) = 1$ si et seulement si $x = 1$.

Soient $x, y \in G\backslash\{1\}$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$, donc $\varphi(x)x^{-1} = \varphi(y)y^{-1}$. Notons $x^{-1} = z$. Alors on a $zy = \varphi(z)\varphi(y)$.

Parce que $z \odot y \cap \varphi(z) \odot y \neq \emptyset$, d'après le lemme 3.8, on obtient $zy = 1$ donc $y = z^{-1} = x$.

Il s'ensuit que ψ est injective et parce que $|G| < \aleph_0$ il résulte que ψ est surjective.

Donc $\pi(x) = \{x\} \cup \{x^{-1}\}$ pour tout $x \in G$. Démontrons maintenant iii). Soient $x, y \in G\backslash\{1\}, x \neq y$. Alors $\overline{x\overline{y}} = \{xy\} \cup \{xy^{-1}\} \cup \{y^{-1}x^{-1}\} \cup \{yx^{-1}\}$ et $\overline{x}\overline{y} = \{xy, xy^{-1}\} \cup \{x^{-1}y, x^{-1}y^{-1}\}$. Donc $x^{-1}y \in \overline{x\overline{y}}$. Si $x^{-1}y = xy$, on obtient $x^2 = 1$, ce qui est absurde . Si $x^{-1}y = y^{-1}x^{-1}$, on obtient $(xy)^2 = x^2$, donc $xy = x$, ce qui est absurde. Si $x^{-1}y = xy^{-1}$ on obtient que $x^2 = y^2$ donc $x = y$, ce qui est absurde. Il résulte que $x^{-1}y = yx^{-1}$, donc le groupe G est commutatif. ∎

5. Les hypergroupes de type Utumi de C_n

5.1. Théorème *Soit $(H, \circ) \in C_n$. Alors H est de type Utumi si et seulement si il existe un groupe $(G, .)$ commutatif, d'ordre $2n+1$, tel que $(H, \circ) \simeq (G, \odot)$, où $x \odot y = \{xy\} \cup \{xy^{-1}\}$, pour tous $x, y \in G$.*

Démonstration : Soit $(H, \circ) \in C_n, H$ de type Utumi. D'après le lemme 3.6, $(H, \circ)$ est isomorphe à un D-hypergroupe $(\mathcal{G}/g, \circ)$, où $\mathcal{G}$ est un groupe d'ordre $2(2n+1)$ et g est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ d'ordre 2. Parce que $1 = |s(\mathcal{G}/g)| = [N_{\mathcal{G}}(g) : g]$ il résulte que $N_{\mathcal{G}}(g) = g$. Parce que $[\mathcal{G} : N_{\mathcal{G}}(g)] = 2n+1$ il s'ensuit qu'il existe $2n+1$ 2-sous-groupes Sylow dans $\mathcal{G}$, donc il existe $2n+1$ éléments d'ordre 2 dans $\mathcal{G}$. Soit $A = \{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}$ l'ensemble des éléments d'ordre 2 de $\mathcal{G}$, avec $x_1 = \varphi \in g$, et soit $G = \mathcal{G} \backslash A$. On a $|A| = |G| = 2n+1$ et $\mathcal{G} = A \cup G$. Si $a \in A$ on a $\varphi a \notin A$ et $a\varphi \notin A$ donc $G = \varphi A = A\varphi$ et $\varphi G = G\varphi = A$. Pour tous $u, v \in \mathcal{G}$ on a $ord(v) = ord(u\ v\ u^{-1})$ donc $u\ A\ u^{-1} = A$ et $u\ Gu^{-1} = G$. Soit $a \in A$. Il existe $x \in G$ tel que $a = x\varphi x^{-1}$. Alors $A = xAx^{-1} = x\varphi Gx^{-1} = x\varphi x^{-1}xGx^{-1} = aG$, donc $AG = A$, $AA = G$ et $GG = AAAA = AGA = AA = G$. Il s'ensuit que G est un sous-groupe d'ordre $2n+1$ de $\mathcal{G}$. Pour tout $x \in G$ on a $\varphi x \in A$, donc $\varphi x \varphi x = 1$ ou $x^{-1} = \varphi x \varphi$.

Alors pour tous $x, y \in G$ on a $x^{-1}y^{-1} = \varphi x \varphi\ \varphi y \varphi = (xy)^{-1}$ d'où on obtient que $(G.)$ est un groupe comutatif.

Soit $\phi : G \to \mathcal{G}/g, \phi(x) = xg$, pour tout $x \in G$. Alors $\phi(xy) \cup \phi(xy^{-1}) = xyg \cup xy^{-1}g = xyg \cup x\varphi y \varphi g = xy \circ yg$ et on peut vérifier facilement que ϕ est injective (donc bijective). Alors l'hypergroupe $(H, \circ)$ est isomorphe au cogroupe $(G, \odot)$ où $x \odot y = \{xy\} \cup \{xy^{-1}\}$ pour tous $x, y \in G$. ■

6. Les hypergroupes cycliques de C_n

6.1. Proposition . *Soit $H \in C_n$ et soit $x \in H \backslash \{e\}$ tels que $e \in x \circ x$ et $H = e \cup x \cup x^2 \cup x^3 \cup \ldots$. Alors l'hypergroupe $(H, \circ)$ est isomorphe avec l'hypergroupe $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \oplus)$.*

Démonstration : Notons $x_\circ = e = x'_\circ$. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, l'affirmation est vraie. Soit $n \geq 4$, donc $|H| \geq 9$. Soit $x_1 \in H \backslash \{e\}$ tel que $e \in x_1 \circ x_1$ et $H = e \cup x_1 \cup x_1^2 \cup \ldots$. Démontrons qu'on peut considérer que $H = \{x_\circ, x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n\}$ tels que

$P_{x_\circ} = P_e = \{\{x_\circ\}, \{x_1, x'_1\}, \ldots, \{x_n, x'_n\}\}$ et :

$$(*)\begin{cases} x_1 \circ x_\ell = \{x'_{\ell-1}, x_{\ell+1}\}, x_\ell \circ x_1 = \{x_{\ell-1}, x_{\ell+1}\} \\ h_{\ell+1} \quad = x_1^1 \cup x_1^2 \cup \ldots \cup x_1^{\ell+1} = \{x_\circ\} \cup \{x_1, x'_1\} \cup \ldots \cup \{x_{\ell+1}, x'_{\ell-1}\} \cup \{x_\ell\} \cup \{x_{\ell+1}\} \end{cases}$$

pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (récurrence d'après ℓ). Pour $\ell = 1$ on peut considérer que $x_1 \circ x_1 = \{e, x_2\}$ car si $x_1 \circ x_1 = \{e, x'_1\}$ alors $|H| = 3$, ce qui est absurde. On a alors $h_2 = x_1 \cup x_1^2 = \{e, x_1, x_2\}$ donc les relations $(*)$ sont vérifiées.

Supposons que les relations $(*)$ sont vérifiées pour tout $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, où $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, et démontrons que les relations $(*)$ sont vérifiées pour $\ell = k+1$. Parce que $x_{k+1} \in x_k \circ x_1$, on obtient $x_k \in x_{k+1} \circ x_1$. On a aussi $x_1 \circ h_{k+1} = \bigcup\limits_{s=0}^{k+1} x_1 \circ x_s = h_{k+1} \cup x_1 \circ x_{k+1}$ et $h_{k+1} \circ x_1 = h_{k+1} \cup \{x'_k\} \cup x_{k+1} \circ x_1$. Donc $x'_k \in x_{k+1} \circ x_1$ et on peut supposer que $x_{k+1} \circ x_1 = \{x'_k, x_{k+2}\}$ parce que , si $x_{k+1} \circ x_1 \subseteq \{x_\circ, x_1, x'_1, \ldots, x_{k+1}, x'_{k+1}\}$ on obtient $[x] \subseteq [x]$, ce qui est absurde . Il s'ensuit que les relations $(*)$ sont vraies pour tout $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. On a aussi $x_1 \circ x_n = \{x'_{n-1}, x'_n\}$ et $x_n \circ x_1 = \{x_{n-1}, x'_n\}$. Considérons la famille d'éléments de H, $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$y_i = x_j \text{ si et seulement si } i = j \ mod(2n+1).$$

Nous avons démontré $y_t \circ y_s = \{y_{t+s}\} \cup \{y_{t-s}\}$ et $y_s \circ y_t = \{y_{s+t}\} \cup y_{s-t}\}$ pour tout $t \in \{0, 1, 2n\}$ et tout $s \in \{0, \ldots, 2n\}$. Montrons que les relations précédentes sont vraies pour tout $t \in \{0, \ldots, 2n\}$ (récurrence sur t).

On a $(y_1 \circ y_2) \circ y_s = \{y_s\} \cup \{y_{2n+1-s}\} \cup y_2 \circ y_s$ et $y_1 \circ (y_1 \circ s) = \{y_{2+s}\} \cup \{y_{2-s}\} \cup \{y_s\} \cup \{y_{-s}\}$ et alors $y_2 \circ y_s = \{y_{2+s}\} \cup \{y_{2-s}\}$. Donc les relations sont vraies pour $t \in \{0, 1, 2n-1, 2n\}$. Supposons que les relations sont vraies pour tout $t \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ et montrons qu'elles sont vraies pour $t = \ell+1$. On a $(y_1 \circ y_\ell) \circ y_s = y_{1+\ell} \circ y_s \cup y_{1-\ell} \circ y_s = y_{1+\ell} \circ y_s \cup \{y_{1-\ell-s}\} \cup \{y_{1-\ell+s}\}$ et $y_1 \circ (y_\ell \circ y_s) = \{y_{1+\ell+s}\} \cup \{y_{1+\ell-s}\} \cup \{y_{1-\ell-s}\} \cup \{y_{1-\ell+s}\}$. Donc $y_{1+\ell} \circ y_s = \{y_{1+\ell+s} \cup \{y_{1+\ell-s}\}$ d'où il s'ensuit $(H, \circ) \simeq (\mathbb{Z}_{2n+1}, \oplus)$. ■

6.2. Corollaire . *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n+1$ soit un nombre premier. Alors tous les hypergroupes de C_n sont isomorphes à l'hypergroupe $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \oplus)$.* ■

6.3. Corollaire . *Soit $H \in C_n$ tel qu'il existe $x \in H$ avec les propriétés : $e \in x \circ x$ et $H = e \cup x \cup x^2 \cup \ldots$. Alors $e \in y \circ y$ pour tout $y \in H$.* ■

6.4. Proposition . *Soit $H \in C_n$. Alors $e \in x \circ x$ pour tout $x \in H$.*

Démonstration : On peut supposer qu'il existe $a \in H \backslash \{e\}$ tel que $H = [a] = e \cup a \cup a^2 \cup \ldots$. Parce que $a \circ H = H \ni a' = \varphi(a)$ il existe $x \in H$ tel que $a \in a' \circ x$.

D'après le lemme 3.11, $e \in y \circ y$. Parce que $a \circ [x] \cap a' \circ [x] \neq \emptyset$ d'après le lemme 3.13, il résulte que $a \in [x]$. Mais $x \in (a')^{-1} \circ a \subseteq [a]$. Alors $[a] = [x]$ et $e \in x \circ x$ donc , d'après la proposition 6.1 , $e \in y \circ y$, pour tout $y \in H$. ■

6.5. Théorème : *Soit $H \in C_n$, H cyclique. Alors $(H, \circ)$ est isomorphe à l'hypergroupe $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \oplus)$.* ■

7. Tous les hypergroupes de C_n sont de type Utumi

Dans la suite H est un hypergroupe de C_n.

7.1. Lemme. *Soient $x, y \in H$, $x \neq y$. Alors $x \circ y \neq y \circ x$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe $x, y \in H$, $x \neq y$, tels que $x \circ y = y \circ x$. Alors $y \neq e, y \neq x, y \neq \varphi(x)$ et $y \notin [x]$ (théorème 6.5.). Soit $x \circ y = \{\alpha, \beta\}$, où $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \varphi(\beta)$.

Alors $y \in \alpha \circ x \cap \beta \circ x$ et $\alpha \circ x \cup \beta \circ x = (x \circ y) \circ x = (x \circ x) \circ y \ni \varphi(y)$. Donc , soit $\alpha \circ x = \{y, \varphi(y)\}$, soit $\beta \circ x = \{y, \varphi(y)\}$, ce qui est absurde (voir le lemme 3.7). ■

7.2. Lemme. *Soient $x, y \in H$. Alors $x \circ y \cap y \circ x \neq \emptyset$.*

Démonstration : Soit $P = H/_{\approx}$ le polygroupe associé au cogroupe H. Parce que $e \in x \circ x$, pour tout $x \in H$, le polygroupe P est commutatif (voir [1]). Supposons qu'il existe $x, y \in H$ tels que $x \circ y \cap y \circ x = \emptyset$. Alors $x \circ y = \{\alpha, \beta\}$ et $y \circ x = \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$, avec $\alpha, \beta \in H \backslash \{e\}$, $\alpha \neq \varphi(\beta)$. Mais, dans ce cas, on a $\varphi(x) \circ y = y \circ \varphi(x) = \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$, ce qui est absurde (lemme 7.1) . ■

7.3. Lemme. *Soient $x, y \in H$, $x \neq y$. Alors $|x \circ y \cap y \circ x| = 1$.* ■

7.4. Lemme. *Pour tous $x, y, z \in H$, $x \circ y \circ z = x \circ z \circ y$.* ■

7.5. Lemme. *La fonction $\psi : H \to H$,*

$$\psi(x) = \begin{cases} x \circ x \backslash \{e\} & \text{pour} \quad x \in H \backslash \{e\} \\ e & \text{pour} \quad x = e \end{cases}$$

est bijective.

Démonstration : Evidemment si $x \in H\backslash\{e\}$ alors $\psi(x) \neq e$. Supposons $x, y \in H\backslash\{e\}$ et $\psi(x) = \psi(y) = \alpha$. Alors $[x] = [y] = [\alpha]$ et, d'après le théorème 6.5, $x = y$. ■

Soit $x \in H\backslash\{e\}$ et soit la fonction $\beta_x : H \to H$

$$\beta_x(\lambda) = \begin{cases} x \circ \lambda \cap \lambda \circ x & si \quad \lambda \in H - \{x\} \\ x \circ x - \{e\} & si \quad \lambda = x. \end{cases}$$

D'après le lemme 7.3. , β_x est bien définie et $\beta_x(e) = x$.

7.6. Lemme. *Pour tout $x \in H\backslash\{e\}$, β_x est bijective.*

Démonstration : Il suffit de montrer que β_x est injective. Si $\lambda \in H\backslash\{x\}$ et $\beta_x(\lambda) = \beta_x(x)$ alors $x \circ \lambda \cap \lambda \circ x = x \circ x\backslash\{e\}$ donc $\lambda \in x^3$. Mais $\beta_x([x]) \subseteq [x]$ et $\beta_x|_{[x]}$ est injective. ■

Notons que $\beta_x(\varphi(x)) = e$.

7.7. Lemme. *Pour tout $\mu \in H$, $\beta_x(e \circ \mu) = \beta_x(e) \circ \mu$.*

Démonstration : Supposons $\mu \in H\backslash\{e\}$. Alors

$$\beta_x(e \circ \mu) = (x \circ \mu \cap \mu \circ x) \cup (x \circ \varphi(\mu) \cap \varphi(\mu) \circ x) =$$
$$= x \circ \mu \cap (\mu \circ x \cup \varphi(\mu) \circ x) = x \circ \mu \cap e \circ \mu \circ x = x \circ \mu \cap e \circ x \circ \mu =$$
$$= x \circ \mu = \beta_x(e) \circ \mu. \blacksquare$$

7.8. Lemme. *Soit $x, y \in H\backslash\{e\}$ tels que $x \circ x = \{e, y\}$. Alors $\beta_x \circ \beta_x = \beta_y$.*

Démonstration : Il faut montrer $\beta_x(\beta_x(\mu)) = \beta_y(\mu)$ pour tout $\mu \in H$. Si $\mu \in [x]$ l'égalité est vraie, d'après le théorème 6.5 . Soit $\mu \in H\backslash[x]$ et soient $x \circ \mu = \{s, t\} \subseteq H\backslash[x]$ et $\mu \circ x = \{s, \varphi(t)\}$. Alors $\beta_x(\beta_x(\mu)) = \beta_x(s) = x \circ s \cap s \circ x$. Parce que $s \circ x \cup t \circ x = x \circ \mu \circ x = x \circ x \circ \mu = e \circ \mu \cup y \circ \mu = x \circ s \cup x \circ t$, on obtient $e \circ \mu \cap y \circ \mu = \emptyset, s \circ x \cap t \circ x = \emptyset$ et $\varphi(\mu) \in t \circ x$ (parce que $\mu \in s \circ x$). Donc, si $y \circ \mu = \{\alpha, \beta\}$ alors $s \circ x = \{\mu, \alpha\}$ et $t \circ x = \{\varphi(\mu), \beta\}$. De l'égalité $\{\mu\} \cup \mu \circ y = \mu \circ x \circ x = s \circ x \cup \varphi(t) \circ x = \{\mu, \alpha, \varphi(\beta)\}$ on obtient $\mu \circ y = \{\alpha, \varphi(\beta)\}$, donc $\beta_y(\mu) = \alpha$.

Parce que $\mu \notin x \circ s$ (si $\mu \in x \circ s$ alors $x \circ s = \{\mu, \varphi(\alpha)\} \subseteq e \circ \mu \cup y \circ \mu = \{\mu, \varphi(\mu), \alpha, \beta\}$, ce qui est absurde) il résulte $\beta_x(s) = \alpha$. ■

7.9. Lemme. $\beta_x \circ \beta_{\varphi(x)} = \beta_{\varphi(x)} \circ \beta_x = 1_H$ *, pour tout $x \in H\backslash\{e\}$.*

Démonstration : Il faut montrer $\beta_{\varphi(x)}(\beta_x(\mu)) = \mu$, pour tout $\mu \in H$. Si $\mu \in [x]$ l'égalité est vraie, d'après le théorème 6.5 . Soit $\mu \in H\backslash[x]$ et soit $x \circ \mu = \{s,t\} \subseteq H\backslash[x]$ et $\mu \circ x = \{s, \varphi(t)\}$, donc $\beta_x(\mu) = s$.

Avec un raisonnement similaire à celui du lemme 7.8, on obtient $s \circ x = \{\mu, \alpha\}, t \circ x = \{\varphi(\mu), \beta\}, x \circ s = \{\varphi(\mu), \alpha\}, x \circ t = \{\mu, \beta\}$, où $y \circ \mu = \{\alpha, \beta\}$ et $\mu \circ y = \{\alpha, \varphi(\beta)\}$.

Alors $\beta_{\varphi(x)}(\beta_x(\mu)) = \beta_{\varphi(x)}(s) = \varphi(x) \circ s \cap s \circ \varphi(x) = \mu$. ■

7.10. Proposition. *Pour tout $x \in H\backslash\{e\}$, β_x est un multiplicateur relativement à l'élément x pour l'hypergroupe $(H, \circ)$.*

Démonstration : Il faut montrer $\beta_x(\lambda \circ \mu) = \beta_x(\lambda) \circ \mu$ pour tous $\lambda, \mu \in H$.
Si $\mu = e$ l'égalité est évidente et si $\lambda = e$ l'égalité est vraie, d'après le lemme 7.7. Supposons donc que $\lambda, \mu \in H\backslash\{e\}$.

Le cas $\lambda = x$. Soit $x \circ x = \{e, y\}$, avec $y \in H\backslash\{e\}$.
Il faut montrer $\beta_x(x \circ \mu) = \beta_x(x) \circ \mu$.
Pour $\mu \in [x]$ l'égalité est vraie, d'après 6.5.
Supposons $\mu \in H\backslash[x]$ et soit $x \circ \mu = \{s, t\}$ et $y \circ \mu = \{\alpha, \beta\}$.
Alors $\beta_x(x \circ \mu) \subseteq x \circ x \circ \mu = x \circ s \cup x \circ t = e \circ \mu \cup y \circ \mu = x \circ \mu \circ x = s \circ x \cup t \circ x$. Parce que $\mu \notin \beta_x(x \circ \mu)$ (si $\mu \in x \circ s \cap s \circ x$ on a $x \circ s = \{\mu, \alpha\}$ et $s \circ x = \{\mu, \varphi(\alpha)\} \nsubseteq x \circ x \circ \mu$, ce qui est absurde) et $\varphi(\mu) \notin \beta_x(x \circ \mu)$, il s'ensuit $\beta_x(x \circ \mu) = y \circ \mu$.

Le cas $\lambda \in H\backslash\{e, x\}$. Soit $\beta_x(\lambda) = \mu$ et soit $x \circ \lambda = \{u, v\}$, $\lambda \circ x = \{u, \varphi(v)\}$.
Alors $\beta_x(\lambda \circ \mu) \subseteq x \circ \lambda \circ \mu \cap \lambda \circ \mu \circ x = (u \circ \mu \cup v \circ \mu) \cap (u \circ \mu \cup \varphi(v) \circ \mu) = u \circ \mu \cup (v \circ \mu \cap \varphi(v) \circ \mu)$.
Si $v \circ \mu \cap \varphi(v) \circ \mu = \emptyset$ on a $\beta_x(\lambda \circ \mu) = u \circ \mu = \beta_x(\lambda) \circ \mu$.
Supposons $v \circ \mu \cap \varphi(v) \circ \mu \neq \emptyset$, donc $\mu \in \{v, \varphi(v)\}$. Il suffit d'étudier le cas $\mu = v$.

Mais $\lambda \circ v = \lambda \circ \varphi(v) = H\backslash \bigcup_{\alpha \in H\backslash e \circ v} \lambda \circ \alpha$ et

$$u \circ v = u \circ \varphi(v) = H\backslash \bigcup_{\alpha \in H\backslash e \circ v} u \circ \alpha.$$

donc $\beta_x(\lambda \circ v) = u \circ v$. ■

On peut donc conclure :

7.11. Théorème. *Dans la classe C_n, il existe, à isomorphisme près, $k(2n+1)$ hypergroupes ($k(s)$ étant le nombre des groupes commutatifs, deux à deux non isomorphes, d'ordre s).* ■

N.B. :

Ce travail a été élaboré à Clermont-Ferrand, le temps que l'auteur a été invité à l'Université Blaise Pascal (février - juillet 1992).

L'auteur exprime sa gratitude pour le chaleureux accueil au Département de Mathématiques de cette Université. Un mot à part pour le professeur Yves SUREAU car c'est à la suite des discussions avec lui que des démonstrations pour certains résultats essentiels de ce travail ont été achevées. Sans son aide ce travail n'aurait pas été ecrit.

Bibliographie

[1] S.D. COMER,*Polygroups derived from cogroups,* J. Algebra, 89 (1984), 397-405.

[2] S.D. COMER, *Some problems on hypergroups*, Algebraic Hyperstructures and Applications , Proceedings of the Fourth International Congress, Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, 75-85 (edited by Th. Vougiouklis).

[3] J.E. EATON,*Theory of cogroups*, Duke Math. J., 6 (1940), 101-107.

[4] M. GUTAN, Y. SUREAU, *Hypergroupes de type C à petite partition*, (to appear).

[5] L. HADDAD, Y. SUREAU, *Les cogroupes et les D-hypergroupes*, J. Algebra, 118 (1988) , 468-476.

[6] L. HADDAD, Y. SUREAU,*Les cogroupes et la construction de Utumi* , Pacific J. Math. 144 (1990), 17-58.

[7] M. KRASNER,*La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans ces hypergroupes*, C.R. Acad. Sci., Paris, 218 (1944), 542-544.

[8] M. KOSKAS, *Groupoïdes, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures et App., 49 (1970), 155-192.

[9] Y. SUREAU, *Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble*, Thèse, Université Clermont II, (1980).

[10] Y. SUREAU, *Hypergroupes de type C*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 40 (1991), 421-437.

[11] Y. UTUMI, *On hypergroups of group right cosets*, Osaka Math. J., 1 (1949), 73-80.

UNIVERSITE Al. I. Cuza
Mathématiques
IASI , ROUMANIE

Manuscrit reçu en Septembre 1992