ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Hervé Queffélec

Espaces de séries de Dirichlet et leurs opérateurs de composition

Volume 22, n° S2 (2015), p. 267-344.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2015__22_S2_267_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **22**, 267-344 (2015)

Espaces de séries de Dirichlet et leurs opérateurs de composition

Hervé Queffélec

Résumé

Ce survol est divisé en trois chapitres : le premier porte sur les propriétés générales des séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ et de leur somme, et présente le point de vue de Bohr (relèvement). Le second étudie les espaces de Hardy-Dirichlet de telles séries sur un demi-plan vertical, avec une application aux systèmes de Riesz. Le troisième enfin porte sur les opérateurs de composition agissant sur ces espaces et leurs nombres d'approximation. Le comportement de ces nombres se révèle assez différent de ceux rencontrés dans le cas des espaces de Hardy classiques.

Chapitre 1 : Séries de Dirichlet

1.1. Introduction

Nous présentons ici un analogue multiplicatif des séries entières, les séries de Dirichlet, séries qui vont jouer un rôle central tout au long de ce travail.

1.1.1. Séries génératrices

Chacun connaît l'importance de la *série génératrice* $g(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$, associée à une suite (u_n) de nombre complexes. Par exemple, dans le problème combinatoire des parenthésages, la suite (u_n) est donnée par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence d'apparence compliquée $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$. Mais la règle du produit de Cauchy transforme cette relation en l'équation algébrique $xg^2(x) = g(x) - 1$, d'où

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} x^n, \ 0 \leq x < 1/4$$

Mots-clés : Dirichlet series, Composition operators, Approximation numbers.
Classification math. : 47B33, 30B50, 30H10.

ce qui donne $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. De façon générale, ces séries génératrices sont bien adaptées à la théorie additive des nombres par le biais de l'équation fonctionnelle

$$x^{i+j} = x^i \times x^j$$

pour i, j entiers ≥ 0. Pour la théorie multiplicative des nombres, des séries génératrices d'un autre type, les séries de Dirichlet, seront plus adaptées par le biais de la nouvelle équation fonctionnelle

$$(ij)^{-s} = i^{-s} \times j^{-s}$$

pour i, j entiers ≥ 1. Développons un peu ce point de vue.

1.1.2. **Origine des séries de Dirichlet**

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. La fonction $n \mapsto a_n$ s'appelle une *fonction arithmétique* et la fonction $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$ la fonction sommatoire associée. Par exemple (notant $a|b$ pour a divise b)

$$a_n = \varphi(n),\ \mu(n),\ d(n),\ 1_P(n)$$

où φ, μ, d, 1_P désignent respectivement : φ la "totient function" d'Euler, soit le nombre d'entiers $m \leq n$ et premiers avec n, μ la fonction de Möbius définie par

$$\mu(1) = 1,\ \mu(n) = 0 \text{ si } p^2|n,\ \mu(n) = (-1)^k \text{ si } n = p_1 \cdots p_k$$

où p désigne un nombre premier et les p_j des nombres premiers distincts, d la fonction nombre de diviseurs de n et enfin 1_P la fonction indicatrice de l'ensemble P des nombres premiers. Comme on le voit, ces fonctions sont très irrégulières, mais ont *en moyenne* des propriétés plus sympathiques, qui se reflèteront bien sur leur série de Dirichlet génératrice, définie plus loin. Par exemple

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n, \quad \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \text{ si } n > 1. \tag{1.1}$$

Ou bien, lorsque $x \to \infty$:

$$\sum_{n\leq x} d(n) = D(x) \sim x \log x, \quad \sum_{n\leq x} 1_P(n) = \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{1.2}$$

Ces relations demandent des preuves. (1.1) est élémentaire, mais les deux relations de (1.2) constituent respectivement le problème de l'hyperbole de Dirichlet et le théorème des nombres premiers !

Un type de *régularité arithmétique* se rencontre aussi souvent ; une fonction arithmétique $f \neq 0$ est dite

(1) Multiplicative si $(m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$ (alors, $f(1) = 1$).
(2) Complètement multiplicative (c.m.) si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.
(3) Complètement sous-multiplicative si $f \geq 0$ et $f(mn) \leq f(m)f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.
(4) Complètement sur-multiplicative si $f \geq 0$ et $f(mn) \geq f(m)f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.

Par exemple, un *caractère de Dirichlet* est une fonction complètement multiplicative. Les fonctions φ, μ, d sont multiplicatives. La fonction d est complètement sous-multiplicative et la fonction φ est complètement sur-multiplicative. Prouvons ce dernier point : soit

$$m = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}, \ n = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}, \ mn = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p + \beta_p} \text{ avec } \alpha_p, \beta_p \geq 0.$$

Nous avons

$$\varphi(m) = m \prod_{p \in P} \delta_p \text{ avec } \delta_p = 1 \text{ si } \alpha_p = 0 \text{ et } \delta_p = 1 - 1/p \text{ si } \alpha_p \geq 1.$$

De même, $\varphi(n) = n \prod_{p \in P} \varepsilon_p$ et $\varphi(mn) =: mn \prod_{p \in P} \zeta_p$. Et on a toujours $\zeta_p \geq \delta_p \, \varepsilon_p$. En effet, $\delta_p = \varepsilon_p = \zeta_p = 1$ si $\alpha_p = \beta_p = 0$. Et sinon $\zeta_p = 1 - 1/p \geq \delta_p \, \varepsilon_p$. Ces deux types de régularité (en moyenne ou arithmétique) se reflètent bien dans *la série de Dirichlet génératrice* de $n \mapsto a_n$ donnée par (en termes d'intégrale de Stieltjes)

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \int_{1/2}^{\infty} x^{-s} dA(x) \text{ avec } A(x) = \sum_{n \leq x} a_n. \tag{1.3}$$

Rappelons par exemple que (p désignant *toujours* un nombre premier)

Proposition 1.1 (L. Euler)**.** *Soit f une fonction multiplicative sommable (i.e. $\sum |f(n)| < \infty$) et de module < 1. Alors*

$$\sum_{n \geq 1} f(n) = \prod_{p} \big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\big]. \tag{1.4}$$

En particulier, si g est c.m. et $|g(n)| \leq 1$, on a pour $\mathfrak{Re}\, s > 1$

$$\zeta_g(s) := \sum_{n \geq 1} g(n) n^{-s} = \prod_{p} (1 - g(p)p^{-s})^{-1}.$$

Outre la brique qu'est la fonction $\zeta := \zeta_1$ associée à $g \equiv 1$, d'autres séries de Dirichlet classiques sont

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n)\, n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)},\ \sum_{n\geq 1} |\mu(n)|\, n^{-s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)},$$

$$\sum_{n\geq 1} \varphi(n)\, n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},\ \sum_{n\geq 1} d(n)\, n^{-s} = [\zeta(s)]^2.$$

Ces identités sont immédiates en termes de produit de convolution de Dirichlet, comme nous le verrons un peu plus loin. Par exemple l'identité $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, soit encore $\varphi * e = I$ avec $e(n) = 1$ et $I(n) = n$ pour tout $n \geq 1$ donne

$$\Big(\sum_{n\geq 1} \varphi(n)\, n^{-s}\Big)\Big(\sum_{n\geq 1} e(n)\, n^{-s}\Big) = \sum_{n\geq 1} I(n)\, n^{-s},$$

c'est-à-dire la troisième relation.

Le succès de la théorie des séries de Dirichlet est dû historiquement à deux théorèmes majeurs :

(1) Le thèorème de la progression arithmétique de Dirichlet
(2) Le théorème des nombres premiers de Hadamard et de la Vallée-Poussin.

Plus généralement, soixante ans plus tard, les théorèmes “taubériens” (Ikehara, Delange, cf. [7] p. 154) disaient en gros :

f fait ceci et a_n est “sage” (par exemple $a_n \geq 0$) implique $A(x)$ fait cela.

C'est ainsi, comme on vient de le dire, que l'on peut prouver le théorème des nombres premiers (TNP), ou celui de Dirichlet sur les progressions arithmétiques. Mais bien d'autres résultats encore.

Un *autre point de vue,* dû à H. Bohr, est d'étudier ces séries de Dirichlet pour elles-mêmes, un peu comme on a étudié les espaces de Banach, dont l'introduction était motivée par des problèmes d'analyse classique, de Fourier par exemple. C'est le chemin qui sera suivi ici, avec trois volets :

(1) Séries de Dirichlet individuelles (ce chapitre)
(2) Espaces de Banach de séries de Dirichlet
(3) Opérateurs de composition sur les espaces de séries de Dirichlet.

Aujourd'hui encore, une excellente référence pour la théorie des séries de Dirichlet générales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ est le livre de Hardy et Riesz ([25]).

1.2. Domaine de convergence

Nous utiliserons constamment la notation, pour tout nombre réel θ :

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \ ; \ \Re\mathrm{e}\, s > \theta\}.$$

1.2.1. Lemme de Jensen

Le point de départ de l'étude des séries de Dirichlet est l'analogue du lemme d'Abel pour les séries entières.

Lemme 1.2 (Jensen)**.** *Si une série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge en un point s_0, elle converge uniformément dans tout secteur de sommet s_0*

$$S_\alpha = \Big\{s \in \mathbb{C} \ ; \ |s - s_0| \leq \frac{\Re\mathrm{e}\,(s - s_0)}{\cos\alpha}\Big\}$$

avec $0 \leq \alpha < \pi/2$.

Pour la preuve, on renvoie à [48], chapitre 4.

1.2.2. Abscisse de convergence simple

D'après le Lemme 1.2, on peut associer à chaque série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \tag{1.5}$$

un nombre $\sigma_c \geq -\infty$, appelé l'abscisse de convergence, qui est l'analogue du rayon de convergence pour une série entière, et qui vérifie :

$$\Re\mathrm{e}\, s > \sigma_c \Longrightarrow \ \text{(1.5) converge;} \quad \Re\mathrm{e}\, s < \sigma_c \Longrightarrow \ \text{(1.5) diverge.}$$
$$\text{De plus, } \ f \text{ est holomorphe dans } \ \mathbb{C}_{\sigma_c}.$$

En effet, la série de fonctions holomorphes $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_{\sigma_c}$ d'après le lemme de Jensen.

Mais contrairement au cas des séries entières, plusieurs *autres abscisses* seront associées à (1.5). Observons déjà que la plus simple des séries de Dirichlet, analogue à la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, n'est autre que la série $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, la fameuse fonction zeta de Riemann !

1.3. Abscisses de convergence

1.3.1. Les formules de Bohr-Cahen

Pour une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, *toujours supposée diverger au point* 0, nous définissons de façon évidente trois abscisses $\sigma_a, \sigma_u, \sigma_c$, respectivement les abscisses de convergence absolue, uniforme, simple dans un demi-plan vertical. Cahen puis Bohr ont montré les formules suivantes ([48], chapitre 4), analogues à la formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière, à savoir, en posant

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n,\ U_N = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \Big\|_{\infty},\ A_N^* = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \tag{1.6}$$

Théorème 1.3. *Les abscisses de convergence d'une série de Dirichlet qui diverge en* 0*,* $\sigma_c \le \sigma_u \le \sigma_a$*, sont données par les formules*

$$\sigma_a = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log A_N^*}{\log N}, \quad \sigma_u = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log U_N}{\log N}, \quad \sigma_c = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log |A_N|}{\log N}. \tag{1.7}$$

On a de plus $\sigma_a - \sigma_c \le 1$ *et la constante* 1 *est optimale.*

Une application de ces formules est le

Théorème 1.4 (Bohr)**.** *On a toujours* $\sigma_a - \sigma_u \le 1/2$*, et c'est optimal.*

Démonstration. On a clairement pour $T > 0$:

$$U_N^2 \ge \frac{1}{T} \int_0^T |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it}|^2 dt.$$

D'où $U_N^2 \ge \sum_{n=1}^N |a_n|^2$ en développant le carré du module, en intégrant et en faisant tendre T vers l'infini. Ensuite, Cauchy-Schwarz donne $A_N^* \le \sqrt{N}(\sum_{1\le n\le N} |a_n|^2)^{1/2} \le \sqrt{N}\, U_N$, puis

$$\frac{\log A_N^*}{\log N} \le \frac{1}{2} + \frac{\log U_N}{\log N}$$

et le début du résultat s'ensuit. L'optimalité de la constante 1/2 est un résultat hautement non-trivial pour lequel on renvoie à ([48], p. 134). □

Une autre application est le

Théorème 1.5. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $a_n = e^{in^\alpha}$. *On a* $\sigma_a = 1$ *et* $\sigma_c = 1 - \alpha$. *En particulier, la différence* $\sigma_a - \sigma_c$ *peut prendre toute valeur entre* 0 *et* 1.

Démonstration. D'après les formules de Bohr-Cahen, il suffit de montrer que

$$A_N \sim \frac{N^{1-\alpha}}{i\alpha} e^{iN^\alpha}.$$

Nous ferons la preuve seulement pour $\alpha < 1/2$, utilisant une formule de Euler-McLaurin à l'ordre 1 et notant $\{t\}$ la partie fractionnaire de t :

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N f(t)dt + \int_0^N \{t\} f'(t)dt$$

pour f de classe C^1 sur $(0, \infty)$, intégrable en 0 ainsi que sa dérivée. Cela donne ici

$$A_N = \int_0^N e^{it^\alpha} dt + \int_0^N \{t\}\, i\alpha t^{\alpha-1} e^{it^\alpha} dt =: I_N + J_N.$$

Une double intégration par parties montre que

$$I_N = \frac{N^{1-\alpha}}{i\alpha} e^{iN^\alpha} + O(N^{1-2\alpha}).$$

On a clairement $J_N = O(N^\alpha)$, d'où le résultat puisque $\alpha < 1 - \alpha$. Le cas général est analogue, avec une formule d'Euler-McLaurin d'ordre de plus en plus élevé quand α s'approche de 1. $\square$

1.3.2. **Produit de séries de Dirichlet**

Dans cette section de survol, nous nous contenterons d'énoncés, pour la preuve desquels nous renvoyons à ([48], chapitre 4). Voici l'analogue du produit de Cauchy dans notre cadre.

Soit $A(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ et $B(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s}$ deux séries de Dirichlet, et $s_0 \in \mathbb{C}$. Une sommation par paquets donne l'important résultat suivant (même si la preuve est évidente dans le premier cas) :

Théorème 1.6. *Supposons que les séries de Dirichlet* $A(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ *et* $B(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s}$ *sont* absolument convergentes *en* s_0, *et soit* $C(s) = A(s)B(s)$. *Alors,* $C(s_0) = \sum_{n=1}^\infty c_n n^{-s_0}$, *où* $c = (c_n)$ *est le produit de Dirichlet de* $a = (a_n)$ *et* $b = (b_n)$, *c'est-à-dire* ($d|n$ *signifiant* d *divise* n) :

$$c_n = \sum_{d|n} a_d\, b_{n/d} = \sum_{ij=n} a_i b_j. \tag{1.8}$$

Le résultat reste vrai si l'une *des séries converge absolument, et l'autre simplement, en s_0.*

À cause de l'importance de cette formule, on écrit $c = a * b = b * a$. L'ensemble des *fonctions arithmétiques*, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{R}$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, muni de l'addition naturelle et de la convolution de Dirichlet (aussi appelée convolution arithmétique) $*$ comme produit, devient un anneau local dont l'idéal maximal des éléments non-inversibles est l'ensemble des f telles que $f(1) = 0$, et dont l'unité δ est définie par

$$\delta(1) = 1; \quad \delta(n) = 0 \text{ si } n \geq 2.$$

Observons que $\mathcal{R}$ n'est pas noethérien car la suite (I_n) d'idéaux engendrés par $(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots, p_n^{-s})$, où (p_n) désigne la suite des nombres premiers, est croissante et non-stationnaire. Malgré tout, il a la jolie propriété de finitude suivante ([17]) :

Théorème 1.7. *L'anneau $\mathcal{R}$ est factoriel.*

Ce résultat a été étendu (de façon non-triviale) au sous-anneau $\mathcal{R}_c$ des séries de Dirichlet convergentes ([8]), c'est-à-dire ayant une abscisse de convergence $\sigma_c < \infty$.

Théorème 1.8. *L'anneau $\mathcal{R}_c$ est factoriel.*

Deux éléments importants de $\mathcal{R}$ sont e défini par $e(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et son inverse pour $*$, *la fonction de Möbius* μ déjà évoquée définie par

$$\begin{aligned} &\mu(1) = 1 \\ &\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \; n = p_1 \dots p_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Avec cette définition, dans laquelle $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts, on vérifie facilement que $\mu = e^{-1}$, à savoir :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 \text{ si } n = 1 \text{ et } \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \text{ sinon.}$$

Cette définition très artificielle de μ est bien sûr motivée par la fonction zeta et son produit d'Euler :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e(n) n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

d'où via (1.8)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s}),$$

et en développant formellement le membre de droite, on arrive à la définition (1.9) de la fonction de Möbius.

On a dit que le théorème 1.6 restait valable quand par exemple A est absolument convergente et B convergente en s_0, mais que la série $C(s_0)$ peut diverger si A et B sont seulement convergentes en s_0. Un exemple est fourni par

$$a = b, \ a_n = \varepsilon_n \chi(n), \ \text{où } \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ lentement}$$

et où χ est le caractère non-principal modulo 3 :

$$\chi(3n) = 0, \ \chi(3n+1) = 1, \ \chi(3n+2) = -1.$$

Si $c = a * b$, on voit que $c_n = \chi(n) \sum_{ij=n} \varepsilon_i \varepsilon_j$ et donc, si n n'est pas divisible par 3 :

$$|c_n| = \sum_{ij=n} \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \varepsilon_n^2 d(n), \ \text{puis } |c_{2^n}| \geq (n+1)(\varepsilon_{2^n})^2.$$

On ajuste ε_n pour que ce dernier terme soit ≥ 1. Alors, A et $B = A$ convergent en zéro, mais c_n ne tend pas vers zéro.

Mais on pourrait espérer que $C(s_0 + \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$. Il n'en est rien, et le théorème suivant ([48], p. 113) est a priori surprenant, et non-trivial :

Théorème 1.9. *Si $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ et $B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ convergent en $s = 0$, la série produit C converges en $\frac{1}{2} + i\tau = s$, pour tout τ réel. Et le résultat est optimal en ce qui concerne $\Re\mathrm{e}\, s$.*

1.4. Comportement au bord

Là aussi, on renvoie à ([48], chapitre 4) pour plus de détails. On sait bien que toute série entière a au moins un point singulier sur son cercle de convergence. On pourrait penser que de même une série de Dirichlet, d'abscisse de convergence simple $\sigma_c \in \mathbb{R}$, a au moins un point singulier sur sa droite de convergence $\Re\mathrm{e}\, s = \sigma_c$. Il n'en est rien...

Théorème 1.10. *Il existe une série de Dirichlet $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ d'abscisse de convergence simple $\sigma_c = 0$ et qui se prolonge en une fonction entière.*

Démonstration. On pourrait prendre pour A la fonction zeta alternée
$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$
Voici un exemple plus élémentaire si on connaît les rudiments sur la fonction Γ : $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n+1)^{-s}$ où (w_n) est la suite de Morse définie inductivement par
$$w_0 = 1, \; w_{2n} = w_n, \; w_{2n+1} = -w_n.$$
Soit encore, si $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n q^n$,
$$f(q) = (1-q) f(q^2). \tag{1.10}$$
Si $W_n = w_0 + \cdots + w_n$, une récurrence montre que $|W_{2n}| = 1, \; W_{2n+1} = 0$. On a donc $\sigma_c = 0$. Et la série entière génératrice de (w_n) est d'après (1.10) :
$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n q^n = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - q^{2^j}) =: P(q), \; |q| < 1. \tag{1.11}$$
En utilisant (1.11) et la représentation
$$(n+1)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-(n+1)t} dt, \quad \mathfrak{Re}\, s > 0$$
on obtient par permutation somme-intégrale
$$A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} P(e^{-t}) dt, \quad \mathfrak{Re}\, s > 1.$$
Mais le second membre est le produit de deux fonctions entières, car $t \mapsto P(e^{-t})$ a un zéro d'ordre infini à l'origine, qui compense la singularité de $t \mapsto t^{s-1}$ pour toute valeur de s. $\square$

Il y a quand même deux cas où l'analogie avec les séries entières a lieu.

Théorème 1.11 (Landau)**.** *Soit $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet à coefficients a_n* positifs*, d'abscisse de convergence $\sigma_c = \sigma_a \in \mathbb{R}$. Alors, le point $s = \sigma_a$ est un point singulier pour la somme A.*

L'exemple de la fonction zeta, pour laquelle $\sigma_c = 1$ et seul le point 1 est singulier, montre que le résultat de Landau est optimal.

Tous les points de la droite $\mathfrak{Re}\, s = \sigma_c$ peuvent aussi être singuliers (on parle alors de coupure), comme dans le cas des séries entières. On peut utiliser l'analogue du théorème de Borel pour les séries entières ("le cercle de convergence est en général une coupure"), sous forme d'un argument probabiliste ([33], p. 44). En pensant à l'espace $\mathcal{H}^2$ des séries de Dirichlet à coefficients de carré sommable, qui jouera un rôle important aux chapitres 2 et 3 de ce travail, nous nous placerons plutôt dans un cadre topologique (théorème de Baire) : soit $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble de Cantor abstrait dont on note les points $\omega = (\varepsilon_n(\omega))$. On dira que $E \subset \Omega$ est *quasi-sûr* si E contient un G_δ dense. Soit aussi $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet générale (i.e. $\lambda_n \geq 0$ et λ_n croît strictement vers $+\infty$) d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a = \alpha$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$f_\omega(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(\omega) b_n e^{-\lambda_n s}, \text{ avec } \sigma_a(f_\omega) = \alpha.$$

Avec cette terminologie, on a le résultat suivant ([47], avec une coquille p. 270) :

Théorème 1.12. *Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet générale d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a = \alpha \in \mathbb{R}$; alors, la droite $\mathfrak{Re}\, s = \alpha$ est quasi-sûrement une* coupure *pour f_ω.*

Démonstration. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, et E l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathfrak{Re}\, s = \alpha$ n'est pas une coupure pour f_ω. On a

$$E = \bigcup E_{a,r,N}, \quad \text{où } a = \alpha + it,\ t \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{Q}^+,\ N \in \mathbb{N}^*$$

et où $E_{a,r,N}$ est l'ensemble des ω tels que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon_n(\omega) e^{-\lambda_n s}$ a un prolongement analytique (toujours noté f_ω) à $D(a, r) = \{s\ ;\ |s - a| < r\}$ avec $|f_\omega| \leq N$ pour $s \in D(a, r)$. Un argument de famille normale montre que $E_{a,r,N}$ est fermé dans Ω. Si jamais $\omega_0 = (\delta_n)$ est intérieur à $E_{a,r,N}$, soit M un entier tel que $\varepsilon_n(\omega') = \delta_n$ pour $n \leq M$ implique $\omega' \in E_{a,r,N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_\omega(s) &= \Big[\sum_{n=1}^{M} \delta_n b_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \varepsilon_n(\omega) b_n e^{-\lambda_n s}\Big] + \Big[\sum_{n=1}^{M} (\varepsilon_n(\omega) - \delta_n) b_n e^{-\lambda_n s}\Big] \\ &=: f_{\omega'}(s) + P(s) \end{aligned}$$

avec $\omega' \in E_{a,r,N}$ et P un polynôme de Dirichlet. On peut donc étendre f_ω à $D(a, r)$ avec $|f_\omega(s)| \leq N + 2\sum_{n=1}^{M} |b_n| e^{-\lambda_n(\alpha - r)} =: C$. Fixons $0 < \rho < r/3$ si bien que $\overline{D}(a + \rho, 2\rho) \subset D(a, r)$. Les inégalités de Cauchy et une dérivation terme à terme permise (noter que $a + \rho \in \mathbb{C}_\alpha$) impliquent

$$\frac{|f_\omega^{(j)}(a + \rho)|}{j!} = \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon_n(\omega) \lambda_n^j e^{-\lambda_n(a+\rho)}|}{j!} \leq \frac{C}{(2\rho)^j},\ j = 0, 1, \ldots$$

Cela ayant lieu pour tout choix de signes ω, et puisque d'autre part $\sup_\omega |\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n(\omega) z_n| \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty |z_n|$ pour toute série absolument convergente $\sum z_n$ de complexes, on en déduit

$$\frac{\sum_{n=1}^\infty |b_n| \lambda_n^j e^{-\lambda_n(\alpha+\rho)}}{j!} \leq \frac{2C}{(2\rho)^j}. \tag{1.12}$$

Fixons $\rho < R < 2\rho$, multiplions chaque terme de (1.12) par R^j, ajoutons et permutons, il vient

$$\sum_{n=1}^\infty |b_n| e^{-\lambda_n(\alpha+\rho-R)} \leq 2C \sum_{j=0}^\infty (\frac{R}{2\rho})^j < \infty.$$

Mais ceci est impossible car $\alpha+\rho-R < \alpha$. Cette contradiction montre que chaque fermé $E_{a,r,N}$ est d'intérieur vide, ainsi que leur union dénombrable E, par le théorème de Baire. Le résultat est ainsi prouvé. □

Corollaire 1.13. *Il existe une série de Dirichlet $A(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ à coefficients a_n de carré sommable, soit $\sum |a_n|^2 < \infty$, qui vérifie :*

(1) $\sigma_c = 1/2$

(2) La droite de convergence $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$ est une coupure pour A.

Démonstration. On applique le théorème précédent avec $\lambda_n = \log n$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$, pour lequel on a $\sigma_a(f) = 1/2$. Si $f_\omega(s) = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n(\omega) b_n n^{-s}$, on peut trouver ω_0 tel que $\sigma_c(f_{\omega_0}) = 1/2$ et la droite $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$ est une coupure pour f_{ω_0}. Il n'y a plus qu'à prendre $A = f_{\omega_0}$, soit $a_n = \varepsilon_n(\omega_0) b_n$, qui vérifie les deux conditions requises puisque

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \log^2(n+1)} < \infty, \quad \text{et} \quad \sigma_c(A) = 1/2. \qquad \square$$

1.5. Point de vue de Bohr

Une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ est par définition une fonction *d'une* variable complexe s. Mais H. Bohr a développé un point de vue original qui en fait des fonctions de *plusieurs* variables complexes indépendantes, voire d'une infinité de telles variables. Il se basait pour cela sur le théorème d'approximation diophantienne de Kronecker que nous allons d'abord décrire.

1.5.1. Théorème de Kronecker

Définition 1.14. Une suite $(x_1, \ldots, x_r)$ de réels sera dite *indépendante* si elle est linéairement indépendante dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{R}$, soit encore si

$$\sum_{j=1}^{r} n_j x_j = 0 \text{ et } n_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow n_1 = \cdots = n_r = 0.$$

Un exemple fondamental dans ce travail est celui de $x_j = \log p_j$ où $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers distincts. Cela est une reformulation de l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. D'autre exemples sont $x_j = \theta^j$, ou encore $x_j = \log(j + \theta)$, où θ est un nombre transcendant. L'importance de cette notion tient au théorème d'approximation simultanée suivant, qui joue un rôle essentiel en théorie analytique des séries de Dirichlet

Théorème 1.15 (Kronecker)**.** *Soit $x_1, \ldots, x_r$ des réels indépendants, soit aussi $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{1 \leq j \leq r} |e^{ix_j t} - w_j| \leq \varepsilon.$$

De façon équivalente, si $f(t) = \sum_{j=1}^{r} c_j e^{ix_j t}$, on a toujours

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sum_{j=1}^{r} |c_j|.$$

Ou encore si $K_t u = (u_1 e^{ix_1 t}, \ldots, u_r e^{ix_r t})$, avec $u = (u_j) \in \mathbb{T}^r$, est le flot de Kronecker *associé sur $\mathbb{T}^r$, $e = (1, \ldots, 1)$ et $h(t) = K_t e$:*

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^r \text{ est d'image dense.}$$

Pour la preuve (qui découle aussi du théorème de Birkhoff-Khintchine à venir), cf. ([48], p. 49-51). Voici une application du théorème de Kronecker, qui servira au chapitre 2.

Proposition 1.16. *Soit f une fonction c.m. sommable. Alors*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Big|\sum_{n \geq 1} \mu(n) f(n) n^{it}\Big| = \sum_{n \geq 1} |\mu(n) f(n)|.$$

En particulier, si $\tau = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_1$,

$$\sup_{s \in \mathbb{C}_0} |1/\zeta(s + \tau)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-\alpha} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(2\alpha)}.$$

Démonstration. Soit M le sup en question. On a clairement

$$M \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)f(n)|.$$

On observe ensuite que, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} \mu(n)f(n)\, n^{it}| = \sum_{n=1}^{N} |\mu(n)f(n)|. \tag{1.13}$$

En effet, on peut par Kronecker trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $-p^{it}f(p)$ approche $|f(p)|$ pour p premier $\leq N$. Soit $1 \leq n \leq N$. Si n a des facteurs carrés, $f(n)\mu(n)n^{it} = |f(n)\mu(n)| = 0$. Si $n = p_1 \cdots p_r$ est sans facteurs carrés, on a

$$\mu(n)f(n)n^{it} = \prod_{1\leq j\leq r} (-f(p_j)p_j^{it}) \sim \prod_{1\leq j\leq r} |f(p_j)| = |f(n)| = |\mu(n)f(n)|.$$

Il s'ensuit que $M \geq \sum_{1\leq n\leq N} |\mu(n)f(n)| - \sum_{n>N} |\mu(n)f(n)|$. Puis enfin $M \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)f(n)|$ en faisant tendre N vers l'infini. Le cas particulier correspond à $f(n) = n^{-\tau}$. □

1.5.2. **Théorème de Birkhoff-Khintchine**

Théorème 1.17 (Birkhoff-Khintchine)**.** *Soit K_t le flot de Kronecker associé à un r-uplet $(x_1, \dots, x_r)$ de réels indépendants. Et soit m la mesure de Haar sur le tore $\mathbb{T}^r$. Alors on a pour toute fonction $f : \mathbb{T}^r \to \mathbb{C}$ continue :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(K_t e)dt = \int_{\mathbb{T}^r} f(z)dm(z). \tag{1.14}$$

Plus généralement, si $V \subset \mathbb{T}^r$ est un ouvert de frontière Haar-négligeable, $m(\partial V) = 0$, et si $f : \mathbb{T}^r \to \mathbb{C}$ est continue, on a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_V(K_t e)\, f(K_t e)dt = \int_{\mathbb{T}^r} \mathbf{1}_V(z)\, f(z)dm(z). \tag{1.15}$$

Démonstration. Vu la densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur $\mathbb{T}^r$, il suffit de montrer (1.14) pour f un caractère de $\mathbb{T}^r$, i.e. $f(z) = \prod_{j=1}^{r} z_j^{\alpha_j}$ avec $z = (z_j) \in \mathbb{T}^r$ et $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. L'indépendance des x_j joue un rôle clé pour montrer que les deux membres de (1.14) valent 0 quand les α_j ne sont pas tous nuls. Et ils valent trivialement 1 quand tous les α_j sont nuls. On en déduit (1.15) par approximation continue de

$\mathbf{1}_V$. Plus précisément, étant donné $\varepsilon > 0$, utilisant l'hypothèse $m(\partial V) = 0$, on peut trouver u, v continues positives telles que

$$u \leq \mathbf{1}_V \leq v \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}^r} (v-u)dm \leq \varepsilon$$

et ensuite on conclut aisément.

On pourrait aussi bien utiliser les limites de moyennes symétriques

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cdots \qquad \square$$

1.5.3. Les transferts de Bohr

Bohr s'intéressait à l'abscisse de convergence uniforme σ_u pour la raison suivante : si une série de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ de somme f est uniformément convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$, alors la restriction de f à toute droite verticale $\mathfrak{Re}\, s = \sigma$ avec $\sigma > \theta$ est *presque-périodique* (de plus, un théorème de convergence uniforme ([48]) a lieu quand f est bornée, comme on le verra au chapitre 2 sous une forme quantitative). À cet effet, il a développé une méthode originale pour étudier finement la norme-sup U_N apparaissant dans (1.7), que nous allons décrire : soit (p_j) la suite croissante des nombres premiers et soit $f(s) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s}$ un polynôme de Dirichlet. Notons r l'indice tel que $p_r \leq N < p_{r+1}$, soit encore $r = \pi(N)$, et écrivons la décomposition d'un entier $n \leq N$ en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j(n)} =: p^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha(n) = (\alpha_1(n), \dots, \alpha_r(n)) \in \mathbb{N}^r.$$

Notons comme précédemment (avec $x_j = \log p_j$)

$$h(t) = K_t e = (p_1^{it}, \dots, p_r^{it}).$$

Si $\alpha = \alpha(n)$ et $z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{T}^r$, on définit le polynôme algébrique Δf par :

$$c_\alpha = a_n, \quad z^\alpha = \prod_{j=1}^r z_j^{\alpha_j} \text{ et } \quad \Delta f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha.$$

Observons maintenant que

$$f(-it) = \sum_{n=1}^N a_n n^{it} = \sum_{n=1}^N a_n \Big(\prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j(n)} \Big)^{it} = \sum_{n=1}^N a_n \prod_{j=1}^r (p_j^{it})^{\alpha_j(n)},$$

en d'autres termes on a la relation

$$f(-it) = \Delta f[h(t)]. \tag{1.16}$$

Cette équation fondamentale de Bohr est plus qu'une identité formelle. En effet, on sait que $h(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^r$ par le *théorème de Kronecker*. On pose

$$\|\Delta f\|_\infty = \sup_{|z_1|=\cdots=|z_r|=1} |\Delta f(z)| = \sup_{|z_1|\leq 1,\ldots,|z_r|\leq 1} |\Delta f(z)|,$$

la dernière égalité étant due au principe du maximum distingué pour les fonctions analytiques dans le polydisque unité de $\mathbb{C}^d$. On pose aussi

$$\|f\|_p = \Big(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(-it)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|\Delta f\|_p = \Big(\int_G |\Delta f(z)|^p(z) dm(z)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On peut alors écrire :

$$\|f\|_\infty = \|\Delta f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_p = \|\Delta f\|_p, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.17}$$

La dernière égalité de (1.17) provient du théorème de Birkhoff-Khintchine appliqué à la fonction continue $|\Delta f|^p$. Voici une application de la première égalité de (1.17) (cf. [48], p. 116).

Théorème 1.18 (Bohr)**.** *Soit $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ avec $\sigma_c \leq 0$ et bornée sur $\mathbb{C}_0$, i.e. $\|f\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{C}_0} |f(s)| < \infty$. Alors, on a*

$$\sum_p |a_p| \leq \|f\|_\infty.$$

En particulier, l'abscisse de convergence uniforme de $\sum_{n=1}^\infty \mu(n) n^{-s}$ est 1.

1.6. L'espace $\mathcal{H}^p$

1.6.1. Définition via Bohr

L'égalité (1.17) est fondamentale pour étudier l'espace de Hardy $\mathcal{H}^p$ (avec $1 \leq p < \infty$) des séries de Dirichlet, défini a priori comme *le complété des polynômes de Dirichlet $P(s) = \sum_{n=1}^n a_n n^{-s}$* pour la norme de

Besicovitch déjà citée

$$\|P\|_p = \Big(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |P(-it)|^p dt\Big)^{1/p} = \|\Delta P\|_p.$$

Mais le plongement isométrique $P \mapsto \Delta P$, qui s'étend à $\mathcal{H}^p$, nous permet d'identifier $\mathcal{H}^p$ et le sous-espace $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ formé des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T}^\infty)$ telles que, pour tout $\alpha = (\alpha_j) \notin \mathbb{N}^{(\infty)}$, le "narrow cone" de H. Helson, on ait $\widehat{f}(\alpha) = 0$. Et l'on a clairement l'inclusion contractante

$$1 \leq p < q \Rightarrow \mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^p.$$

Le plus "gros" espace est donc $\mathcal{H}^1$. Le cas $p = 2$ est facile :

$$\mathcal{H}^2 = \{f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\ ;\ \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Mais le cas général nécessite le théorème de Birkhoff-Khintchine. Cette définition de l'espace $\mathcal{H}^p$ peut paraître très abstraite, mais un résultat d'hypercontractivité de Helson ([29], voir aussi [30]), améliorant lui-même un résultat de même nature dû à Bayart ([9]), permet d'avoir une définition plus manipulable, et en particulier de voir les éléments de $\mathcal{H}^p$ comme des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$, fait que nous exploiterons au chapitre 3 :

Théorème 1.19 (Helson)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}^1$. Alors, f se représente par une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ telle que*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{d(n)}\right)^{1/2} \leq \|f\|_1. \tag{1.18}$$

En particulier, $\sigma_a(f) \leq 1/2$.

Dans cet énoncé, $d(n)$ représente le nombre de diviseurs de n. Comme il est notoire ([7], [31] p. 74) que $d(n) \leq C_\varepsilon n^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, la seconde partie de l'énoncé découle de la première et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quant à "se représente", cela signifie qu'on peut associer de façon unique à chaque $f \in \mathcal{H}^p$ une série de Dirichlet formelle $\sum_n a_n n^{-s}$ avec, pour chaque n :

$$a_n = \lim_{j\to\infty} a_n^j \text{ où } P_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^j n^{-s},$$

la suite de polynômes de Dirichlet (P_j) étant de Cauchy dans $\mathcal{H}^p$. Le théorème nous dit que la série formelle est une série convergente, et un peu mieux (elle converge dans $\mathbb{C}_{1/2}$). Mais comme on va le voir, quand $p \neq 2$, l'espace $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ n'est pas si sympathique que cela.

1.6.2. Non-complémentation de $H^p(\mathbb{T}^\infty)$

Quand on veut étudier l'espace $\mathcal{H}^p$ et ses opérateurs de composition (chapitre 3), à l'aide du transfert de Bohr vers $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, on rencontre une difficulté intrinsèque liée au nombre infini de variables qui sous-tend le point de vue de Bohr, et se reflète dans le résultat suivant d'Ebenstein ([20]), qui mérite d'être mieux connu.

Théorème 1.20. *Pour* $1 < p < \infty$ *et* $p \neq 2$, *le sous-espace* $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ n'est pas complémenté *dans* $L^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base des caractères de $\mathbb{T}$ ($e_n(t) = e^{int}$) et soit $R : L^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{T})$ la projection de Riesz définie formellement par

$$R\Big(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e_n\Big) = \sum_{0}^{\infty} a_n e_n.$$

On sait que R est bornée (théorème de Riesz) et plus précisément que, pour $p \neq 2$ ([32]) :

$$\|R\| = \frac{1}{\sin \pi/p} =: \Delta_p > 1. \tag{1.19}$$

La preuve complète de (1.19) est fort difficile, mais la minoration $\|R\| \geq \Delta_p$ est élémentaire, et nous suffira. On identifie une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ et sa valeur au bord dans $H^p(\mathbb{T})$, et on considère, pour $0 < \gamma < 1/p$, la fonction $g = g_\gamma$ définie par $g(z) = \big(\frac{1+z}{1-z}\big)^\gamma$ avec la détermination principale du log dans le demi-plan droit. Il est clair que $g \in H^p(\mathbb{D})$ et que, désignant par $\sigma(\theta)$ le signe de θ et posant $\delta = (\pi/2)\gamma$, nous avons

$$g(e^{i\theta}) = (i\cot(\theta/2))^\gamma = e^{i\delta\sigma(\theta)}|g(e^{i\theta})|, \quad |\theta| \leq \pi.$$

Soit encore $g = u + iv$ avec

$$u = \cos\delta\,|g| \text{ et } v = \sigma \sin\delta\,|g|.$$

Ecrivant $g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, nous voyons que $R(g) = g$ et $R(\overline{g}) = \overline{a_0} = 1$. Soit alors, pour α, β réels, $f = \alpha u + i\beta v$. Puisque $|a + ib| = |a - ib|$ pour a, b réels, on a $|f| = |\alpha\cos\delta + i\beta\sin\delta|\,|g|$ ainsi que les deux relations

$$\|f\|_p = |\alpha\cos\delta + i\beta\sin\delta|\|g\|_p \tag{1.20}$$

$$2f = (\alpha+\beta)g + (\alpha-\beta)\overline{g} \quad \text{et} \quad 2R(f) = (\alpha+\beta)g + (\alpha-\beta). \tag{1.21}$$

D'où
$$2\|R\| \geq \frac{\|2R(f)\|_p}{\|f\|_p} \geq \frac{|\alpha+\beta|\|g\|_p - |\alpha-\beta|}{|\alpha\cos\delta + i\beta\sin\delta|\|g\|_p}$$
Mais $\|g\|_p = \|g_\gamma\|_p \to \infty$ quand $\gamma \to 1/p$, d'où posant $\delta_0 = \frac{\pi}{2p}$
$$2\|R\| \geq \frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha\cos\delta_0 + i\beta\sin\delta_0|}.$$
Ajustant maintenant $\alpha = \sin^2\delta_0,\ \beta = \cos^2\delta_0$, on obtient
$$\|R\| \geq \frac{1}{2\sin\delta_0\cos\delta_0} = \frac{1}{\sin\pi/p}.$$
Maintenant, pour montrer que $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ n'est pas complémenté dans $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ pour $1 < p < \infty$ et $p \neq 2$, on utilise un fait classique d'analyse harmonique : soit G un groupe abélien compact de mesure de Haar m et de dual Γ, $\Lambda \subset \Gamma$ et soit
$$L^p_\Lambda = \{f \in L^p(G)\ ;\ \widehat{f}(\gamma) := \int_G f(t)\gamma(-t)dm(t) = 0 \text{ pour } \gamma \notin \Lambda\}.$$
Fait. S'il existe une projection continue $Q : L^p(G) \to L^p_\Lambda$, il existe une autre projection continue $P : L^p(G) \to L^p_\Lambda$ telle que
$$P(\gamma) = \gamma \text{ si } \gamma \in \Lambda \text{ et } P(\gamma) = 0 \text{ si } \gamma \notin \Lambda. \tag{1.22}$$
On définit pour cela P par l'intégrale vectorielle
$$P(f) = \int_G T_{-t}\, Q\, T_t(f) dm(t)$$
où T_a est l'opérateur de translation défini par $T_a f(x) = f(x+a)$. Cela est permis puisque la translation $t \mapsto T_t f : G \to L^p(G)$ est continue pour $p < \infty$. Cette nouvelle projection vérifie $\|P\| \leq \|Q\|$ et commute avec les translations T_a, d'où la relation (1.22) par un calcul facile.

Utilisons le fait précédent dans le cas
$$G = \mathbb{T}^\infty,\ \Gamma = \mathbb{Z}^{(\infty)},\ \Lambda = \mathbb{N}^{(\infty)}.$$
(Ce Λ s'appelle le "narrow cone" de Helson comme on l'a déjà dit). Supposons que L^p_Λ est complémenté dans $L^p(\mathbb{T}^\infty)$. Soit donc $P : L^p(\mathbb{T}^\infty) \to L^p_\Lambda$ une projection continue vérifiant (1.22). Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$ telle que $\|f\|_p = 1$ et $\|R(f)\|_p \geq \Delta_p - \varepsilon$. Puis soit N un entier ≥ 1 et $f_N \in L^p(\mathbb{T}^\infty)$

définie par $f_N = f \otimes f \cdots \otimes f \quad N$ fois, c'est-à-dire $f_N(x) = \prod_{j=1}^{N} f(x_j)$ si $x = (x_j) \in \mathbb{T}^\infty$. Il est clair que $\|f_N\|_p = 1$ et que

$$P(f_N) = Rf \otimes \cdots \otimes Rf \quad \text{et donc} \quad \|P(f_N)\|_p = \|R(f)\|_p^N.$$

Par suite, $\|P\| \geq (\Delta_p - \varepsilon)^N$ puis $\|P\| \geq \Delta_p^N$. Mais cela est impossible car $\Delta_p^N \to \infty$ avec N puisque $\Delta_p > 1$! Cette contradiction montre le théorème 1.20. $\square$

Remarque 1.21. Cette preuve illustre aussi l'importance des phénomènes *(d'hyper)contractivité,* comme c'était déjà le cas pour le théorème 1.19. Le simple fait qu'un opérateur R en dimension un ait une norme > 1 empêche sa "tensorisation infinie"(même si, par itération du théorème de Riesz, $H^p(\mathbb{T}^N)$ est complémenté dans $L^p(\mathbb{T}^N)$ pour tout entier N fixé). Si au contraire un opérateur T en dimension un a une norme ≤ 1, sa tensorisation est souvent possible et se révèle très utile (voir [9] et [29] par exemple).

Chapitre 2 : Espaces de séries de Dirichlet

2.1. Définitions hilbertiennes

2.1.1. Suites de Riesz

Les définitions suivantes (cf. [57]) nous serviront dans la suite de ce chapitre, et au chapitre suivant sur les opérateurs de composition. Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_{j\geq 1}$ une suite de H. Nous dirons que

(1) (x_j) est une *suite de Riesz supérieure* s'il existe une constante $B < \infty$ (appelée constante de Riesz supérieure) telle que
$$\|\sum \lambda_j x_j\|^2 \leq B^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$
pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme est dominé par la somme des carrés").

(2) (x_j) est une *suite de Riesz inférieure* s'il existe une constante $A > 0$ (appelée constante de Riesz inférieure) telle que
$$\|\sum \lambda_j x_j\|^2 \geq A^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$
pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme domine la somme des carrés").

(3) (x_j) est une *suite de Riesz* s'il existe deux constantes A et B telles que
$$A^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2 \leq \|\sum \lambda_j x_j\|^2 \leq B^2 \sum |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$$
pour toute suite finie (λ_j) de scalaires ("le carré de la somme est comme la somme des carrés"). Autrement dit, les suites de Riesz sont celles qui sont à la fois de Riesz supérieures et de Riesz inférieures.

(4) (x_j) est une *base de Riesz* si (x_j) est une suite de Riesz qui est de plus totale dans H : l'espace engendré par les x_j est dense dans H.

Remarque 2.1. Il est clair qu'une suite de Riesz supérieure n'est pas toujours une suite de Riesz inférieure, car on peut répéter des vecteurs : par exemple $x_{2j-1} = x_{2j} = e_j$ où $(e_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de H. C'est essentiellement la seule chose qu'on peut faire. La conjecture de Kadison-Singer ou plutôt de Feichtinger, résolue affirmativement par Marcus, Spielman, Srivastava (cf. article d'E. Matheron dans ces Annales) devient le théorème suivant ([39])

Théorème 2.2. *Toute suite de Riesz* supérieure (x_j) *normalisée, au sens où* $0 < a \leq \|x_j\| \leq b < \infty$, *est union finie de suites de Riesz.*

On peut maintenant se demander si une suite de Riesz inférieure normalisée n'est pas automatiquement une suite de Riesz supérieure, d'autant que cela arrive quand $x_j = \frac{K_{z_j}}{\|K_{z_j}\|}$ est une suite normalisée de noyaux reproduisants de l'espace H^2 du disque ([22] p. 278, [54]). Dans le jargon des spécialistes (cf. sous-sections suivantes), une suite d'interpolation (ici la suite (z_j)) est une suite de Carleson (*pour* H^2). Et K. Seip ([53]) m'a informé du fait que cela reste vrai pour d'autres espaces de Hilbert de fonctions, par exemple les espaces de Bergman, Paley-Wiener et Fock. Mais cela n'est pas impliqué par la propriété de Nevanlinna-Pick complète, qui irait plutôt en sens opposé.

Voici un contre-exemple dans le cas général ([15]) que m'a indiqué J.F. Burnol ; cet exemple est en dimension n, mais s'étend immédiatement par somme hilbertienne à la dimension infinie. Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et u le vecteur unitaire $(1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^n e_j$, ainsi que T l'opérateur qui agit comme I sur $u^\perp$ et comme $\sqrt{n}\, I$ sur la droite engendrée par u (I étant l'identité de $\mathbb{C}^n$). On pose $x_j = T(e_j)$ et on voit que

$$e_j = (1/\sqrt{n})\, u + v_j \text{ avec } \langle v_j, u\rangle = 0,\ x_j = u + v_j,\ 1 \leq \|x_j\| \leq \sqrt{2}.$$

La suite (x_j) est de Riesz supérieure avec une constante *explosive,* car

$$\|\sum_{j=1}^n x_j\| \geq n\|u\| = n \quad \text{alors que} \quad \Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{2n}.$$

Par contre, elle est de Riesz inférieure avec une constante uniformément minorée quand $n \to \infty$. On a en effet, en utilisant le symbole de Kronecker

$$\langle x_j, x_k\rangle = 1 + \langle v_j, v_k\rangle = (1 - \frac{1}{n}) + \delta_{j,k}$$

si bien que, pour toute suite (λ_j) de scalaires :

$$\|\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\|^2 = \sum_{1\leq j,k\leq n} \lambda_j \overline{\lambda_k}\langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + (1-\frac{1}{n})\Big|\sum_{j=1}^n \lambda_j\Big|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2.$$

2.1.2. Suites de Carleson

Définition 2.3 ([57])**.** Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_{j\geq 1}$ une suite de vecteurs non nuls de H. On pose $y_j = x_j/\|x_j\|$ (souvent, x_j est normée, i.e. $\|x_j\| = 1$). Nous dirons que (x_j) est une *suite de Bessel* s'il existe une constante C telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 \leq C\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

(nous mettons ici C au lieu de C^2 pour nous conformer aux usages sur les mesures de Carleson). La meilleure constante C s'appelle la constante de Bessel de (x_j) (s'il existait aussi une minoration $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 \geq c\|x\|^2$, on dirait que (x_j) est un *frame*).

Les suites de Bessel normées ne sont autres que les suites de Riesz supérieures ([12]), comme le montre la

Proposition 2.4 (Boas)**.** *Soit (x_j) une suite normée de H. Alors, (x_j) est de Riesz supérieure si et seulement si elle est de Bessel. De plus, si C est sa constante de Bessel, $C^{1/2}$ est sa constante de Riesz supérieure.*

Démonstration. Par définition, (x_j) est de Riesz supérieure avec constante B si et seulement si $\|\sum_j \lambda_j x_j\|^2 \leq B^2\|\sum_j \lambda_j e_j\|^2$ où $(e_j)_{j\geq 1}$ désigne la base canonique de ℓ^2, donc s'il existe un opérateur $T : \ell^2 \to H$ tel que $T(e_j) = x_j$ et $\|T\| \leq B$. L'opérateur adjoint $T^* : H \to \ell^2$ vérifie $\|T^*\| = \|T\|$ et il est donné via un calcul facile par

$$T^*(x) = (\langle x, x_j\rangle)_{j\geq 1}$$

ce qui implique immédiatement le résultat. □

Nous particularisons maintenant au cas d'un espace de Hilbert H de fonctions définies sur un espace topologique Ω, de noyau reproduisant K_a, c'est-à-dire

$$f(a) = \langle f, K_a\rangle \quad \text{pour toute} \quad f \in H \quad \text{et tout} \quad a \in \Omega.$$

(1) Une mesure borélienne positive μ sur Ω est une *mesure de Carleson pour H* s'il existe une constante C telle que

$$\int_\Omega |f(z)|^2 d\mu(z) \leq C\|f\|^2, \quad \forall f \in H.$$

La meilleure constante C s'appelle la norme de Carleson de μ, et se note $C = \|\mu\|_{\mathcal{C},H}$.

(2) Soit $Z = (z_j)$ une suite de points de Ω. On dit que Z est une *suite de Carleson* si la suite de vecteurs $x_j = \|K_{z_j}\|^{-1}K_{z_j}$ est de Bessel, autrement dit si la mesure discrète

$$\mu_{Z,H} := \sum_j \|K_{z_j}\|^{-2}\delta_{z_j}$$

est de Carleson pour H. La constante de Carleson de (z_j) est par définition $\|\mu_{Z,H}\|_{\mathcal{C},H}$, ou encore la constante de Bessel de (x_j).

2.1.3. Suites d'interpolation

Définition 2.5. On dit qu'une suite $X = (x_j)$ d'un espace de Hilbert H est une *suite d'interpolation* (ou de Riesz-Fischer) si, pour tout $w = (w_j) \in \ell^2$, on peut trouver $x \in H$ tel que

$$\langle x, x_j\rangle = w_j,\ j = 1, 2, \dots. \tag{2.1}$$

Alors, il existe une constante C telle que l'on puisse trouver un tel x avec $\|x\| \le C\|w\|$. Soit en effet M l'espace fermé engendré par les x_j et $T : \ell^2 \to M$ définie par $T(w) = x$ où $x \in M$ vérifie (2.1), ce vecteur existant (remplacer x par sa projection orthogonale sur M) et étant unique. L'application T est linéaire, a son graphe fermé, et donc est continue. Et la constante $C = \|T\|$ convient. Le lemme de Zabrejko ([56], p. 190), appliqué à la semi-norme sigma-sous-additive sur ℓ^2 définie par

$$N(w) = \inf\{\|x\|\ ;\ \langle x, x_j\rangle = w_j \quad \forall j\}$$

donnerait aussi l'existence de C. Le meilleur C possible s'appelle la constante d'interpolation de X, et se note $M_H(X)$.

Les suites d'interpolation normées ne sont autres que les suites de Riesz inférieures ([12]), comme le montre la

Proposition 2.6 (Boas)**.** *Soit $X = (x_j)$ une suite normée de H. Alors, (x_j) est de Riesz inférieure si et seulement si elle est d'interpolation. De plus, si $M_H(X)$ est sa constante d'interpolation, $[M_H(X)]^{-1}$ est sa constante de Riesz inférieure.*

Démonstration. Soit M l'espace fermé engendré par les x_j, qu'on a supposés normés. De nouveau, si X est de Riesz inférieure de constante A, il existe par définition $S : M \to \ell^2$ telle que $S(x_j) = e_j$ pour tout j et $\|S\| \le A^{-1}$. L'adjoint S^* vérifie

$$\langle S^*(w), x_j\rangle = \langle w, e_j\rangle = w_j \quad \forall w = (w_k) \in \ell^2, \quad \forall j \ge 1$$

avec $\|S^*(w)\| \leq \|S\|\|w\| \leq A^{-1}\|w\|$, ce qui montre que X est d'interpolation avec $M_H(X) \leq A^{-1}$. La réciproque s'établit de même, en considérant l'adjoint de l'opérateur $T : \ell^2 \to M$ défini après (2.1) qui vérifiera

$$T^*\Big(\sum_j \lambda_j x_j\Big) = \sum_j \lambda_j e_j$$

et donnera pour (x_j) une constante de Riesz inférieure $A \geq [M_H(X)]^{-1}$. □

Passons au cas d'un espace de Hilbert H de fonctions définies sur un espace topologique Ω, de noyau reproduisant K_a. La suite de points $Z = (z_j) \subset \Omega$ est une *suite d'interpolation* pour H si la suite de vecteurs $x_j = \|K_{z_j}\|^{-1} K_{z_j}$ est d'interpolation, ou encore si, pour toute suite (w_j) telle que l'on ait $\sum_j |w_j|^2 \|K_{z_j}\|^{-2} < \infty$, il existe $f \in H$ telle que

$$\langle f, K_{z_j}\rangle = f(z_j) = w_j \quad \text{et} \quad \|f\| \leq C\Big(\sum_j |w_j|^2\|K_{z_j}\|^{-2}\Big)^{1/2}.$$

2.2. Critères de “Rieszitude”

Le sous-espace E engendré par des K_{z_j} s'appelle *un espace modèle*. La proposition suivante reformule les Propositions 2.4 et 2.6, appliquées à la suite $x_j = \|K_{z_j}\|^{-1} K_{z_j}$, dans le langage des espaces de fonctions, et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (K_{z_j}) de noyaux reproduisants soit une suite de Riesz supérieure (resp. inférieure) pour l'espace modèle E qu'elle engendre, avec contrôle des constantes.

Proposition 2.7. *Soit $Z = (z_j)$ une suite finie dans Ω. Alors*

(1) $\|\sum_j \lambda_j K_{z_j}\|^2 \leq \|\mu_{Z,H}\|_{\mathcal{C},H} \sum_j |\lambda_j|^2 \|K_{z_j}\|^2$, et de plus $\|\mu_{Z,H}\|_{\mathcal{C},H}^{1/2}$ est la constante de Riesz supérieure de (K_{z_j}).

(2) $\|\sum_j \lambda_j K_{z_j}\|^2 \geq [M_H(Z)]^{-2} \sum_j |\lambda_j|^2 \|K_{z_j}\|^2$, et de plus $[M_H(Z)]^{-1}$ est la constante de Riesz inférieure de (K_{z_j}).

Remarque 2.8. On pourrait se contenter de parler de suites de Bessel et de suites de Riesz-Fischer, mais ce “langage à la Carleson” munit d'une intuition géométrique utile (via un théorème de plongement de Carleson) dans l'étude des opérateurs de composition C_φ associés à une application holomorphe $\varphi : \Omega \to \Omega$ lorsque Ω est un ouvert du plan complexe (le disque unité, ou un demi-plan pour les séries de Dirichlet). Ces opérateurs (cf. chapitre 3) sont formellement définis par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \quad \text{avec} \quad C_\varphi : H \to H(\Omega).$$

2.3. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2$

Rappelons la notation, pour tout nombre réel θ :

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \; ; \; \Re\mathrm{e}\, s > \theta\}.$$

2.3.1. Bases de dilatées de l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$

Soit H l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$. On convient qu'une fonction $\varphi \in H$ s'étend d'abord en une fonction *impaire* sur $(-1,1)$ puis en une fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$, toujours notée φ. On remarque (exercice) que si $\psi(x) = \sqrt{2}\sin \pi x$, les dilatées $\psi_n(x) := \psi(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$ forment une *base* orthonormale de H ou encore que toute fonction $\varphi \in H$ a un développement de Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2}\,\sin n\pi x \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Et il est naturel de se demander quelles sont les fonctions $\varphi \in H$ qui possèdent la même propriété. La question posée est tout à fait naturelle et dans l'esprit du théorème de Wiener sur la totalité des translatées d'une fonction (remplacées ici par leurs dilatées). Mais elle est trop rigide : seules les fonction $a_1\sqrt{2}\sin \pi x$ avec $|a_1| = 1$ conviennent, ce qui demande une preuve ([14], théorème 2.4, voir aussi la remarque 2 qui suit le théorème 2.30). Assouplissons-la en demandant

(1) Quelles sont les $\varphi \in H$ telles que les $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ forment une base de Riesz de H ?

(2) Quelles sont les $\varphi \in H$ telles que les $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ forment un système total de H ?

Comme on le verra, il existe une réponse satisfaisante à la première question, en termes de séries de Dirichlet. Considérons la correspondance

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2}\sin n\pi x \in H \to S\varphi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, cela amène naturellement à considérer l'espace $\mathcal{H}^2$ défini ainsi :

$$\mathcal{H}^2 := \Big\{ f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 =: \|f\|^2 < \infty \Big\}. \tag{2.2}$$

Puisque

$$f \in \mathcal{H}^2 \text{ et } \sigma > 1/2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} < \infty$$

par Cauchy-Schwarz, on voit que $\mathcal{H}^2$ est un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et que les fonctions u_n définies par $u_n(s) = n^{-s}$, $n = 1, 2, \dots$, forment une base orthonormale de $\mathcal{H}^2$. Le noyau reproduisant K_a de $\mathcal{H}^2$, c'est-à-dire

$$f(a) = \langle f,\ K_a \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}^2$$

est donc donné pour $s, a \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_n(a)}\, u_n(s) = \zeta(s + \overline{a}) \quad \text{avec } \|K_a\|^2 = K_a(a) = \zeta(2\,\Re\mathrm{e}\, a).$$

On a aussi clairement $K_a^{(j)} \in \mathcal{H}^2$ pour tout entier $j \geq 0$ et de plus

$$f^{(j)}(a) = \langle f,\ K_a^{(j)} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{H}^2.$$

Une réponse complète à la Question 1 sera donnée en termes de l'espace des multiplicateurs de $\mathcal{H}^2$ et de la “fonction génératrice” $S\varphi$. Considérons l'exemple fondateur suivant.

2.3.2. **L'exemple de Wintner**

Soit $\tau \in \mathbb{C}_{1/2}$ et $\varphi = \varphi^{\tau} \in H$ de développement de Fourier

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n^{\tau}}. \tag{2.3}$$

Wintner a démontré

Théorème 2.9 (Wintner)**.** *Si* $\varphi = \varphi^{\tau}$ *avec* $\tau \in \mathbb{C}_{1/2}$ *est comme dans* (2.3), *les dilatées* $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ *sont totales dans* H.

Démonstration. Voici une preuve simple, basée sur le lemme classique suivant :

Lemme 2.10. *Soit* (a_m) *une série* absolument convergente *de complexes telle que* $S_d := \sum_{k=1}^{\infty} a_{kd} = 0$ *pour tout entier* $d \geq 1$*. Alors,* $a_m = 0$ *identiquement.*

Démonstration du lemme. On utilise un argument de *crible* basé sur la fonction de Möbius μ en notant que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) S_d = \sum_{(m,n)=1} a_m = 0$$

où (m,n) désigne le p.g.c.d des entiers m et n. En effet, le membre de droite vaut (séparation des variables)

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \Big(\sum_{d|(m,n)} \mu(d) \Big) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Big(\sum_{\substack{d|m,\\ d|n}} \mu(d) \Big) = \sum_{d|n} \mu(d) \big(\sum_{k\geq 1} a_{kd} \big).$$

Il en résulte que

$$a_1 = - \sum_{\substack{(m,n)=1,\\ m>1}} a_m,$$

d'où

$$|a_1| \leq \sum_{\substack{(m,n)=1,\\ m>1}} |a_m|.$$

En prenant $n = p_1 \cdots p_N$ où (p_j) est la suite des nombres premiers, on obtient

$$|a_1| \leq \sum_{m>p_N} |a_m|$$

puis $a_1 = 0$ en faisant tendre N vers l'infini. Soit ensuite l un entier ≥ 1 et $b_k := a_{lk}$. On a $\sum_{k\geq 1} |b_k| < \infty$ et $\sum_{k\geq 1} b_{kd} = S_{ld} = 0$ pour tout $d \geq 1$. Par ce qui précède, $a_l = b_1 = 0$. □

Finissons maintenant la preuve du théorème 2.9. Pour cela, posons une fois pour toutes $e_j(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi j x$ et considérons $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e_j \in H$, orthogonale aux $\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} e_{kn}$. Alors

$$0 = \langle \varphi_n, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{g_{kn}}}{k^{\tau}} = n^{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{g_{kn}}}{(kn)^{\tau}}.$$

Les hypothèses du lemme sont vérifiées pour la suite $a_m = \overline{g_m}\, m^{-\tau}$, sommable puisque $\Re\mathrm{e}\, \tau > 1/2$ et $(g_m) \in \ell^2$. On en déduit que tous les g_m et g sont nuls, ce qui achève la preuve. □

Le lemme devient faux en l'absence de convergence absolue, comme le montre l'exemple $a_n = \frac{\lambda(n)}{n}$ où λ est la fonction complètement multiplicative de Liouville ([45], p. 29), qui vaut -1 sur les nombres premiers. Un autre exemple, signalé par O. Ramaré ([50]), est $a_n = \frac{\mu(n)}{n}$ où μ est la fonction de Möbius. Voici la preuve.

Proposition 2.11. *Soit q un entier ≥ 1. Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(qn)}{n} = 0.$$

(c'est-à-dire que la série converge avec somme nulle).

Démonstration. Soit χ_0 le caractère principal modulo q et $L(s, \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s}$, d'inverse (par produit d'Euler et puisque $\mu(p) = -1$ et $\mu(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$)

$$1/L(s, \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi_0(n)}{n^s} = [\zeta(s)]^{-1} \prod_{p|q} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Nous avons alors pour $\mathfrak{Re}\, s > 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(qn) n^{-s} &= \sum_{\substack{n\geq 1,\\ (q,n)=1}} \mu(q)\mu(n) n^{-s} = \mu(q) \sum_{n \geq 1} \mu(n)\chi_0(n) n^{-s} \\ &= \mu(q)[\zeta(s)]^{-1} \prod_{p|q} (1 - p^{-s})^{-1} =: G(s).\end{aligned}$$

Le produit fini jouant un rôle inerte, cela implique par le lemme taubérien complexe d'Ingham-Newman ([34], p. 133) : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(qn)}{n} = G(1) = 0$. $\square$

Remarque 2.12. De très intéressants compléments au théorème de Wintner, avec des exemples de suites orthonormales "exotiques" de dilatées, se trouvent dans l'article [14]. En particulier (théorème 3.1 de cet article) si $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2} \sin n\pi x$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, alors (φ_n) est une *suite orthonormale* si et seulement si, posant $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, on a

$$|S\varphi(-iy)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{iy}| = 1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Soit en effet $T(y) = |S\varphi(-iy)|^2 = \sum_{m,n \geq 1} a_m \overline{a_n} (\frac{m}{n})^{iy}$ et μ la mesure de Haar du compactifié de Bohr $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ ([48], ch.1), pour laquelle les exponentielles $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mu)$. On voit que T est à spectre de Fourier-Bohr dans $F := \log E$ où E est l'ensemble des rationnels > 0 et on a l'identité (qui en un sens annonce [27])

$$r = p/q \in E \Rightarrow \int T(y) r^{-iy} d\mu(y) = \langle \varphi_q, \varphi_p \rangle. \tag{2.5}$$

En effet, le second membre de (2.5) vaut

$$\sum_{qm=pn} a_m \overline{a_n} = \sum_{m/n=r} a_m \overline{a_n}.$$

Et le premier aussi puisque $m/n \neq r \Rightarrow \int (m/n)^{iy} r^{-iy} d\mu(y) = 0$. Et (2.4) en découle. Par exemple, si (φ_n) est une suite orthonormale, (2.5) montre que le spectre de Fourier-Bohr de T est réduit à $\log 1 = 0$, la fonction T vaut donc une constante c et $c = \int T(y) d\mu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$. Et (2.5) donne immédiatement la réciproque. Des monômes comme $\varphi(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$ conviennent, mais aussi des fonctions plus inattendues, comme celle (avec $-1 < a < 1$) correspondant à

$$a_1 = -a, \ a_{2^n} = a^{n-1}(1-a^2) \text{ pour } \ n \geq 1, \ a_m = 0 \quad \text{sinon}$$

pour laquelle $S\varphi(s) = \frac{2^{-s} - a}{1 - a 2^{-s}}$. Plus généralement, étant donné des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 2$ et des points $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{D}$, on peut prendre φ définie par

$$S\varphi(s) = \prod_{j=1}^{r} \frac{n_j^{-s} - z_j}{1 - \overline{z_j} n_j^{-s}}.$$

Par contre, si $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$ est un polynôme de Dirichlet unimodulaire, c'est un monôme, comme conséquence du lemme simple suivant

Lemme 2.13. *Soit $\lambda_1 < \cdots < \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $P(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n t}$. Si $|P(t)| = 1$ sur $\mathbb{R}$, alors P est un monôme.*

Démonstration. On peut supposer $a_1 \neq 0$ et $\lambda_1 = 0$, quitte à multiplier par $e^{-i\lambda_1 t}$, ce qui ne change pas le module, et à remplacer λ_n par $\lambda_n - \lambda_1$. Si $N \geq 2$, on a $|P(t)|^2 = \sum a_m \overline{a_n} e^{i(\lambda_m - \lambda_n)t} = 1$ et le coefficient de $e^{i\lambda_N t}$ est $a_N \overline{a_1}$ car $\lambda_m - \lambda_n = \lambda_N \Rightarrow m = N$ et $n = 1$. D'où $a_N = 0$ et finalement $P(t) = a_1$. $\square$

Cela ne passe pas aux polynômes trigonométriques $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j(x)$ sur les groupes abéliens compacts G dont le dual $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ a de la torsion, comme le montre l'exemple du groupe fini (avec $n = 2^N$)

$G_0 = \{\pm 1\},\ \Gamma_0 = \{1, \gamma\},\ Q = 1 + i\gamma,\ G = G_0^N,\ \Gamma = \Gamma_0^N,\ P = Q \otimes \cdots \otimes Q$

pour lequel on a $|Q(y)| = \sqrt{2}$ pour tout $y \in G_0$ et $|P(x)| = \sqrt{n}$ pour tout $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in G$ alors que P n'est pas un monôme. Les sommes de Gauss ([2], p. 168) donnent aussi des exemples intéressants.

2.4. L'espace de Banach $\mathcal{H}^\infty$

2.4.1. Définition et premières propriétés

Soit $\mathcal{D}$ l'espace des séries de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *convergentes* : $\sigma_c(f) < \infty$ ou encore $|a_n| \leq Cn^A$ pour des constantes C, A convenables. Et soit $H^\infty(\mathbb{C}_0)$ l'espace des fonctions analytiques bornées dans le demi-plan droit $\mathbb{C}_0$. On a par définition :

$$\mathcal{H}^\infty = H^\infty(\mathbb{C}_0) \cap \mathcal{D}$$

et on appelle $\mathcal{H}^\infty$ l'espace des séries de Dirichlet bornées. On le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_0} |f(s)|$$

qui en fait un espace de Banach (non-séparable) et même une algèbre de Banach ([48], p. 142). Une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ est donc une fonction qui vérifie *deux* conditions, l'une de croissance, l'autre de développement en série de Dirichlet. Voici quelques exemples :

(1) Soit $g \in H^\infty(\mathbb{D})$. Alors, la fonction $f(s) = g(2^{-s})$ est dans $\mathcal{H}^\infty$. En effet, f est analytique bornée dans $\mathbb{C}_0$ et de plus, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$, on a $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (2^n)^{-s}$, donc $f \in \mathcal{D}$.

(2) Si $a > 1$ n'est pas entier, $f(s) = a^{-s} \notin \mathcal{H}^\infty$. En effet, $f \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$ mais $f \notin \mathcal{D}$ comme on le vérifie facilement, par exemple en comparant le comportement de $f(s)$ et d'une série de Dirichlet $\sum_{n=k}^{\infty} a_n n^{-s}$ avec $a_k \neq 0$ quand $\Re\mathrm{e}\, s \to \infty$. Plus généralement, une série de Hurwitz de la forme $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+\theta)^{-s}$ avec $0 < \theta < 1$ n'est jamais dans $\mathcal{H}^\infty$.

(3) Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s-1} = (1 - 2^{-s})\zeta(s+1)$. Alors, $f \notin \mathcal{H}^\infty$. En effet, $f \in \mathcal{D}$ et même $\sigma_c(f) = 0$. Mais $f \notin H^\infty(\mathbb{C}_0)$ d'après les propriétés de la fonction zeta, par exemple (voir aussi l'inégalité de Bohr du chapitre 1).

2.4.2. **Bases de Riesz de dilatées**

Le théorème de Wintner nous dit que les dilatées de la fonction $\varphi = \varphi^\tau$ de (2.3) engendrent $H = L^2(0,1)$ dès que $\mathfrak{Re}\,\tau > 1/2$. Mais il ne dit pas quand elles forment une base de Riesz. Le théorème suivant ([27]) va fournir la réponse.

Théorème 2.14 (Hedenmalm-Lindqvist-Seip)**.** *Soit $\varphi \in H$ de développement $\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^\infty a_k \sin k\pi x$. On a équivalence entre :*

(1) Les dilatées $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de φ forment une base de Riesz de H.

(2) La fonction génératrice $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ est dans $\mathcal{H}^\infty$ ainsi que son inverse. Dans ce cas, on a

$$\|S\varphi\|_\infty = B\|\varphi\|_2 \text{ et } \|1/S\varphi\|_\infty = (A\|\varphi\|_2)^{-1} \text{ ou encore}$$
$$s \in \mathbb{C}_0 \Rightarrow A\|\varphi\|_2 \leq |S\varphi(s)| \leq B\|\varphi\|_2$$

où A et B sont respectivement les constantes de Riesz inférieure et supérieure de (φ_n).

En particulier, les dilatées de φ^τ forment une base de Riesz de H si et seulement si $\mathfrak{Re}\,\tau > 1$.

Ce théorème *sera montré plus loin,* mais l'application à φ^τ est claire ; on a

$$S\varphi^\tau(s) = \zeta(s+\overline{\tau}), \quad \text{et} \quad \frac{1}{S\varphi^\tau}(s) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n)\, n^{-s-\overline{\tau}}$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Ces fonctions sont bornées dans $\mathbb{C}_0$ si et seulement si $\mathfrak{Re}\,\tau =: \sigma > 1$. On a alors

$$\|\varphi^\tau\|_2 = \sqrt{\zeta(2\sigma)},\ \|S\varphi^\tau\|_\infty = \zeta(\sigma),\ \|1/S\varphi^\tau\|_\infty = \zeta(\sigma)/\zeta(2\sigma)$$

(voir aussi [38]), comme on l'a vu au chapitre 1. Soit encore

$$B = A^{-1} = \zeta(\sigma)/\sqrt{\zeta(2\sigma)}.$$

Voici maintenant une formule due à E. Saksman ([51]), qui se révèle aussi fondamentale dans l'étude de $\mathcal{H}^\infty$ que la formule de convolution de Fejér dans l'étude des séries de Fourier. Ce n'est d'ailleurs pas pour rien que son auteur baptise ce résultat “formule de convolution verticale” !

2.5. La formule de convolution verticale de Saksman

Désignons par E l'ensemble des fonctions ψ de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\psi}$,

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-it\xi} dt$$

est à support compact. Nous avons le

Théorème 2.15 (Saksman)**.** *Soit* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{D}$, θ *un réel* $\geq \sigma_c(f)$ *et* $\psi \in E$. *On suppose* f *bornée dans tout demi-plan* $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ *avec* $\varepsilon > 0$. *Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \widehat{\psi}(\log n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s+it)\psi(t) dt, \quad \forall s \in \mathbb{C}_\theta. \tag{2.6}$$

Démonstration. Observons d'abord que les deux membres de (2.6) ont un sens dans $\mathbb{C}_\theta$ et y définissent des fonctions analytiques. C'est évident pour le membre de gauche, qui est un polynôme de Dirichlet puisque $\psi \in E$. C'est clair pour le membre de droite puisque f est bornée sur chaque $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$. Soit maintenant, en notant que $\sigma_a(f) < \infty$, α un réel $> \max(\theta, \sigma_a(f))$. Si $s \in \mathbb{C}_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(s+it)\psi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s-it} \psi(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} n^{-it}\psi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \widehat{\psi}(\log n),\end{aligned}$$

l'interversion étant justifiée par la convergence de la série de terme général

$$u_n = \int |a_n\, n^{-s-it} \psi(t)| dt \quad \text{avec} \quad u_n \leq |a_n|\, n^{-\alpha} \|\psi\|_1.$$

On a donc l'égalité voulue dans $\mathbb{C}_\alpha$ et, *par prolongement analytique des identités,* dans $\mathbb{C}_\theta$. $\square$

Malgré la simplicité de sa preuve (les arguments usuels de changement de contour, un peu lourds techniquement, sont remplacés par le prolongement analytique des identités), l'identité de convolution verticale (2.6) va se révéler d'une utilité capitale.

2.6. **Applications de la formule de Saksman**

2.6.1. **Une inégalité basique**

Voici d'abord une reformulation utile de (2.6) quand $f \in \mathcal{H}^\infty$ et $\theta = 0$.

Théorème 2.16. *Soit* $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ *et* $\psi \in E$. *Alors, on a pour tout entier* $N \geq 2$ *et tout* $s \in \mathbb{C}_0$ *:*

$$\Big| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \widehat{\psi}\Big(\frac{\log n}{\log N}\Big)\Big| \leq \|f\|_\infty \, \|\psi\|_1. \tag{2.7}$$

Démonstration. On applique (2.6) à la fonction $\psi_\lambda(t) = \lambda\psi(\lambda t)$ où $\lambda = \log N$, qui vérifie $\|\psi_\lambda\|_1 = \|\psi\|_1$ et $\widehat{\psi_\lambda}(\xi) = \widehat{\psi(\xi/\lambda)}$. Le premier membre de (2.7) vaut donc

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f(s+it)\psi_\lambda(t)dt\Big| \leq \|f\|_\infty \, \|\psi_\lambda\|_1 = \|f\|_\infty \, \|\psi\|_1. \qquad \square$$

L'inégalité simple suivante est fondamentale dans l'étude de $\mathcal{H}^\infty$. Elle intervient d'ailleurs dans la preuve de la complétude de $\mathcal{H}^\infty$ ([48], p. 142).

Théorème 2.17. *Soit* $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$. *Alors, on a*

$$|a_N| \leq \|f\|_\infty \text{ pour tout } \; N \geq 1. \tag{2.8}$$

En particulier, $\sigma_c(f) \leq 1$.

Démonstration. Notons d'abord que $a_1 = \lim_{\Re\mathrm{e}\, s\to\infty} f(s)$, donc $|a_1| \leq \|f\|_\infty$. Fixons ensuite un entier $N \geq 2$ et $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_0$. Soit $h > 0$ tel que $h < \inf_{n\neq N} |\log n/\log N - 1|$, puis $\varphi \in E$ telle que $\varphi \geq 0$ et $\widehat{\varphi}$ soit la fonction triangle $\widehat{\varphi}(\xi) = (1 - |\xi|/h)^+$, et soit enfin $\psi(t) = e^{it}\varphi(t)$ si bien que

$$\widehat{\psi}(\xi) = (1 - |\xi - 1|/h)^+ \text{ et } \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1 = \widehat{\varphi}(0) = 1,\ \widehat{\psi}(1) = 1.$$

On a par construction :

$$\widehat{\psi}\Big(\frac{\log n}{\log N}\Big) = 1 \text{ si } n = N, \quad \text{ et } = 0 \text{ si } n \neq N.$$

L'inégalité (2.7) se lit donc $|a_N|\, N^{-\sigma} \leq \|f\|_\infty$. Il reste à faire tendre σ vers zéro. $\square$

2.6.2. Sommes partielles des séries de Dirichlet et théorème de Bohr

Si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ et si N est un entier ≥ 1, on note $S_N(f)$ la N-ième somme partielle de f. C'est le polynôme de Dirichlet défini par

$$S_N(f)(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}. \tag{2.9}$$

Un résultat fondamental de Bohr ([13]) est le suivant :

Théorème 2.18 (Bohr). *Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$. Alors, la série de Dirichlet associée à f converge uniformément dans tout demi-plan $\mathbb{C}_\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, en d'autres termes*

$$\sigma_u(f) \leq 0. \tag{2.10}$$

Dans [6] on a prouvé un résultat plus fort, sous forme quantitative, en montrant que

$$\|S_N(f)\|_\infty \leq C \log(N+1) \|f\|_\infty. \tag{2.11}$$

Le résultat est plus fort car, si l'on en dispose, on obtient le théorème 2.18 en écrivant pour $s \in \mathbb{C}_0$:

$$a_n n^{-s-\varepsilon} = n^{-\varepsilon} \big[S_n(f)(s) - S_{n-1}(f)(s) \big]$$

et en faisant une transformation d'Abel.

La preuve de (2.11) utilisait une méthode *complexe*. On partait de la formule de sommation de Perron pour exprimer S_N comme une intégrale le long d'un segment vertical, à un terme d'erreur près ; puis à l'aide du théorème de Cauchy on décalait le segment vers la gauche, et enfin on optimisait ce décalage par rapport à un certain paramètre. La formule de convolution de Saksman permet de donner une preuve *essentiellement réelle et "self-contained"*, que nous reproduisons ici avec la permission de l'auteur ([51]).

Théorème 2.19 (Balasubramanian-Calado-Queffélec). *Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$ et N un entier ≥ 1. Alors*

$$\|S_N(f)\|_\infty \leq C \log(N+1) \|f\|_\infty \tag{2.12}$$

où C est une constante numérique.

Démonstration. On utilise l'inégalité (2.7) et un bon choix de la fonction ψ figurant dans cette inégalité, donné par le lemme suivant

Lemme 2.20 (Fonction Test)**.** *Soit T la fonction paire sur $\mathbb{R}$ définie par*

$$T(t) = 1 \text{ pour } 1 \leq t \leq 1 - 1/N, \ T(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1 + 1/N,$$

$$T \text{ linéaire sur } [1 - 1/N, 1 + 1/N].$$

Alors, $T = \widehat{\psi}$ avec $\psi \in E$ et

$$\|\psi\|_1 \leq \frac{4 + 2\log N}{\pi} \tag{2.13}$$

Démonstration du lemme. Si $h > 0$, soit χ_h la fonction indicatrice de $(-h, h)$. Alors, $\widehat{\chi_h}(\xi) = 2\frac{\sin h\xi}{\xi}$ et

$$T = \frac{1}{2a}\chi_a * \chi_b$$

avec $a = 1/N$ et $b = 1$. D'où

$$\widehat{T}(\xi) = 2N\,\frac{\sin \xi/N}{\xi}\,\frac{\sin \xi}{\xi}$$

Nous voyons alors que

$$\|\widehat{T}\|_1 \leq 8 + 4\log N. \tag{2.14}$$

En effet, la parité de T et le changement de variable $\xi = Ny$ donnent

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}\|_1 = 4\int_0^\infty \frac{|\sin y||\sin Ny|}{y^2}dy &\leq 4\left(\int_0^{1/N} N dy + \int_{1/N}^1 \frac{dy}{y} + \int_1^\infty \frac{dy}{y^2}\right)\\ &= 8 + 4\log N.\end{aligned}$$

Maintenant, la formule d'inversion de Fourier et la parité impliquent

$$T = \widehat{\psi} \quad \text{avec} \quad \|\psi\|_1 \leq \frac{4 + 2\log N}{\pi}\cdot \tag{2.15}$$

$\square$

On applique pour finir (2.7) avec ψ comme dans le lemme. Ce qui nous donne pour $s \in \mathbb{C}_0$, puisque $\widehat{\psi} = T$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}\, T\Big(\frac{\log n}{\log N}\Big)\Big| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|_1. \tag{2.16}$$

On peut supposer que $\|f\|_\infty = 1$ et on note que

$$1 - \frac{1}{N} < \frac{\log n}{\log N} \leq 1 + \frac{1}{N} \Longleftrightarrow \leq Ne^{-\log N/N} < n \leq Ne^{\log N/N}$$

si bien que le membre de gauche de (2.16) ne diffère de $S_N(f)(s)$ que par au plus

$$N\big[e^{\log N/N} - e^{-\log N/N}\big] \ll \log N$$

termes, tous de taille $\ll \|f\|_\infty = 1$ d'après (2.8). Comme on a de plus $\|\psi\|_1 \ll \log N$, prenant le sup sur $s \in \mathbb{C}_0$, on obtient le théorème 2.19. $\square$

2.6.3. L'identité de Carlson

Voici maintenant une formule utile de type Parseval pour les séries de Dirichlet, dont la validité en général pose des problèmes délicats ([48], chap. 7), mais pas pour les séries de Dirichlet bornées.

Théorème 2.21. *Soit $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ et $\varepsilon > 0$. Alors, on a*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(\varepsilon + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 n^{-2\varepsilon} \leq \|f\|_\infty^2. \tag{2.17}$$

En particulier, on a l'inclusion contractante $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^2$, au sens où

$$f \in \mathcal{H}^\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{H}^2 \text{ et } \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la série $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-\varepsilon} n^{-it}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 2.18, et que pour une série du type $f(t) = \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-i\lambda_n t}$, uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, on a toujours (avec ici $\lambda_n = \log n$)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^\infty |b_n|^2.$$

Ceci se vérifie à l'arme blanche grâce à la convergence uniforme. En termes plus savants, c'est l'identité de Parseval pour f continue sur le compactifié de Bohr $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ muni de sa mesure de Haar μ qui vérifie

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} g\, d\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t) dt$$

pour toute g continue sur $\overline{\mathbb{R}}$. Quoi qu'il en soit, on a (2.17) et la seconde assertion s'obtient en faisant tendre ε vers 0. $\square$

Remarque 2.22. Si $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$, la limite radiale $f(it) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon + it)$ existe presque partout par le théorème de Fatou, et on peut logiquement se demander si l'on a encore

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Il n'en est rien ([52]), et le membre de gauche peut même ne pas avoir de limite !

2.6.4. Les multiplicateurs de $\mathcal{H}^2$

Nous noterons dans ce paragraphe $\| \ \|_2$ la norme dans $\mathcal{H}^2$. Nous allons montrer ici le résultat fondamental suivant ([27]) par la méthode de Saksman (voir aussi [1]), et en donnerons une application.

Théorème 2.23 (Hedenmalm-Lindqvist-Seip)**.** *Les multiplicateurs de $\mathcal{H}^2$ s'identifient isométriquement à $\mathcal{H}^\infty$. De façon plus précise, soit f une fonction complexe définie sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Alors*

$$fg \in \mathcal{H}^2 \quad \forall g \in \mathcal{H}^2 \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}^\infty, \qquad \textit{et de plus} \quad \|f\|_\infty = \sup_{\|g\|_2 \le 1} \|fg\|_2.$$

Démonstration. Elle va nécessiter les deux lemmes qui suivent

Lemme 2.24. *Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$ et $g \in \mathcal{H}^2$. Alors, $fg \in \mathcal{H}^2$ et*

$$\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2. \tag{2.18}$$

Démonstration du lemme. Soit

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},\ g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s},\ (fg)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

puis soit $g_N(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s}$ et $(fg_N)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(N)} n^{-s}$ où N est un entier ≥ 1. On applique le théorème 2.21 (identité de Carlson) à $fg_N \in \mathcal{H}^\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ donné :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(N)}|^2 n^{-2\varepsilon} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(\varepsilon+it)|^2 |g_N(\varepsilon+it)|^2 dt \\
&\le \|f\|_\infty^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |g_N(\varepsilon+it)|^2 dt \ = \ \|f\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 n^{-2\varepsilon} \\
&\le \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2.
\end{aligned}$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n^{(N)}|^2 \leq \|f\|_\infty^2\|g\|_2^2$ en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou. Il reste à remarquer que, pour chaque n fixé, on a

$$c_n^{(N)} = \sum_{\substack{ij=n,\\ j\leq N}} a_i b_j \overset{N\to\infty}{\to} \sum_{ij=n} a_i b_j = c_n$$

et à réappliquer le lemme de Fatou. □

Dans le lemme à venir, nous noterons, pour r entier ≥ 1, N_r l'ensemble des entiers qui n'ont que des diviseurs premiers $\leq p_r$, le r-ième nombre premier. Et $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des polynômes de Dirichlet à spectre dans N_r, i.e. tels que $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ et $c_n \neq 0 \Rightarrow n \in N_r$.

Lemme 2.25. *Pour chaque $s \in \mathbb{C}_0$ et chaque r entier ≥ 1, il existe une constante $C_{s,r} > 0$ telle que*

$$f \in \mathcal{P}_r \Rightarrow |f(s)| \leq C_{s,r}\|f\|_2. \tag{2.19}$$

Démonstration du lemme. Soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_0$ et $f(s) = \sum_{n\in N_r} c_n n^{-s} \in \mathcal{P}_r$. Une identité d'Euler tronquée montre que

$$C_{s,r} := \sum_{n\in N_r} n^{-2\sigma} = \prod_{j=1}^{r}(1-p_j^{-2\sigma})^{-1} < \infty.$$

Cauchy-Schwarz donne maintenant

$$|f(s)| \leq \Big(\sum_{n\in N_r}|c_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\in N_r} n^{-2\sigma}\Big)^{1/2} = C_{s,r}\|f\|_2. \qquad \square$$

Revenons à la preuve du théorème 2.23. Soit f un multiplicateur de $\mathcal{H}^2$. On note $M_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ l'opérateur de multiplication par f. On a $f \in \mathcal{H}^2$ car $f = M_f(1)$, et M_f est un opérateur borné par le théorème du graphe fermé. On note λ sa norme. Le Lemme 2.24 nous dit qu'une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ est un multiplicateur, avec $\lambda \leq \|f\|_\infty$. La réciproque va s'établir en trois étapes.

Etape 1 ("Power trick"). On a $\lambda = \|f\|_\infty$ si f est un polynôme de Dirichlet. En effet, fixons r tel que $f \in \mathcal{P}_r$, et $s \in \mathbb{C}_0$. On voit de proche en proche que $\|f^k\|_2 \leq \lambda^k$ pour k entier ≥ 1, puisque $f^k = M_f(f^{k-1})$ et $f^0 = 1$. Le Lemme 2.25, applicable à $f^k \in \mathcal{P}_r$, nous donne maintenant :

$$|f(s)|^k \leq C_{s,r}\|f^k\|_2 \leq C_{s,r}\lambda^k \quad \text{puis} \quad |f(s)| \leq \lambda (C_{s,r})^{1/k}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $|f(s)| \leq \lambda$ puis $\|f\|_\infty \leq \lambda$.

Etape 2. Écrivons $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Soit $\psi \in E$ et $P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widehat{\psi}(\log n) n^{-s}$. Alors

$$\|M_P\| \leq \|M_f\| \times \|\psi\|_1 = \lambda \|\psi\|_1. \tag{2.20}$$

Soit en effet, pour t réel, T_t l'opérateur de translation verticale par it défini par $T_t\, g(s) = g(s + it)$. Cet opérateur est une isométrie sur $\mathcal{H}^2$ et de plus $T_t f$ est encore un multiplicateur, avec $\|M_{T_t f}\| = \|M_f\|$. En effet, puisque $(T_t f)g = T_t\big(f(T_{-t}\, g)\big)$, on a

$$\|(T_t f)g\|_2 = \|f(T_{-t}\, g)\|_2 \leq \|M_f\|\, \|T_{-t}\, g\|_2 = \|M_f\|\, \|g\|_2.$$

Maintenant, la formule de convolution verticale de Saksman s'écrit sous forme d'intégrale vectorielle (avec $\int = \int_{\mathbb{R}}$)

$$P = \int (T_t f)\, \psi(t) dt$$

d'où, si $g \in \mathcal{H}^2$, $Pg = \int (T_t f\, g)\, \psi(t) dt$ puis

$$\|Pg\|_2 \leq \int \|T_t f\, g\|_2\, |\psi(t)| dt \leq \int \|M_f\|\, \|g\|_2\, |\psi(t)| dt = \|M_f\|\, \|g\|_2 \|\psi\|_1$$

ce qui prouve (2.20).

Etape 3. Soit (ψ_j) une approximation de l'identité dans L^1, par exemple telle que $\widehat{\psi_j}(\xi) = (1 - \frac{|\xi|}{j})^+$. Et soit P_j le polynôme de Dirichlet correspondant :

$$P_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widehat{\psi_j}(\log n) n^{-s} = \int (T_t f)(s)\, \psi_j(t) dt.$$

D'après les deux premières étapes, on a $\|P_j\|_\infty = \|M_{P_j}\| \leq \lambda$. Modulo extraction, le théorème de Montel permet de supposer que P_j tend uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_0$ vers une fonction $F \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$ avec $\|F\|_\infty \leq \lambda$. Soit maintenant $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_{1/2}$. Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} < \infty$ et $\widehat{\psi_j}(\log n) \to 1$ quand $j \to \infty$, avec $0 \leq \widehat{\psi_j}(\log n) \leq 1$, donc

$$P_j(s) \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = f(s),$$

ce qui donne $f(s) = F(s)$. Ainsi, f se prolonge en une fonction analytique bornée par λ sur $\mathbb{C}_0$. Et $f \in \mathcal{D}$ puisque $f \in \mathcal{H}^2$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Un corollaire immédiat et utile de ce théorème des multiplicateurs, que nous utiliserons au prochain paragraphe, est le suivant :

Corollaire 2.26. *Soit $\varphi \in \mathcal{H}^\infty$. Alors, l'opérateur M_φ de multiplication par φ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^2$ si et seulement si $1/\varphi \in \mathcal{H}^\infty$. Dans ce cas, on a*

$$\|M_\varphi^{-1}\| = \|1/\varphi\|_\infty.$$

Remarque 2.27. D'intéressantes généralisations de ce théorème des multiplicateurs à d'autres espaces de Hilbert pondérés de séries de Dirichlet ont été obtenues par J. McCarthy ([40]) et plus récemment par M. Bailleul ([3]).

2.7. Le Théorème des dilatées

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème 2.14. On note $H = L^2(0,1)$ et $(e_k)_{k\geq 1}$ sa base orthonormale définie par $e_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x$ ainsi que $\sum_{k=1}^\infty a_k\, e_k$ le développement de $\varphi \in H$ fixée. On dispose d'un opérateur de transfert unitaire $S : H \to \mathcal{H}^2$ défini par (notant $u_n(s) = n^{-s}$)

$$S(f) = \sum_{n=1}^\infty c_n u_n \quad \text{si} \quad f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n.$$

Supposons d'abord que (φ_n) est une base de Riesz de H, nous disposons aussi d'un opérateur de Toeplitz $T_\varphi : H \to H$ défini par

$$T_\varphi f = \sum_{n=1}^\infty c_n \varphi_n \text{ si } f = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n \quad \text{avec } \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 < \infty.$$

Le lemme suivant exprime une relation utile d'entrelacement entre S et T_φ.

Lemme 2.28. *Si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz de H, on a*

$$S(T_\varphi\, f) = S\varphi\, Sf \quad \textit{pour toute} \quad f \in H. \tag{2.21}$$

Autrement dit, $ST_\varphi = M_\varphi S$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par $S\varphi$.

Démonstration. Si $f = \sum_{n\geq 1} c_n e_n$, on a

$$T_\varphi f = \sum_{n=1}^\infty c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^\infty c_n \Big(\sum_{k=1}^\infty a_k e_{nk}\Big) = \sum_{N=1}^\infty e_N \Big(\sum_{nk=N} c_n\, a_k\Big) = \sum_{N=1}^\infty e_N (a{*}c)_N$$

(où $*$ désigne la convolution de Dirichlet) si bien que

$$S(T_\varphi f) = \sum_{N=1}^{\infty} (a * c)_N \, N^{-s} = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s})(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}) = S\varphi \, Sf$$

ce qui prouve (2.21). □

Comme conséquence du Lemme 2.28 (écrivant $\| \quad \|_2$ pour la norme dans $H = L^2(0,1)$ et notant que $\|\varphi_n\|_2 = \|\varphi\|_2$), on voit que pour tout $f \in H$:

$$\|S\varphi \, Sf\|_{\mathcal{H}^2} = \|S(T_\varphi f)\|_{\mathcal{H}^2} = \|T_\varphi f\|_2 \leq B\|\varphi\|_2 \|f\|_2 = B\|\varphi\|_2 \|Sf\|_{\mathcal{H}^2}$$

où B est la constante de Riesz supérieure de (φ_n). Comme S est surjective, cela exprime que $S\varphi$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}^2$ de norme $\leq B\|\varphi\|_2$, et donc $\|S\varphi\|_\infty \leq B\|\varphi\|_2$. On a par un calcul analogue (écrivant $g = Sf$)

$$\|(S\varphi)\, g\|_{\mathcal{H}^2} \geq A\|\varphi\|_2 \, \|g\|_{\mathcal{H}^2} \quad \forall g \in \mathcal{H}^2 \tag{2.22}$$

où A est la constante de Riesz inférieure de (φ_n). Notons $M = M_\varphi$: $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ cet opérateur de multiplication par $S\varphi$. On a $M = ST_\varphi S^{-1}$ d'après le Lemme 2.28 donc M est bijectif puisque T_φ est surjectif, les φ_n formant une *base* de Riesz. En particulier, il existe $g \in \mathcal{H}^2$ telle que $M(g) = (S\varphi)\, g = 1$. Par suite, $S\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_{1/2}$ (l'hypothèse de totalité des φ_n est essentielle à cet égard : dans l'exemple de la remarque qui suit le théorème de Wintner, la fonction $S\varphi$ vérifie

$$\|S\varphi \, g\|_{\mathcal{H}^2} = \|g\|_{\mathcal{H}^2}$$

pour toute $g \in \mathcal{H}^2$ et pourtant a des zéros dans $\mathbb{C}_{1/2}$ dès que $|a| < 1/\sqrt{2}$). La relation (2.22) s'écrit aussi bien, puisque M est surjectif et puisque $S\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_{1/2}$

$$\|g/S\varphi\|_{\mathcal{H}^2} \leq (A\|\varphi\|_2)^{-1} \|g\|_{\mathcal{H}^2} \quad \forall g \in \mathcal{H}^2. \tag{2.23}$$

Il en résulte que $1/S\varphi$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}^2$ de norme $\leq (A\|\varphi\|_\infty)^{-1}$, ce qui montre au passage que $S\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_0$ et achève, modulo le théorème 2.23 et son corollaire 2.26, la preuve de l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) du théorème 2.14.

Supposons maintenant que $S\varphi$ et $1/S\varphi$ sont dans $\mathcal{H}^\infty$. Nous avons encore, désignant par $V \subset H$ l'espace vectoriel (non fermé) engendré par les e_n, la relation (2.21) pour $f \in V$, qui montre que

$$(\|1/S\varphi\|_\infty)^{-1} \|f\|_2 \leq \|T_\varphi f\|_2 \leq \|S\varphi\|_\infty \|f\|_2 \quad \forall f \in V. \tag{2.24}$$

D'autre part, (2.21) de nouveau montre que $T_\varphi : V \to H$ est d'image dense, puisque l'opérateur $M : SV \to \mathcal{H}^2$ de multiplication par $S\varphi$ est d'image dense sachant que $S\varphi$ et $1/S\varphi$ sont dans $\mathcal{H}^\infty$. Mais (2.24) et la densité de $T_\varphi(V)$ montrent que (φ_n) est une base de Riesz de H de constantes B et A vérifiant $B\|\varphi\|_2 \leq \|S\varphi\|_\infty$ et $(A\|\varphi\|_2)^{-1} \leq \|1/S\varphi\|_\infty$. Cela prouve l'implication (1) ⇒ (2) du théorème 2.14.

Remarques 2.29.

(1) Une version affaiblie du théorème 2.14 a été obtenue dans ([24]) sous la forme suivante (cf. [48], p. 25 pour la définition de presque-périodique)

Théorème 2.30. Supposons que $S\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ se prolonge dans $\overline{\mathbb{C}_0}$ avec $S\varphi(it)$ presque-périodique sur $\mathbb{R}$ au sens de Bohr. Alors, (φ_n) est une base de Riesz si et seulement si $1/S\varphi \in \mathcal{H}^2$ et

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |S\varphi(it)| > 0.$$

Mais il est remarqué dans [28] que cette forme est strictement plus faible que le théorème 2.14, avec l'exemple (déduit de la fonction intérieure singulière $z \mapsto e^{-(1+z)/(1-z)}$)

$$S\varphi(s) = \frac{1}{4}\big[3 + e^{-(1+2^{-s})/(1-2^{-s})}\big]$$

qui vérifie clairement $1/2 < |S\varphi(s)| < 1$ dans $\mathbb{C}_0$, mais pour lequel $S\varphi(it)$ n'est même pas continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Voici comment prouver une assertion gratuite de l'introduction. Supposons que $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n \in H$ et que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ soit une *base orthonormale* de H. Nous pouvons écrire $e_1 = \sum_{k\geq 1} c_k \varphi_k$ avec $\sum |c_k|^2 < \infty$. D'où $e_n = \sum_{k\geq 1} c_k \varphi_{kn}$ puisque $e_n = (e_1)_n$. En particulier, si $n > 1$:

$$a_n = \langle \varphi, e_n\rangle = \langle \varphi_1, \sum_{k\geq 1} c_k\varphi_{kn}\rangle = \sum_{k\geq 1} \overline{c_k}\langle \varphi_1, \varphi_{kn}\rangle = 0$$

puisque $kn \geq n > 1$ et donc $\varphi_1 \perp \varphi_{kn}$. Il vient $\varphi = a_1 e_1$ avec $|a_1| = 1$.

2.8. Propriétés supplémentaires de $\mathcal{H}^2$

Les deux résultats suivants aident à l'étude des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$ du chapitre 3.

2.8.1. **Représentation intégrale**

Il est utile de disposer d'une formule de représentation intégrale pour la norme dans $\mathcal{H}^2$, analogue à la formule de Parseval pour l'espace de Hardy H^2 du disque. Plusieurs formules semblables existent, en particulier une formule de type Littlewood-Paley, valable aussi pour les espaces $\mathcal{H}^p$ de séries de Dirichlet ([9], [10], [11]). La suivante, très élémentaire, suffira à nos besoins.

Théorème 2.31. *Soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2$, dont la série de Dirichlet converge* uniformément sur $\mathbb{C}_0$. *Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$ avec $u \geq 0$ et $\|u\|_1 = 1$, de dilatées $u_a(t) = \frac{1}{a}u(\frac{t}{a}), \quad a > 0$. Alors*

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}^2} = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 u_a(t)dt.$$

Démonstration. La preuve formelle qui suit est valide si f est un polynôme de Dirichlet, i.e. $a_m = 0$ pour m grand. On a puisque $\widehat{u_a}(\xi) = \widehat{u}(a\xi)$ et $\widehat{u}(0) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(it)|^2 u_a(t)dt &= \sum_{m,n} a_m \overline{a_n} \int_{\mathbb{R}} (m/n)^{-it} u_a(t)dt = \sum_{m,n} a_m \overline{a_n}\, \widehat{u_a}(\log(m/n)) \\ &= \sum_{m,n} a_m \overline{a_n}\, \widehat{u}\big[a(\log m - \log n)\big] \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{H}^2}\end{aligned}$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Dans le cas général, soit $\varepsilon > 0$ et N_0 un entier tel que $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(it) - f_N(it)| \leq \varepsilon$ pour $N \geq N_0$, où l'on pose $f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}$. L'inégalité triangulaire et le fait que $\int_{\mathbb{R}} u_a(t)dt = 1$ donnent pour $N \geq N_0$, notant ici $\mu_a = u_a(t)dt$ et $f,\ f_N$ pour $f(it),\ f_N(it)$:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a\Big)^{1/2} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f - f_N|^2 d\mu_a\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\mathbb{R}} |f_N|^2 d\mu_a\Big)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon + \Big(\int_{\mathbb{R}} |f_N|^2 d\mu_a\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

d'où par ce qui précède

$$\limsup_{a\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a\Big)^{1/2} \leq \varepsilon + \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Big)^{1/2} \leq \varepsilon + \|f\|_{\mathcal{H}^2}.$$

On obtient de même pour $N \geq N_0$

$$\liminf_{a\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_a\Big)^{1/2} \geq -\varepsilon + \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Big)^{1/2}$$

et le résultat s'ensuit en faisant tendre N vers l'infini puis ε vers zéro. □

2.8.2. Plongement local

Soit $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ l'espace de Hardy du demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$, défini comme l'ensemble des fonctions h analytiques dans $\mathbb{C}_{1/2}$ pour lesquelles

$$\|h\|^2_{H^2(\mathbb{C}_{1/2})} := \sup_{\sigma>1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma+it)|^2 dt < \infty. \tag{2.25}$$

Chaque h dans $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ a (théorème de Fatou) une limite non-tangentielle en presque chaque point de la droite verticale $\sigma = 1/2$, et la fonction limite correspondante $h \mapsto h(1/2+it)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$; la norme L^2 de cette fonction coïncide avec la norme H^2 définie par (2.25). Le résultat suivant, très utile, fait le lien entre $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ et l'espace $\mathcal{H}^2$ ([43]). Il est basé sur une inégalité de Hilbert généralisée due à Montgomery et Vaughan ([42]) qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.32 (Montgomery-Vaughan)**.** *Soit (λ_n) une suite discrète de réels distincts, et $\delta_n = \inf_{m\neq n} |\lambda_m - \lambda_n| > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Alors, pour toute suite finie $(a_n)_{1\leq n\leq N}$ de complexes, on a :*

$$\Big| \sum_{\substack{1\leq m,n\leq N,\\ m\neq n}} \frac{a_m\overline{a_n}}{\lambda_m - \lambda_n} \Big| \leq C \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|^2}{\delta_n} \tag{2.26}$$

où C est une constante numérique ($C=\frac{3}{2}$ convient). En conséquence, si $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ est une série de Dirichlet uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, on a uniformément par rapport à $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$

$$\int_a^b \big|S(t)\big|^2 dt \ll \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (b - a + \delta_n^{-1}) \tag{2.27}$$

Démonstration. L'implication “(2.26) entraîne (2.27)” découle de

$$\int_a^b |S(t)|^2 dt = (b-a)\sum |a_n|^2 + \sum_{m\neq n} a_m\overline{a_n}\, \frac{e^{i(\lambda_m-\lambda_n)b} - e^{i(\lambda_m-\lambda_n)a}}{i(\lambda_m - \lambda_n)}$$

changeant a_m en $a_m\, e^{i\lambda_m b}$ ou $a_m\, e^{i\lambda_m a}$, de même module que a_m. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le (cf. [43])

Théorème 2.33 (Théorème de plongement)**.** *Soit $f \in \mathcal{H}^2$. Alors, la fonction $F(s) = f(s)/s$ est dans l'espace de Hardy ordinaire $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$ et de plus*

$$\|F\|^2_{H^2(\mathbb{C}_{1/2})} \leq C\|f\|^2_{\mathcal{H}^2} \tag{2.28}$$

où C est une constante numérique. De façon équivalente : pour chaque $b > 0$, il existe une constante $C_b > 0$ telle que, si $f \in \mathcal{H}^2$

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f(1/2 + ix)\right|^2 P_b(x)dx \leq C_b\|f\|^2_{\mathcal{H}^2} \tag{2.29}$$

où P_b est le noyau de Poisson de $\mathbb{C}_0$ en b, $P_b(x) = \frac{b}{\pi(b^2+x^2)}$.

Démonstration. Notons que (2.28) implique, modulo le théorème de Fatou pour $H^2(\mathbb{C}_{1/2})$, l'existence presque partout de la limite radiale

$$f\big(1/2 + ix\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} f\big(1/2 + \varepsilon + ix\big)$$

quand $f \in \mathcal{H}^2$. Montrons maintenant la forme (2.29). On note d'abord que (2.27) entraîne, prenant $\lambda_n = \log n$ et donc $\delta_n \approx 1/n$ et changeant a_n en $a_n n^{-1/2-\varepsilon}$ lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ et $\varepsilon > 0$:

$$\int_k^{k+1} |\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1/2-\varepsilon-ix}|^2 dx \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = C\|f\|^2_{\mathcal{H}^2}$$

où C est une constante numérique. Ensuite

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(1/2+\varepsilon+ix)|^2 P_b(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(1/2+\varepsilon+ix)|^2 P_b(x)dx \\ &\ll \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2+1}|f(1/2+\varepsilon+ix)|^2 dx \\ &\ll \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2+1}\|f\|^2_{\mathcal{H}^2} \\ &\ll \|f\|^2_{\mathcal{H}^2}\end{aligned}$$

où les constantes sous-jacentes ne dépendent que de b. Il reste à faire tendre ε vers zéro et à appliquer le théorème et le lemme de Fatou. $\square$

2.9. Propriétés supplémentaires de $\mathcal{H}^\infty$

L'amélioration suivante du théorème de Bohr a été obtenue dans [49]

2.9.1. Un théorème de Bohr pour la partie réelle

Théorème 2.34. *Soit $f \in H(\mathbb{C}_0) \cap \mathcal{D}$ avec $\Re\mathrm{e}\, f > 0$. Alors, $\sigma_u(f) \leq 0$ et en particulier $\sigma_c(f) \leq 0$.*

Démonstration. On rappelle le théorème de Herglotz ([22], p. 17), disant que toute fonction h harmonique positive sur $\mathbb{C}_0$ s'écrit

$$h(\sigma + it) = c\sigma + \int_{\mathbb{R}} P_\sigma(t - \tau) d\mu(\tau) \tag{2.30}$$

où c est une constante ≥ 0, μ une mesure positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\tau)}{1+\tau^2} < \infty$ et P_σ le noyau de Poisson en $\sigma > 0$, déjà rencontré :

$$P_\sigma(v) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + v^2}.$$

Il est clair que

$$0 < \sigma \leq \theta \Rightarrow P_\sigma(v) \leq \frac{\theta}{\sigma} P_\theta(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}.$$

Par (2.30), on en déduit une inégalité de Harnack précisée

$$h(\sigma + it) \leq \frac{\theta}{\sigma} h(\theta + it). \tag{2.31}$$

Maintenant, puisque $f \in \mathcal{D}$, f est bornée par une constante M dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$ avec $\theta > 0$. Fixons $0 < \alpha < 1$ et appliquons (2.31) à la fonction harmonique positive $h = \Re\mathrm{e}\, f^\alpha$, qui vérifie de plus (sur $\mathbb{C}_0$)

$$|f|^\alpha \leq \frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} h =: C_\alpha h.$$

Nous obtenons, pour $0 < \sigma \leq \theta$, les inégalités

$$|f(\sigma+it)|^\alpha \leq C_\alpha h(\sigma+it) \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} h(\theta+it) \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} |f(\theta+it)|^\alpha \leq C_\alpha \frac{\theta}{\sigma} M^\alpha.$$

Ainsi, f est bornée dans C_ε pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 2.18 de Bohr, translaté, on en déduit $\sigma_u(f) \leq \varepsilon$, puis $\sigma_u(f) \leq 0$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

2.9.2. Un théorème de Montel pour $\mathcal{H}^\infty$

Le résultat ([9]) que nous allons montrer constitue un remarquable renforcement du théorème classique de Montel sur les familles normales de fonctions holomorphes. Il permet de donner une caractérisation très simple des opérateurs de composition compacts sur $\mathcal{H}^\infty$ ([10]).

Théorème 2.35 (Bayart)**.** *Soit (f_j) une suite de $\mathcal{H}^\infty$ bornée en norme. Alors, cette suite contient une suite extraite convergeant uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ sur tout demi-plan $\mathbb{C}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. Soit $f_j(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n^{(j)}\, n^{-s}$. On sait que $|a_n^{(j)}| \leq \|f_j\|_\infty \leq C$ pour une certaine constante C. Par le procédé diagonal, modulo une extraction, on peut supposer que $a_n^{(j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} a_n$ pour tout n avec $|a_n| \leq C$ et un argument de double limite montre que

$$s \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow f_j(s) \to \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} =: f(s).$$

Par le théorème usuel de Montel et modulo une autre extraction, $f_j \to g$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_0$ où $g \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$, et on a $f = g$ sur $\mathbb{C}_1$, ce qui montre que $f \in \mathcal{H}^\infty$. Reste à montrer que, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$g_j(s) := f_j(s+\varepsilon) - f(s+\varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty (a_n^{(j)} - a_n)\, n^{-s-\varepsilon} \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}^\infty.$$

On pose

$$\Delta_n^{(j)}(s) = \sum_{k=1}^n (a_k^{(j)} - a_k)\, k^{-s} \text{ si } n \geq 1,\ \Delta_0^{(j)}(s) = 0$$

et on voit que

$$|g_j(s)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n^{(j)} - a_n| + \sum_{n>N} \left|(\Delta_n^{(j)} - \Delta_{n-1}^{(j)})(s)\, n^{-\varepsilon}\right|.$$

Mais $\|f_j - f\|_\infty \leq 2C$; la version “sommes partielles” du théorème de Bohr nous donne donc $\|\Delta_n^{(j)}\|_\infty \leq K \log n$ où K est une constante. Une transformation d’Abel donne alors

$$\|g_j\|_\infty \leq \sum_{n=1}^N |a_n^{(j)} - a_n| + \sum_{n>N} \frac{K\varepsilon \log n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

D'où, à N fixé :

$$\limsup_{j\to\infty} \|g_j\|_\infty \leq \sum_{n>N} \frac{K\varepsilon \log n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Il reste à faire tendre N vers l'infini. $\square$

2.9.3. **Compléments**

Le lecteur trouvera d'autres compléments sur les espaces $\mathcal{H}^2$ et $\mathcal{H}^\infty$, par exemple la caractérisation par Seip des suites d'interpolation bornées de $\mathcal{H}^\infty$ ou la convergence presque partout au bord de $\mathbb{C}_{1/2}$ de la série de Dirichlet d'une fonction de $\mathcal{H}^2$, dans [48], chapitre 6.

Chapitre 3 : Opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$

3.1. Généralités

Les notations sont celles des chapitres précédents, si ce n'est qu'on désigne par $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ l'élément générique de $\mathcal{H}^2$, le symbole a_n étant réservé aux nombres d'approximation à venir. On note $f_n \xrightarrow{uc} f$ pour désigner la convergence uniforme de f_n vers f sur tout compact de $\mathbb{C}_{1/2}$ (ou de $\mathbb{D}$ selon le contexte). Dans un espace de Hilbert H de produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et de norme associée $\|\ \|$, on note $x_n \xrightarrow{w} x$ pour désigner la convergence faible de x_n vers x, soit

$$\langle x_n,\ z\rangle \to \langle x,\ z\rangle \text{ pour tout } z \in H.$$

Si $T \subset H$ est totale, il est classique et facile de prouver l'équivalence

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \|x_n\| = O(1) \text{ et } \langle x_n,\ z\rangle \to \langle x,\ z\rangle \text{ pour tout } z \in T.$$

Un corollaire utile (on prend pour T les noyaux reproduisants) est

Lemme 3.1. *Pour une suite f_n de $\mathcal{H}^2$ et $f \in \mathcal{H}^2$, on a équivalence entre :*

(1) $f_n \xrightarrow{w} f$.

(2) $f_n \xrightarrow{uc} f$ et $\|f_n\| = O(1)$.

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ analytique et C_φ l'opérateur de composition associé, défini formellement par

$$C_\varphi f = f \circ \varphi$$

qui envoie $\mathcal{H}^2$ dans l'espace $H(\mathbb{C}_{1/2})$ des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$, et dont on se demande s'il envoie plus précisément $\mathcal{H}^2$ dans lui-même. On dira alors que φ est un *symbole* (pour $\mathcal{H}^2$).

3.1.1. Equation de l'image

Les équations générales suivantes, dans laquelle K_a désigne le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2$ en a, se révèleront très utiles ([10]).

Théorème 3.2 (Équation de l'image)**.** *Si φ est un symbole, j un entier positif et $a \in \mathbb{C}_{1/2}$, on a*

$$C_\varphi^*(K_a) = K_{\varphi(a)}$$

et plus généralement

$$C_\varphi^*(K_a^{(j)}) = \overline{\varphi'(a)^j}\, K_{\varphi(a)}^{(j)} + \sum_{l<j} c_l K_{\varphi(a)}^{(l)}$$

où les c_l ne dépendent que de φ, j et a.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\langle f, C_\varphi^*(K_a)\rangle &= \langle C_\varphi(f), K_a\rangle = \langle f\circ\varphi, K_a\rangle \\ &= (f\circ\varphi)(a) = f[\varphi(a)] = \langle f, K_{\varphi(a)}\rangle.\end{aligned}$$

Dans le cas général, une forme simple de la formule de Faà di Bruno ([46], p. 260) donne

$$\begin{aligned}\langle f, C_\varphi^*(K_a^{(j)})\rangle &= \langle C_\varphi(f), K_a^{(j)}\rangle = \langle f\circ\varphi, K_a^{(j)}\rangle = (f\circ\varphi)^{(j)}(a) \\ &= [\varphi'(a)]^j\, f^{(j)}[\varphi(a)] + \sum_{l<j} d_l f^{(l)}[\varphi(a)]\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat avec $c_l = \overline{d_l}$ puisque $f^{(l)}[\varphi(a)] = \langle f, K_{\varphi(a)}^{(l)}\rangle$, $l \geq 0$. □

3.1.2. La classe $\mathcal{G}$ de Gordon-Hedenmalm

Soit $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ analytique. On se demande quand φ est un symbole. La réponse fait apparaître la classe $\mathcal{G}$ des fonctions $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ telles que

(1) $\varphi(s) = c_0 s + \psi(s)$ avec $c_0 \in \mathbb{N}$ et $\psi(s) = \sum_{n=1}^\infty c_n n^{-s}$ avec $\sigma_c(\psi) < \infty$.

(2) ψ et donc φ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}_0$, et de plus $\sigma_u(\psi) \leq 0$.

(3) $\psi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$ et $\psi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$ si $c_0 \geq 1$.

3.2. Théorème fondamental

Le point de départ de l'étude des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$ est le résultat suivant ([23]).

Théorème 3.3 (Gordon-Hedenmalm). *Soit $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $C_\varphi : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$.

(2) $\varphi \in \mathcal{G}$.

De plus, $C_\varphi : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ est une contraction si et seulement si $c_0 \geq 1$.

Démonstration. Pour l'implication (1) $\Rightarrow$ (2), nous renvoyons à [23]. En fait, dans [23], la précision $\sigma_u(\psi) \leq 0$ ne figure pas. Ce renforcement de l'énoncé a été obtenu dans [49], et peut être vu comme une conséquence immédiate de la version "partie réelle" du Théorème de Bohr du chapitre 2. Ajoutons une remarque souvent utile dans ce contexte ([9], Lemme 11) :

$$\varphi(s) \neq s + i\tau \Rightarrow \varphi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon} \quad \text{pour au moins un } \varepsilon > 0. \tag{3.1}$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{G}$ avec $c_0 = 0$, on a

$$\mathfrak{Re}\, c_1 \geq 1/2 + \varepsilon > 1/2$$

puisque $\varphi(s) \to c_1$ quand $\mathfrak{Re}\, s \to \infty$.

Prouvons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1) *en supposant d'abord $c_0 \geq 1$*. Soit f un polynôme de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s}.$$

Partons des égalités

$$n^{-c_j\, j^{-s}} = e^{-c_j\, j^{-s} \log n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c_j \log n)^k}{k!} j^{-ks}, \quad j \geq 2. \tag{3.2}$$

Nous procédons ensuite en trois étapes.

Etape 1. On a $C_\varphi f \in \mathcal{D}$, l'anneau des séries de Dirichlet convergentes. En effet, pour $n \geq 1$ fixé et $\mathfrak{Re}\, s > \sigma_a(\psi)$, (3.2) implique

$$n^{-\varphi(s)} = n^{-c_0 s - c_1} \prod_{j=2}^{\infty} \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{(-c_j \log n)^k}{k!} j^{-ks}\Big) = n^{-c_0 s - c_1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m m^{-s}, \tag{3.3}$$

ce qui définit les $d_m = d_m^{(n)}$. Par une méthode simple de série majorante, on a $|d_m| \leq D_m$, où les D_m sont définis par leur série de Dirichlet génératrice

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m m^{-s} = \prod_{j=2}^{\infty} \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{(|c_j| \log n)^k}{k!} j^{-ks}\Big).$$

(cela a un sens, car $m \geq 2$ s'écrit d'un nombre fini de façons $m = \prod_{\substack{j_r \geq 2,\\ k_r \geq 1}} j_r^{k_r}$).
Si on fixe $s > \sigma_a(\psi)$, on obtient donc

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m m^{-s} = \prod_{j=2}^{\infty} \exp(j^{-s}\,|c_j|\log n) = \exp\big[(\sum_{j=2}^{\infty} j^{-s}|c_j|)\log n\big] < \infty,$$

a fortiori $\sum_{m=1}^{\infty} |d_m| m^{-s} < \infty$, montrant que $\sigma_a(d) \leq \sigma_a(\psi) < \infty$ où l'on note $d(s) = \sum d_m m^{-s}$, et par suite que $C_\varphi f \in \mathcal{D}$.

Etape 2. De plus, $C_\varphi f \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$. En effet, $|f[\varphi(s)]| \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|$ pour $s \in \mathbb{C}_0$. Par conséquent, $C_\varphi f \in \mathcal{H}^\infty$, a fortiori $C_\varphi f \in \mathcal{H}^2$ (ces deux étapes restent valables quand $c_0 = 0$).

Etape 3. Reste à contrôler plus finement $\|C_\varphi f\|_{\mathcal{H}^2}$. Soit pour cela, quand $a > 0$, $T_a : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{D}$ définie par

$$T_a(s) = \frac{s-a}{s+a} \quad \text{avec} \quad T_a^{-1}(z) = a\,\frac{1+z}{1-z} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_0 \text{ et } T_a^{-1}(e^{it}) = ia \cot t/2.$$

Le changement de variable $a\cot(t/2) = x,\ t = \pi - 2\arctan(x/a)$ montre que, pour toute fonction test h :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\big[T_a^{-1}(e^{it})\big]dt = \int_{\mathbb{R}} h(ix)P_a(x)dx \tag{3.4}$$

où P_a est le noyau de Poisson en a du demi-plan $\mathbb{C}_0$,

$$P_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\,u(\frac{x}{a}) \quad \text{où} \quad u(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Pour $a, b, \varepsilon > 0$, soit $\varphi_\varepsilon(s) = \varphi(s+\varepsilon)$ et $\omega = T_b \circ \varphi_\varepsilon \circ T_a^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, ainsi que $F = f \circ T_b^{-1}$. On a $F \in H^\infty(\mathbb{D})$ car $|F(z)| \leq \sum_{n=1}^{N} |b_n|$, a fortiori $F \in H^2(\mathbb{D})$ et (3.4) donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(ix))|^2 P_b(x)dx. \tag{3.5}$$

Mais le principe de subordination de Littlewood ([55], p. 16) dit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F\circ\omega(e^{it})|^2 dt \leq \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{it})|^2 dt. \tag{3.6}$$

Soit encore par (3.4) et (3.5), puisque $F\circ\omega = f\circ\varphi_\varepsilon\circ T_a^{-1}$

$$\int_{\mathbb{R}} |f\circ\varphi_\varepsilon(ix)|^2 P_a(x)dx \leq \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}\int_{\mathbb{R}} |f(ix)|^2 P_b(x)dx. \tag{3.7}$$

Passons maintenant à la limite dans (3.7) quand $a \to \infty$ et $b = c_0 a$, en nous souvenant que f et $C_{\varphi_\varepsilon} f$ ont des séries de Dirichlet uniformément convergentes dans $\mathbb{C}_0$. C'est évident pour f ; on a d'autre part

$$(f \circ \varphi_\varepsilon)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n^{-s-\varepsilon} \text{ si } (f \circ \varphi)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n^{-s}$$

et le théorème de Bohr (applicable puisque $f \circ \varphi$ est dans $\mathcal{H}^\infty$) garantit la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n^{-s}$ dans $\mathbb{C}_\varepsilon$. Remarquons que de plus

$$\omega(0) = \frac{1 - b/\varphi_\varepsilon(a)}{1 + b/\varphi_\varepsilon(a)} \xrightarrow{a \to \infty} 0 \quad \text{car} \quad \varphi_\varepsilon(a) \sim c_0 a = b.$$

Nous obtenons, utilisant le théorème 2.30 du chapitre 2 : $\|f \circ \varphi_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^2}^2 \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2$ puis

$$\|f \circ \varphi\|_{\mathcal{H}^2}^2 \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2$$

en faisant tendre ε vers zéro et cette inégalité s'étend par approximation à toutes les fonctions de $\mathcal{H}^2$. En effet, si $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2$ et si $f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n n^{-s}$, on a d'après ce qui précède $\|C_\varphi f_N\|_{\mathcal{H}^2} \leq \|f_N\|_{\mathcal{H}^2} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}$ d'où $C_\varphi f_N \xrightarrow{w} g \in \mathcal{H}^2$ avec nécessairement $g = C_\varphi f$ puisqu'on a $f_N \circ \varphi \xrightarrow{uc} f \circ \varphi$, impliquant $C_\varphi f \in \mathcal{H}^2$ et

$$\|C_\varphi f\|_{\mathcal{H}^2} \leq \liminf_{N \to \infty} \|C_\varphi f_N\|_{\mathcal{H}^2} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}.$$

Supposons maintenant $c_0 = 0$. Soit $S : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_0$ le “décalage” défini par $S(s) = s - 1/2$. Le diagramme

$$\mathbb{D} \xrightarrow{T_a^{-1}} \mathbb{C}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_{1/2} \xrightarrow{S} \mathbb{C}_0 \xrightarrow{T_b} \mathbb{D}$$

justifié par l'hypothèse $\varphi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ montre que $\omega = T_b \circ S \circ \varphi \circ T_a^{-1}$ envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même et que

$$\omega(0) = T_b[\varphi(a) - 1/2].$$

Si f est un polynôme de Dirichlet et $F = f \circ S^{-1} \circ T_b^{-1}$, on a $F \circ \omega = f \circ \varphi \circ T_a^{-1}$ et désignant par m la mesure de Haar normalisée de $\mathbb{T}$, le principe de Littlewood donne en posant $\frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|} = K_{a,b}$:

$$\int_{\mathbb{T}} |f \circ \varphi \circ T_a^{-1}|^2 dm \leq K_{a,b} \int_{\mathbb{T}} |f \circ S^{-1} \circ T_b^{-1}|^2 dm$$

soit encore d'après (3.4) et le théorème 8.3 de plongement du chapitre 2 :

$$\int_{\mathbb{R}} |(f \circ \varphi)(ix)|^2 P_a(x)dx \leq K_{a,b} \int_{\mathbb{R}} |f(1/2 + ix)|^2 P_b(x)dx \leq C_b K_{a,b} \|f\|^2_{\mathcal{H}^2}.$$

Passons à la limite dans cette inégalité quand $a \to \infty$, en laissant b fixé. Puisque $f \circ \varphi$ a une série de Dirichlet uniformément convergente dans $\mathbb{C}_{1/2}$ et puisque $K_{a,b} \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} K_b := (1 + |T_b(c_1 - 1/2)|)(1 - |T_b(c_1 - 1/2)|)^{-1}$ (rappelons que $c_0 = 0$ et que $\mathfrak{Re}\, c_1 > 1/2$), nous obtenons via le théorème 2.30 du chapitre 2

$$\|f \circ \varphi\|^2_{\mathcal{H}^2} \leq C_b K_b \|f\|^2_{\mathcal{H}^2}$$

et cette inégalité s'étend par approximation à $f \in \mathcal{H}^2$ quelconque (là aussi, il faudrait d'abord considérer φ_ε puis faire tendre ε vers 0, on omet cet intermédiaire).

Montrons enfin que que C_φ n'est pas une contraction, et que plus précisément

$$\|C_\varphi\| \geq \big[\zeta(2\,\mathfrak{Re}\, c_1)\big]^{1/2} > 1. \tag{3.8}$$

En effet, le théorème 3.2 de ce chapitre donne pour $a > 1/2$:

$$\begin{aligned}\zeta(2\,\mathfrak{Re}\,\psi(a)) = \|K_{\varphi(a)}\|^2_{\mathcal{H}^2} &= \|C^*_\varphi(K_a)\|^2_{\mathcal{H}^2} \\ &\leq \|C_\varphi\|^2\, \|K_a\|^2_{\mathcal{H}^2} = \|C_\varphi\|^2 \zeta(2a).\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient le résultat car $\mathfrak{Re}\,\psi(a) \to \mathfrak{Re}\, c_1$, $\zeta(2a) \to 1$ et ζ envoie $]1, \infty[$ dans lui-même. Tout ceci achève la preuve. □

Remarque 3.4. D'autres espaces de Hilbert de séries de Dirichlet, les espaces de Bohr-Bergman, ainsi que leurs opérateurs de composition, ont été récemment étudiés par M. Bailleul et O. F. Brevig ([4]). Voir aussi ([5]). Nous recommandons vivement la lecture de ces articles.

Voici maintenant quelques exemples simples :

Exemple 1. $\varphi(s) = s + \tau$ avec $\mathfrak{Re}\,\tau \geq 0$. On a $\varphi \in \mathcal{G}$ et C_φ est une isométrie (surjective) si et seulement $\mathfrak{Re}\,\tau = 0$.

Exemple 2. $\varphi(s) = c_0 s$ avec $c_0 \geq 1$. C_φ est une isométrie (non-surjective si $c_0 \geq 2$).

Exemple 3. $\varphi(s) = c_1 + c_2 2^{-s}$ avec donc $\Re\mathrm{e}\, c_1 \geq |c_2| + 1/2$. Lorsque $\Re\mathrm{e}\, c_1 = |c_2| + 1/2$, C_φ n'est pas compact ([10] et [21] indépendamment). Lorsque $\Re\mathrm{e}\, c_1 > |c_2| + 1/2$, anticipant sur la définition des nombres d'approximation $a_n(T)$ qui suit, on a

$$a_n(C_\varphi) \leq Cr^n \quad \text{où} \quad r = \frac{2|c_2|}{2\Re\mathrm{e}\, c_1 - 1} < 1. \tag{3.9}$$

En effet, supposant $c_1,\ c_2 > 0$ pour simplifier les notations et écrivant $f(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2$ avec $b_n = b_n(f)$, nous avons d'abord

$$\begin{aligned} C_\varphi f(s) &= \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-c_1} \exp(-c_2 \log n\, 2^{-s}) \\ &= \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-c_1} \Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-c_2)^k}{k!} (\log n)^k\, 2^{-ks} \Big) \\ &= \sum_{k=0}^\infty 2^{-ks} \frac{(-c_2)^k}{k!} \Big(\sum_{n=1}^\infty b_n \frac{(\log n)^k}{n^{c_1}} \Big) =: \sum_{j=1}^\infty d_j j^{-s} \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{j=1}^\infty |d_j|^2 \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{c_2^{2k}}{(k!)^2} \Big(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2 \Big) \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{(\log n)^{2k}}{n^{2c_1}} \Big).$$

Supposant $\|f\|_{\mathcal{H}^2} = 1$, nous avons donc par comparaison à une intégrale et C étant une constante numérique :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty |d_j|^2 \leq C \sum_{k=0}^\infty \frac{c_2^{2k}}{(k!)^2} \int_1^\infty \frac{(\log t)^{2k}}{t^{2c_1}} dt &= C \sum_{k=0}^\infty \frac{c_2^{2k}}{(k!)^2} \int_0^\infty x^{2k} e^{-(2c_1-1)x} dx \\ &= C \sum_{k=0}^\infty \frac{c_2^{2k}}{(k!)^2} \frac{(2k)!}{(2c_1-1)^{2k+1}} \leq C \sum_{k=0}^\infty \frac{c_2^{2k}}{(2c_1-1)^{2k+1}}\, 4^k \end{aligned}$$

car $\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \binom{2k}{k} \leq \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} = 4^k$. Et la série géométrique précédente converge car $2c_2 < 2c_1 - 1$ par définition de $\mathcal{G}$ (on a $\varphi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2}$). Ceci redémontre à la main la continuité de C_φ, et en approchant $C_\varphi f$ par une somme partielle d'ordre $\leq N-1$, à savoir par

$$R(f) = \sum_{k=0}^{N-1} 2^{-ks} \frac{(-c_2)^k}{k!} \Big(\sum_{n=1}^\infty b_n(f) \frac{(\log n)^k}{n^{c_1}} \Big)$$

donne aussi la relation (3.9) : $a_N(C_\varphi) \leq Cr^N$.

3.3. Opérateurs compacts et nombres d'approximation

3.3.1. Définitions

Soit H un Hilbert (séparable) de boule unité fermée B_H, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs continus sur H et $T \in \mathcal{L}(H)$. L'image $T(B_H)$ de la boule unité est toujours *fermée :* soit en effet (x_n) une suite de B_H telle que $T(x_n) \to y$. Modulo extraction, on peut supposer que $x_n \xrightarrow{w} x$ avec $x \in B_H$. On a alors $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ car si $z \in H$,

$$\langle T(x_n), z\rangle = \langle x_n, T^*(z)\rangle \to \langle x, T^*(z)\rangle = \langle T(x), z\rangle$$

Comme on a aussi $T(x_n) \xrightarrow{w} y$, il vient $y = T(x)$ d'après l'unicité de la limite faible (de façon plus conceptuelle : B_H est faiblement compacte et T faiblement continue, donc $T(B_H)$ est faiblement compacte, et par suite fermée).

On dira que T est compact si $T(B_H)$, fermée, est de plus compacte en norme. Si on remplace H par un espace de Banach X, on définit la compacité de T en demandant que $T(B_X)$ soit *relativement* compacte. On peut noter le résultat suivant, dans lequel T parcourt $\mathcal{L}(X)$ ([35])

$$T(B_X) \text{ toujours fermée} \iff X \text{ réflexif.}$$

En effet, si X est réflexif, le même raisonnement que ci-dessus montre que $T(B_X)$ est fermée. Réciproquement, si on teste l'hypothèse sur l'opérateur de rang un défini par $T(x) = f(x)\, e$ où $f \in X^*$ et $e \in X - \{0\}$, on voit que toute forme linéaire continue f sur X atteint sa norme. Il résulte alors d'un théorème de James ([36], p. 280-281) que X est réflexif.

D'autre part, on notera $\sigma(T)$ le spectre de T, le compact non-vide du plan complexe défini par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ T - \lambda I \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(H)\}$$

où I désigne l'identité de H. On a clairement $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, où la barre désigne la conjugaison, et l'on notera $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T, aussi appelé spectre ponctuel

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un critère utile de compacité dans ce contexte est le suivant ([55], p. 29 pour H^2, mais la preuve vaut pour les espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^d$)

Théorème 3.5. *Si $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ est un symbole, on a équivalence entre*

(1) $C_\varphi : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ est compact.

(2) Si $f_n \xrightarrow{uc} f$ avec $\|f_n\|_{\mathcal{H}^2} = O(1)$, alors $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ dans $\mathcal{H}^2$.

F. Riesz ([16], chapitre 4) a montré que la théorie spectrale des opérateurs compacts est très proche de celle des opérateurs en dimension finie, et notamment que

Théorème 3.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ compact, et $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$. Alors, λ est une* valeur propre *de T, et elle est de multiplicité finie.*

Une application remarquable de ce théorème aux opérateurs de composition est la suivante ([55], p. 91)

Théorème 3.7 (Équation de Königs)**.** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ conformément équivalent au disque, H un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur Ω et $\varphi : \Omega \to \Omega$ analytique, ayant un point fixe $a \in \Omega$ avec $\varphi'(a) \neq 0$, et telle que l'opérateur de composition C_φ envoie H dans lui-même de façon* compacte*. Alors, l'équation fonctionnelle de Königs $f \circ \varphi = \varphi'(a) f$ possède dans $H(\Omega)$ une unique solution σ telle que $\sigma(a) = 0$ et $\sigma'(a) = 1$. On a donc aussi $\sigma^n \circ \varphi = (\varphi'(a))^n \sigma^n$ pour tout entier $n \geq 0$. De plus, $f \circ \varphi = \lambda f$ avec $f \in H(\Omega)$ et $f \neq 0$ implique $\lambda = [\varphi'(a)]^n$ avec n entier positif, f proportionnelle à σ^n et $f \in H$. Ainsi, $\sigma^n \in H$ pour tout entier $n \geq 0$.*

Démonstration. Soit $\mu = \varphi'(a)$ et φ_j la j-ième itérée de φ. On a $|\mu| < 1$ et $\varphi_j \xrightarrow{j \to \infty} \varphi(a)$ uniformément sur tout compact de Ω puisque φ n'est pas un automorphisme (théorème de H. Cartan, [46] p. 155), C_φ étant compact. Le théorème de Königs ([55], p. 90-93) dit alors qu'il existe une fonction $\sigma \in H(\Omega)$, avec $\sigma(a) = 0$ et $\sigma'(a) = 1$, telle que $\sigma \circ \varphi = \mu\, \sigma$ (en fait, σ est la limite des itérées renormalisées $\mu^{-j} \varphi_j$). On a donc aussi $\sigma^n \circ \varphi = \mu^n \sigma$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et le théorème dit de plus que les solutions *dans* $H(\Omega)$ de $f \circ \varphi = \mu^n f$ sont toutes proportionnelles à σ^n.

Fixons maintenant l'entier $n \geq 1$ et soit $E = E_n$ le sous-space de H engendré par le noyau reproduisant K_a et ses dérivées $K_a^{(l)}$, $0 \leq l \leq n$. L'équation de l'image (théorème 3.2) montre que E est stable par C_φ^* et que la matrice de C_φ^* sur la base $K_a^{(l)}, 0 \leq l \leq n$ est triangulaire supérieure avec éléments diagonaux $\overline{(\varphi'(a))^k}$, $0 \leq k \leq n$. Les $\overline{(\varphi'(a))^k}$ sont des valeurs propres, donc spectrales, de C_φ^* et par suite les $(\varphi'(a))^k$ sont des valeurs spectrales, donc des valeurs propres, de $C_\varphi : H \to H$ d'après le théorème de Riesz. Il existe donc $f_n \in H$ non-nulle telle que $f_n \circ \varphi = \mu^n f_n$. Et d'après le théorème de Königs f_n est proportionnelle à σ^n, ce qui montre que $\sigma^n \in H$, fait hautement non-évident a priori. L'exemple “lenticulaire” $\varphi = T^{-1} \circ \gamma \circ T$ avec $T(z) = \frac{1-z}{1+z} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_0$ et $\gamma(w) = w^{1/2} : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_0$, pour lequel on a $C_\varphi : H^2 \to H^2$ compact et $\sigma(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ ([55], p. 94), est très instructif. On voit que $\sigma^n \in H^2$ pour tout n et même $\sigma \in BMOA$ (l'espace des fonctions analytiques à oscillation moyenne bornée), mais quand même pas $\sigma \in H^\infty$. $\square$

Soit maintenant n entier ≥ 1. Le n-ième *nombre d'approximation* $a_n(T)$ de T est défini comme la distance de T aux opérateurs de rang $< n$ ([16], chapitre 2), soit

$$a_n(T) = \inf_{\mathrm{rang}(R)<n} \|T - R\| = \inf_{\mathrm{rang}(R)<n} \big[\sup_{f \in B_H} \|Tf - Rf\| \big]. \quad (3.10)$$

On notera que $a_n(T)$ est défini comme un minimax. Il sera commode d'introduire aussi les *nombres de Bernstein* $b_n(T)$ définis comme des maximin (S_E ci-dessous désignant la sphère-unité de E) :

$$b_n(T) = \sup_{\dim\, E=n} \big[\inf_{f \in S_E} \|Tf\| \big] =: \sup_{\dim\, E=n} \big[\gamma_E(T)\big]. \quad (3.11)$$

Nous prouverons que $a_n(T) = b_n(T)$. Il est également facile de voir que (H étant un Hilbert)

$$T \text{ compact} \Longleftrightarrow a_n(T) \to 0. \quad (3.12)$$

(et, dans le cas banachique, les opérateurs T tels que $b_n(T) \to 0$ sont appelés *finiment strictement singuliers*). On entre ici dans le domaine de l'approximation non-commutative, à comparer au théorème classique d'approximation de Weierstrass disant que, si $f \in L^\infty(0,1)$, et

$$E_n(f) = \inf_{\text{degré}(P)\leq n} \|f - P\|_\infty,$$

alors

$$f \text{ continue} \Longleftrightarrow E_n(f) \to 0. \quad (3.13)$$

Des théorèmes de Bernstein ([19]) relient la régularité de f à la vitesse de convergence vers zéro de $E_n(f)$. Par analogie, il est naturel de s'intéresser à la vitesse de convergence vers zéro de $a_n(T)$ et de considérer T comme “très compact” si $a_n(T) \to 0$ très vite. Pour cela, il est commode de disposer du théorème suivant ([16], p. 46)

Théorème 3.8 (Décomposition de Schmidt)**.** *Soit $T : H \to H$ compact. Alors, il existe deux suites* orthonormales (u_j), (v_j) *et une suite de réels positifs* (s_j) *décroissant vers* 0 *telles que*

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \langle x, v_j \rangle \, u_j \quad \forall x \in H.$$

Les $s_j = s_j(T)$ s'appellent les *nombres singuliers* de T. On a le

Théorème 3.9. *Soit $T : H \to H$ compact. On a pour tout $n \geq 1$:*

$$s_n(T) = a_n(T) = b_n(T).$$

Démonstration. Soit R_{n-1} défini par $R_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \langle x, v_j \rangle \, u_j$, si bien que $(T - R_{n-1})(x) = \sum_{j=n}^{\infty} s_j \langle x, v_j \rangle \, u_j$, et

$$\|(T - R_{n-1})(x)\|^2 = \sum_{j=n}^{\infty} s_j^2 |\langle x, v_j \rangle|^2 \leq s_n^2 \sum_{j=n}^{\infty} |\langle x, v_j \rangle|^2 \leq s_n^2 \|x\|^2,$$

puis

$$a_n(T) \leq \|T - R_{n-1}\| \leq s_n(T). \tag{3.14}$$

D'autre part, on a toujours (que T soit compact ou non)

$$b_n(T) \leq a_n(T). \tag{3.15}$$

Soit en effet E de dimension n et R de rang $< n$. R ne peut être injectif sur E, donc il existe $x_0 \in S_E$ tel que $Rx_0 = 0$. Par suite :

$$\|T - R\| \geq \|Tx_0 - Rx_0\| = \|Tx_0\| \geq \inf_{x \in S_E} \|Tx\| = \gamma_E(T).$$

D'où successivement $\|T - R\| \geq b_n(T)$ et $a_n(T) \geq b_n(T)$. Enfin,

$$b_n(T) \geq s_n(T). \tag{3.16}$$

Prenons en effet pour E l'espace de dimension n engendré par $v_1, \ldots, v_n$. Si $x \in S_E, T(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j \langle x, v_j \rangle \, u_j$ et donc

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} s_j^2 \, |\langle x, v_j \rangle|^2 \geq s_n^2 \sum_{j=1}^{n} |\langle x, v_j \rangle|^2 = s_n^2 \, \|x\|^2 = s_n^2.$$

Il en résulte que $b_n(T) \geq \gamma_E(T) \geq s_n(T)$. Les trois inégalités (3.14), (3.15), (3.16) achèvent la preuve. □

3.3.2. Propriétés des nombres d'approximation

3.3.3. Un mini-catalogue

Les nombres d'approximation d'un opérateur sur un Hilbert ont les propriétés simples suivantes ([16]) :

(1) $\|T\| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq \cdots \geq a_n(T) \geq \cdots \geq 0$.

(2) $(a_n(T)) = (\varepsilon_n)$ est une suite décroissante *arbitraire* de limite nulle.

(3) $a_n(T) = a_n(T^*) = \sqrt{a_n(T^*T)}$.

(4) $a_n(ATB) \leq \|A\|\, a_n(T)\, \|B\|$ (propriété d'idéal bilatère).

(5) $S_p = \{T\ ;\ (a_n(T)) \in \ell_p,\ 0 < p < \infty\}$ s'appelle la classe de Schatten d'indice p, et croît avec p. Lorsque $p \geq 1$, c'est un espace de Banach (un espace ℓ_p non-commutatif) pour la norme

$$\|T\|_p = \big(\sum_{n=1}^{\infty} [a_n(T)]^p\big)^{1/p}.$$

(6) S_2 coïncide isométriquement avec la classe des opérateurs Hilbert-Schmidt, les opérateurs T pour lesquels

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2\right)^{1/2} < \infty$$

où (e_n) désigne une base orthonormale arbitraire de H.

Ces propriétés utiles se vérifient immédiatement. Par exemple, pour (2), il suffit de prendre pour T un opérateur diagonal sur une base orthonormale de H, d'éléments diagonaux ε_n. Mais dès qu'on restreint T à une classe $\mathcal{C}$ d'opérateurs sur H, la question devient beaucoup plus difficile. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est la classe des opérateurs de Hankel, on peut montrer ([41], avec une preuve très élaborée) que la suite $(a_n(T))$ est encore décroissante arbitraire. Mais si $\mathcal{C}$ est la classe des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy usuel H^2 du disque, cette suite n'est plus arbitraire et son étude est également non-triviale ([37]) : en particulier, on a toujours $a_n(T) \geq \delta r^n$ avec $\delta, r > 0$. On va présenter ici une étude analogue pour les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Dirichlet $\mathcal{H}^p$, issue de [49] et [11]. Un changement d'échelle (r^n remplacé par n^{-A}) va se produire. Nous commençons par le cas $p = 2$.

3.3.4. **Inégalités multiplicatives de H.Weyl**

Soit $T : H \to H$ compact, (a_n) la suite de ses nombres d'approximation et (λ_n) la suite de ses valeurs propres rangées par ordre décroissant de module. Le lemme suivant nous sera très utile, car nous connaîtrons déjà les λ_n dans notre contexte, grâce au théorème de Königs revisité par F.Riesz.

Lemme 3.10 (Inégalités multiplicatives de H.Weyl)**.** *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_n| \leq a_1 \cdots a_n.$$

En particulier,

$$|\lambda_n| \leq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

pour tout $p > 0$.

Démonstration. Voici la preuve initiale de Weyl (voir aussi [16], p. 157). On considère l'opérateur S puissance extérieure n-ième de T agissant sur la n-ième puissance extérieure de H, soit $S = \wedge^{(n)}T : \wedge^{(n)}H \to \wedge^{(n)}H$. Le rayon spectral de S est $|\lambda_1 \cdots \lambda_n|$, sa norme est $a_1 \cdots a_n$. Enfin, le rayon spectral d'un opérateur est inférieur à sa norme. Quant au passage de la forme multiplicative des inégalités de Weyl à leur forme additive (plus faible), il est dû à des propriétés générales des fonctions convexes ([16], p. 157). $\square$

Remarque 3.11. L'inégalité tentante $|\lambda_n| \leq a_n$ est fausse, comme le montre un exemple important de H. König ([16], p. 154) en dimension n : soit $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $0 < \sigma < 1$ et $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ le backward shift (shift arrière) perturbé défini par

$$T(e_1) = \sigma e_n \quad \text{et} \quad T(e_j) = e_{j-1} \quad \text{si} \quad 2 \leq j \leq n.$$

On a

$$T^*(e_n) = \sigma e_1 \quad \text{et} \quad T(e_j) = e_{j+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Donc $T^n = \sigma I$ et les valeurs propres de T sont les nombres

$$\lambda_j = \sigma^{1/n} e^{2ij\pi/n},\ 1 \leq j \leq n.$$

Tandis que T^*T est l'opérateur diagonal d'éléments diagonaux $(\sigma^2, 1, \ldots, 1)$ si bien que

$$a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \sigma.$$

On a bien $|\lambda_1 \cdots \lambda_n| \leq a_1 \cdots a_n$ puisque les deux membres valent σ, mais $|\lambda_n| = \sigma^{1/n}$ peut être beaucoup plus grand que $a_n = \sigma$.

Cela dit, le substitut suivant rend presque autant de services.

Lemme 3.12. *Avec les notations précédentes, on a pour tout entier $q \geq 2$*

$$|\lambda_{qn}|^q \leq a_1\, a_n^{q-1}.$$

En particulier

$$|\lambda_{2n}|^2 \leq a_1 a_n.$$

Démonstration. Dans le Lemme 3.10, on change n en qn et on élève à la puissance q pour obtenir :

$$|\lambda_{qn}|^q \leq \big(a_1 \cdots a_{qn}\big)^{1/n} \leq \big(a_1^n a_n^{(q-1)n}\big)^{1/n} = a_1\, a_n^{q-1}. \qquad \square$$

Nous pourrons exploiter ces inégalités multiplicatives de Weyl dans le cas qui nous intéresse grâce au résultat suivant dû à F. Bayart ([10]), intéressant en lui-même.

Théorème 3.13. *Soit $\varphi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n^{-s}$ définissant un opérateur de composition compact sur $\mathcal{H}^2$. Alors, les valeurs propres de C_φ sont de multiplicité un et valent*

(a) $\lambda_n = [\varphi'(\alpha)]^{n-1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$, *quand $c_0 = 0$, où α est le point fixe de φ dans $\mathbb{C}_{1/2}$.*

(b) $\lambda_n = n^{-c_1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$, *quand $c_0 = 1$.*

(c) 1 *si $c_0 \geq 2$, et alors $\sigma(C_\varphi) = \{0, 1\}$.*

Démonstration. Le point (a) du théorème 3.13 demande une première justification. La voici, même si nous n'en aurons pas vraiment besoin ici !

Lemme 3.14. *Soit $C_\varphi : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ avec $c_0 = 0$. Alors, φ a un point fixe dans $\mathbb{C}_{1/2}$.*

Démonstration du lemme. On s'appuie sur (3.1) que l'on rappelle

$$\varphi(s) \neq s + i\tau \Rightarrow \varphi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon} \text{ pour un } \varepsilon > 0.$$

Observons maintenant que φ ne peut être une translation verticale $s + i\tau$ lorsque $c_0 = 0$. Soit $T : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_{1/2}$ la transformation conforme donnée par

$$T(z) = \frac{1}{2} + \frac{1-z}{1+z}.$$

Soit $\omega = T^{-1} \circ \varphi \circ T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Supposons que ω n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D}$. Alors, le théorème de Denjoy-Wolff ([55], p. 78) implique l'existence d'un point $u \in \partial\mathbb{D}$ tel que $\omega_n \xrightarrow{uc} u$, où ω_n désigne la n-ième iterée de ω. Si $u \neq -1$, $\varphi_n = T \circ \omega_n \circ T^{-1} \xrightarrow{uc} T(u) \in \partial\mathbb{C}_{1/2}$. Mais ceci est impossible d'après (3.1) puisque $\varphi_n(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$. Si $u = -1$, on a $\varphi_n \xrightarrow{uc} \infty$. Ceci est de nouveau impossible car, d'après le théorème 3.3, la série de Dirichlet de $\varphi = \psi$ converge uniformément sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ si bien qu'il existe une partie bornée B de $\mathbb{C}_{1/2}$, par exemple $B = \varphi(\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon})$, telle que $\varphi_n(\mathbb{C}_{1/2}) \subset B$ pour $n \geq 2$, puisque

$$n \geq 2 \Rightarrow \varphi_n(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \varphi_2(\mathbb{C}_{1/2}) \subset B.$$

Tout ceci montre que ω possède un point fixe $u \in \mathbb{D}$ et que φ possède le point fixe $\alpha = T(u) \in \mathbb{C}_{1/2}$. $\square$

Pour le reste de la preuve, on a besoin du lemme élémentaire suivant, intéressant en lui-même ([18], p. 270)

Lemme 3.15. *Soit $X = Y \oplus Z$ un espace de Banach, somme directe de deux sous-espaces fermés Y et Z avec Y* de dimension finie. *Soit $T : X \to X$ un opérateur qui, sur $Y \oplus Z$, a l'une des deux représentations*

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Alors, $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$. En d'autres termes, T est inversible si et seulement si A et D le sont.

Dans le cas $c_0 = 0$, φ ne peut être un automorphisme de $\mathbb{C}_{1/2}$ car ces derniers sont les translations verticales $s \mapsto \varphi(s) = s + i\tau$ lorsque de plus $\varphi \in \mathcal{G}$. Le théorème 3.7 s'applique et nous donne bien

$$\sigma(C_\varphi) = \{(\varphi'(\alpha))^k,\ k = 0, 1, \ldots, \infty\}.$$

Dans le cas $c_0 \geq 1$, montrons d'abord que

$$\sigma_p(C_\varphi) \subset \{n^{-c_1},\ n \geq 1\} \quad \text{si} \quad c_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_p(C_\varphi) = \{1\} \text{ si } c_0 > 1.$$

Soit en effet $f \in \mathcal{H}^2$, avec $f(s) = \sum_{k \geq l} a_k k^{-s}$, $a_l \neq 0$, telle que $f \circ \varphi = \lambda f$ et $\lambda \neq 0$. Nous savons que

$$f \circ \varphi(s) = \sum_{k \geq l} a_k k^{-c_0 s} k^{-c_1} \prod_{n=2}^{\infty} \Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-c_n \log k)^j}{j!} n^{-js}\Big].$$

Si $c_0 > 1$, il n'y a pas de terme en l^{-s} sauf pour $l = 1$ et $f =$ constante. D'où $\lambda = 1$, qui convient, car $C_\varphi(1) = 1$.

Si $c_0 = 1$, le terme devant l^{-s} est $a_l\, l^{-c_1}$; on en déduit $a_l\, l^{-c_1} = \lambda a_l$ et $\lambda = l^{-c_1}$. Pour l'inclusion réciproque $\{n^{-c_1}\} \subset \sigma_p(C_\varphi)$, on fixe un entier $m \geq 1$ et on applique le Lemme 3.15 avec $Y =$ Vect $(1, 2^{-s}, \ldots, m^{-s})$ et $Z =$ Vect $((m+1)^{-s}, (m+2)^{-s}, \ldots) = Y^\perp$ ainsi que $T = C_\varphi$. Il est clair que Z est stable par T, qui a donc sur la somme directe $Y \oplus Z$ une représentation matricielle de la forme

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec plus précisément

$$C_\varphi(k^{-s}) = k^{-s} k^{-c_1} + \sum_{j>k} \alpha_j j^{-s}.$$

La matrice $(m \times m)$ associée à A est donc triangulaire inférieure avec les éléments diagonaux k^{-c_1}, $1 \leq k \leq m$, ce qui montre que $m^{-c_1} \in \sigma(A) \subset \sigma(C_\varphi)$ d'après le lemme. Ceci achève la preuve du théorème 3.13. $\square$

3.4. Un premier théorème de minoration

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant

Théorème 3.16. *Soit $\varphi(s) = c_0 s + \psi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} \in \mathcal{G}$, induisant un opérateur de composition* compact *sur $\mathcal{H}^2$. Alors, on a toujours $\mathfrak{Re}\, c_1 > 0$. De plus, δ étant une constante > 0 :*

(1) Si $c_0 = 0$, on a $a_n(C_\varphi) \geq \delta r^n$ pour un $0 < r < 1$.

(2) Si $c_0 \geq 1$, on a $a_n(C_\varphi) \geq \delta (n \log n)^{-\mathfrak{Re}\, c_1}$. En particulier, $C_\varphi \notin S_p$ pour $p \leq 1/\mathfrak{Re}\, c_1$.

Le résultat de (1) est optimal, et celui de (2) aussi, au facteur logarithmique près.

Démonstration. L'inégalité $\mathfrak{Re}\, c_1 > 0$ sera montrée dans la preuve du théorème 3.24 à venir. Distinguons maintenant deux cas :

Cas 1 : $c_0 = 0$. Nous nous appuierons sur un lemme simple ([49], Lemme 6.1) pour nous ramener au cas où φ a un point fixe attractif, mais pas super-attractif.

Lemme 3.17. *Soit α et β deux points de $\mathbb{C}_{1/2}$. Il existe un polynôme de Dirichlet χ tel que*

$$\chi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_{1/2}, \quad \chi(\beta) = \alpha \quad \textit{et} \quad \chi'(\beta) \neq 0.$$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{C}_{1/2}$ tel que $\varphi'(\alpha) \neq 0$ et $\beta = \varphi(\alpha) \in \mathbb{C}_{1/2}$. Posons $\psi = \chi \circ \varphi$, qui est dans la classe $\mathcal{G}$ et vérifie :

$$\psi(\alpha) = \chi(\beta) = \alpha \text{ et } \psi'(\alpha) = \chi'(\beta)\varphi'(\alpha) \neq 0.$$

On a de plus $C_\psi = C_\varphi C_\chi$ et donc, par la propriété d'idéal des nombres d'approximation, $a_n(C_\psi) \leq \|C_\chi\| a_n(C_\varphi)$. Quitte à remplacer φ par χ, on peut donc supposer sans perte de généralité que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi'(\alpha) \neq 0$. Soit $r_0 := |\varphi'(\alpha)| > 0$. On utilise ensuite le théorème 3.13 et le Lemme 3.12 pour obtenir

$$r_0^{4n-2} = |\lambda_{2n}|^2 \leq a_1\, a_n,$$

impliquant le résultat.

Cas 2 : $c_0 = 1$. Nous donnerons *deux preuves,* la seconde ayant le mérite de s'étendre au cas $c_0 \geq 2$.

Preuve a. Utilisons le théorème 3.13 et l'inégalité de Weyl modifiée du Lemme 3.12 avec qn, où $q \geq 2$ est un entier à choisir. Soit $\gamma_1 = \mathfrak{Re}\, c_1$. Puisque $\lambda_j(C_\varphi) = j^{-c_1}$, nous obtenons

$$(qn)^{-\gamma_1 \frac{q}{q-1}} = |\lambda_{qn}|^{\frac{q}{q-1}} \leq a_1^{\frac{1}{q-1}} a_n \ll a_n.$$

Ceci implique

$$a_n \gg (qn)^{-\gamma_1}\, (qn)^{-\frac{\gamma_1}{q-1}}.$$

Ajustant $q = q_n$ comme la partie entière de $\log n + 2$ et observant que $n^{1/q} \to e$, nous obtenons finalement

$$a_n \gg (n \log n)^{-\gamma_1}, \qquad \square$$

Preuve b. Elle se base sur la définition de a_n comme nombres de Bernstein et sur un bon choix de l'espace test E de dimension n. On désigne par (p_k) la suite des nombres premiers.

Lemme 3.18. *Fixons un entier $n \geq 1$. Soit $\varphi(s) = c_0 s + \sum_{j=1}^{\infty} c_j j^{-s} \in \mathcal{G}$ avec $c_0 \geq 1$. Soit aussi E le sous-espace de dimension n de $\mathcal{H}^2$ engendré par les vecteurs unitaires p_1^{-s}, $p_2^{-s}, \dots, p_n^{-s}$. Alors pour toute $f(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k p_k^{-s}$ dans E, on a*

$$C_\varphi f(s) = g(s) + h(s) \text{ où } g(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k p_k^{-c_1} (p_k^{c_0})^{-s} \quad \text{et} \quad \langle h, g\rangle = 0. \tag{3.17}$$

Démonstration du lemme. La preuve du théorème 3.3 (cf. aussi [23]) nous a montré que le calcul formel suivant est permis pour trouver les coefficients de Dirichlet de $C_\varphi(p_k^{-s}), 1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} C_\varphi(p_k^{-s}) &= p_k^{-c_0 s} p_k^{-c_1} \prod_{j=2}^{\infty} \Big(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-c_j \log p_k)^l}{l!} j^{-ls}\Big) \\ &=: p_k^{-c_0 s} p_k^{-c_1} (1 + \sum_{m\geq 2} \alpha_{k,m} m^{-s}) =: g_k(s) + h_k(s) \end{aligned}$$

avec $g_k(s) = p_k^{-c_1}(p_k^{c_0})^{-s}$, et il reste à noter que les vecteurs $g = \sum_{k=1}^{n} b_k g_k$ et $h = \sum_{k=1}^{n} b_k h_k$ sont orthogonaux comme ayant des spectres de Dirichlet disjoints : en effet, les p_j étant premiers et c_0 étant ≥ 1, une égalité de le forme $p_k^{c_0} = p_j^{c_0} m$ avec $m \geq 2$ est impossible, que j soit égal à k ou non. □

Nous pouvons maintenant achever la seconde preuve de (2), et elle vaut aussi pour $c_0 \geq 2$, alors que la méthode spectrale de la première preuve échoue ici. Choisissons E comme dans le Lemme 3.18 et soit f un vecteur de la sphère unité de E. D'après ce lemme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{H}^2} = \|g+h\|_{\mathcal{H}^2} \geq \|g\|_{\mathcal{H}^2} &= \big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 p_k^{-2\gamma_1}\big)^{1/2} \\ &\geq \big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 p_n^{-2\gamma_1}\big)^{1/2} = p_n^{-\gamma_1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $b_n(C_\varphi) \geq \gamma_E(C_\varphi) \geq p_n^{-\gamma_1}$. Mais d'après une moitié du théorème des nombres premiers sous la forme donnée par Chebyshev ([26] p. 340-345), on a (p parcourant les nombres premiers)

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 \gg \frac{x}{\log x} \cdot$$

Faisant $x = p_n$, pour lequel $\pi(x) = n$, on en déduit $p_n \ll n \log n$. Cela donne les minorations souhaitées. □

Reste l'optimalité.

Cas 1 : $c_0 = 0$. Ce cas est couvert par l'exemple $\varphi(s) = c_1 + c_2 2^{-s}$ avec $\mathfrak{Re}\, c_1 > 1/2 + |c_2|$ pour lequel on a vu (cf.(3.9)) que

$$a_n(C_\varphi) \leq Cr^n \quad \text{où} \quad r = \frac{2|c_2|}{2\mathfrak{Re}\, c_1 - 1} < 1.$$

Plus généralement ([49]), si $\varphi \in \mathcal{G}$ et si $\overline{\varphi(\mathbb{C}_{1/2})}$ est un compact de $\mathbb{C}_{1/2}$, $a_n(C_\varphi) \leq Cr^n$ pour un $r < 1$. Mais la preuve est plus compliquée et utilise la notion de mesure de Carleson.

Cas 2 : $c_0 = 1$. Soit $\varphi(s) = c_0 s + c_1$. Alors, $a_n(C_\varphi) = n^{-\gamma_1}$. Écrivons en effet

$$\varphi = T \circ \chi \quad \text{avec} \quad \chi(s) = c_0 s \quad \text{et} \quad T(s) = s + c_1.$$

Alors $C_\varphi = C_\chi C_T$, C_χ est une isométrie de $\mathcal{H}^2$ et la multiplication à gauche par une isométrie préserve les nombres d'approximation. Donc $a_n(C_\varphi) = a_n(C_T) = n^{-\gamma_1}$ car C_T est diagonal d'éléments diagonaux n^{-c_1} sur la base hilbertienne canonique (u_n) de $\mathcal{H}^2$, $u_n(s) = n^{-s}$. □

Remarques 3.19.

(1) Les premiers résultats sur les nombres d'approximation des opérateurs de composition (sur les espaces de Hardy et Bergman du disque) sont apparus dans [37]. Voir aussi [49] pour l'espace de Hardy des séries de Dirichlet.

(2) Le lecteur trouvera dans [49] des résultats plus précis (en particulier des majorations) sur les nombres d'approximation des $C_\varphi : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$, où des techniques plus élaborées (mesures de Carleson, suites d'interpolation, résolution du ∂-bar avec estimées) sont utilisées, ainsi que la définition des a_n comme nombres de Gelfand. Cf. le paragraphe suivant.

(3) L'extension des résultats de ce chapitre aux espaces de Hardy-Dirichlet $\mathcal{H}^p$ avec $p \neq 2, \infty$, espaces introduits dans [9], a été obtenue dans [11]. On travaille alors dans un cadre non-hilbertien, avec des espaces dont le dual est mal connu, et les preuves sont plus difficiles. Mais les résultats sont à peu près les mêmes. On y revient plus loin.

3.5. Un second théorème de minoration

Un résultat donnant des informations plus précises, dans lequel les notions de suite de Riesz, de Carleson, d'interpolation du chapitre 2 sont exploitées à fond, est le suivant ([49])

Théorème 3.20. *Soit $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ un symbole tel que C_φ soit* compact *sur $\mathcal{H}^2$. Soit $S = (s_j)$ et $S' = (s'_j)$ deux suites finies de n points distincts de $\mathbb{C}_{1/2}$ telles que $\varphi(s'_j) = s_j$, $1 \leq j \leq n$. Alors*

$$a_n(C_\varphi) \geq \Big[M_{\mathcal{H}^2}(S)\Big]^{-1} \Big\|\mu_{S'}\Big\|_{\mathcal{C},\mathcal{H}^2}^{-1/2} \inf_{1\leq j\leq n} \left(\frac{\zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s_j)}{\zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s'_j)}\right)^{1/2}. \tag{3.18}$$

Démonstration. On utilise la définition de $a_n(C^*_\varphi)$ comme nombre de Bernstein et on choisit pour espace-test E l'espace modèle de dimension n engendré par les g_j où l'on pose $g_j = K_{s'_j}$, $1 \leq j \leq n$. Pour simplifier les notations, on écrira $\|\ \|$ pour la norme dans $\mathcal{H}^2$ et on posera $\mu_n = \inf_{1\leq j\leq n} \sqrt{\frac{\zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s_j)}{\zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s'_j)}}$. Nous avons $C^*_\varphi(g_j) = K_{s_j}$ d'après l'équation de l'image, et aussi, puisque $a_n(C_\varphi) = a_n(C^*_\varphi) = b_n(C^*_\varphi)$

$$a_n(C_\varphi) \geq \inf_{f\in E, \|f\|=1} \|C^*_\varphi(f)\|. \tag{3.19}$$

Soit maintenant $f = \sum_{j=1}^n b_j g_j \in E$ avec $\|f\| = 1$. Je dis d'abord que

$$1 \leq \|\mu_{S'}\|_{\mathcal{C},\mathcal{H}^2} \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s'_j). \tag{3.20}$$

Cela découle des propositions 2.6 et 2.7 (Boas) du chapitre 2, puisque $\|K_{s'_j}\|^2 = \zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s'_j)$. Je dis ensuite que

$$\|C^*_\varphi f\|^2 \geq \delta^{-2} \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s_j) \geq \delta^{-2} \mu_n^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s'_j) \tag{3.21}$$

où $\delta = M_{\mathcal{H}^2}(S)$. Cela découle à nouveau des propositions 2.6 et 2.7 du chapitre 2 et de l'équation de l'image, puisque $\|K_{s_j}\|^2 = \zeta(2\,\mathfrak{Re}\, s_j)$ et $C^*_\varphi(g_j) = K_{s_j}$. Enfin, les trois estimées (3.19), (3.20), (3.21) donnent clairement le résultat. □

Comme on le voit, la preuve de ce théorème est simple, tout en utilisant l'équation de l'image et les critères quantitatifs du chapitre 2 sur les suites de Riesz. Mais la mise en oeuvre du résultat est difficile et ne sera pas abordée ici : on a l'embarras du choix pour S et S' (même si $\varphi(S') = S$), et ensuite on doit estimer chacun des trois termes du membre de droite de (3.18). Le troisième pose peu de problèmes. Pour le second, on utilise le théorème de plongement de Carleson et les fenêtres de Carleson. Quant au premier terme $M_{\mathcal{H}^2}(S)$, il nécessite des techniques délicates de ∂-bar pour se ramener à l'espace de Hardy usuel de $\mathbb{C}_{1/2}$, mieux connu. On renvoie le lecteur à [49] pour les détails.

Des *majorations* des $a_n(C_\varphi)$ sont également obtenues dans [49], en termes de mesures de Carleson et les résultats sont très précis pour des symboles "d-dimensionnels" ($d \geq 2$) de la forme

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$$

où les q_j sont des nombres entiers indépendants (i.e. les $\log q_j$ sont rationnellement indépendants, par exemple $q_1 = 2,\ q_2 = 6$), et où

$$\mathfrak{Re}\, c_1 = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{d} |c_{q_j}|.$$

Il faut alors raffiner le choix des g_j en utilisant des *barycentres de noyaux reproduisants* et modifier un peu l'énoncé, mais le principe est le même que dans le théorème 3.20. On obtient dans ce cas, à un facteur logarithmique près

$$a_n(C_\varphi) \approx n^{-(d-1)/2}.$$

En particulier, on sait exactement à quelles classes de Schatten on a droit :

$$C_\varphi \in S_p \Longleftrightarrow p > \frac{2}{d-1}.$$

Pour $d = 2$, on a donc $C_\varphi \notin S_2$ (résultat déjà dans [21]) mais $C_\varphi \in S_p$ pour $p > 2$, alors que dans [21] le résultat est seulement prouvé pour $p \geq 4$.

3.6. Le cas des espaces $\mathcal{H}^p$

On renvoie au chapitre 1, section 6, pour la définition de l'espace $\mathcal{H}^p$. On rencontre dès le début une difficulté : la description complète des opérateurs de composition bornés sur $\mathcal{H}^p$ n'est pas connue. Cela est toujours lié au fait (chapitre 1, section 6) que $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ n'est pas complémenté dans $L^p(\mathbb{T}^\infty)$. Nous pouvons énoncer une condition nécessaire et suffisante quand $c_0 \geq 1$, mais devons nous contenter de ce qui suit quand $c_0 = 0$:

Théorème 3.21 (Bayart)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ analytique et $1 \leq p < \infty$.*

(a) Si $C_\varphi : \mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p$, on doit avoir $\varphi \in \mathcal{G}$.

(b) C_φ est une contraction sur $\mathcal{H}^p$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{G}$ et $c_0 \geq 1$.

(c) Si $\varphi \in \mathcal{G}$ et $c_0 = 0$, C_φ est borné sur $\mathcal{H}^p$ quand p est un entier pair.

Nous avons aussi le théorème suivant ([11]), qui montre que la description du spectre donnée par le théorème 3.13 s'étend au cas de $\mathcal{H}^p$:

Théorème 3.22. *Soit $\varphi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ définissant un opérateur de composition compact sur $\mathcal{H}^p$. Alors, les valeurs propres de C_φ sont de multiplicité un et valent*

(a) $\lambda_n = [\varphi'(\alpha)]^{n-1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots,$ quand $c_0 = 0$, où α est le point fixe de φ dans $\mathbb{C}_{1/2}$.

(b) $\lambda_n = n^{-c_1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots,$ quand $c_0 = 1$.

(c) 1 si $c_0 \geq 2$, et alors $\sigma(C_\varphi) = \{0, 1\}$.

Cette description du spectre sera exploitée à l'aide de la généralisation suivante par Pietsch ([44]) des inégalités multiplicatives de Weyl à un espace de Banach. Ces inégalités doivent alors être affaiblies, mais sous une forme qui suffira à nos besoins :

Théorème 3.23 (Pietsch)**.** *Soit $T : X \to X$ un opérateur compact d'un espace de Banach X dans lui-même. Alors pour tout entier $n \geq 1$*

$$|\lambda_{2n}(T)| \leq e \Big(\prod_{j=1}^{n} a_j(T) \Big)^{1/n}. \tag{3.22}$$

où $\lambda_j(T)$ et $a_j(T)$ désignent respectivement les valeurs propres et les nombres d'approximation de T, rangés en ordre décroissant.

Nous nous baserons sur ces théorèmes pour esquisser la preuve du théorème suivant ([11]) :

Théorème 3.24. *Supposons que c_0 est un entier ≥ 0, que $p \geq 1$, et enfin que $\varphi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} = c_0 s + \psi(s) \in \mathcal{G}$ est une fonction non constante engendrant un opérateur de composition compact C_φ sur $\mathcal{H}^p$. Alors $\mathfrak{Re}\, c_1 =: \gamma_1 > 0$. De plus*

(a) *Si $c_0 = 0$, alors $a_n(C_\varphi) \gg \delta^n$ pour un $0 < \delta < 1$.*

(b) *Si $c_0 \geq 1$, alors $a_n(C_\varphi) \geq \delta_p (n \log n)^{-\gamma_1}$, où $\delta_p > 0$ dépend seulement de p. En particulier*
$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n(C_\varphi)]^{1/\gamma_1} = \infty. \tag{3.23}$$

Ces bornes inférieures sont optimales en général.

Démonstration. Montrons d'abord que $\gamma_1 > 0$ dès que C_φ est compact. Nous distinguons deux cas.

— Si $\psi(s) = c_1$, on a $\varphi = T \circ I$ où $I(s) = c_0 s$ et $T(s) = s + c_1$, d'où $C_\varphi = C_I\, C_T$. Comme $C_I : \mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p$ est une isométrie, on voit que
$$C_\varphi \text{ compact} \iff C_T \text{ compact} \iff \gamma_1 > 0.$$

— Si $\psi(s) = c_1 + c_q q^{-s} + \sum_{n>q} c_n n^{-s}$ avec $q \geq 2$ et $c_q \neq 0$, soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $c_q q^{-it_0} = -|c_q|$ et $s = \sigma + it_0$ avec $\sigma \to \infty$. On sait que $\psi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_0$, donc
$$0 < \mathfrak{Re}\, \psi(s) \leq \gamma_1 - |c_q| q^{-\sigma} + \sum_{n>q} |c_n| n^{-\sigma} = \gamma_1 - |c_q| q^{-\sigma} + o(q^{-\sigma})$$
et par suite, pour σ assez grand : $\gamma_1 \geq (1/2)|c_q| q^{-\sigma} > 0$.

Nous nous limitons au cas $p > 1$ et commençons par l'optimalité. Soit d'abord $\varphi \in \mathcal{G}$ avec $c_0 = 0$ et $\overline{\varphi(\mathbb{C}_0)}) \subset \mathbb{C}_{1/2}$. On montre alors ([11], (a) du théorème 8.1) qu'il existe $\delta < 1$ tel que
$$a_n(C_\varphi) \ll \delta^n.$$

Soit ensuite $\varphi(s) = c_0 s + A$ avec $c_0 \geq 1$ et $A > 0$. En utilisant le fait que les u_n, $u_n(s) = n^{-s}$ forment une base de Schauder de $\mathcal{H}^p$ ([1]), on montre que ([11], théorème 8.1(b))
$$a_n(C_\varphi) \ll n^{-A}.$$

Cela s'étend, par la propriété d'idéal des nombres d'approximation, au cas plus général de $\varphi(s) = c_0 s + \psi(s)$ vérifiant $\varphi(\mathbb{C}_0) \subset \mathbb{C}_A$. Reste à prouver les minorations dans le cas général. Nous distinguons deux cas.

Cas $c_0 = 0$. La preuve est analogue à la première preuve du cas $p = 2$, en utilisant cette fois les théorèmes 3.22 et 3.23, le raisonnement taubérien étant le même.

Cas $c_0 \geq 1$. Il faut adapter le Lemme 3.18 comme suit ([11], Lemme 7.1) :

Lemme 3.25. *Soit n un entier ≥ 1. Supposons que $\varphi(s) = c_0 s + \sum_{j=1}^{\infty} c_j j^{-s}$ est dans $\mathcal{G}$ avec $c_0 \geq 1$. Soit E le sous-espace n-dimensionnel de $\mathcal{H}^p$ engendré par les vecteurs $p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots, p_n^{-s}$. Alors, pour toute fonction*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k p_k^{-s} \in E,$$

on a

$$\begin{aligned} &C_\varphi f(s) = g(s) + h(s) \\ \text{où} \quad &g(s) = \sum_{k=1}^{n} b_k p_k^{-c_1} (p_k^{c_0})^{-s} \quad \text{et} \quad \|g\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|C_\varphi f\|_{\mathcal{H}^p}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

On peut maintenant finir la preuve du théorème 3.24. Choisissons E comme dans le Lemme 3.25 et soit f un vecteur unitaire de E. Ce lemme et un relèvement de Bohr (remplacement de g par Δg avec les notations du chapitre 1) nous donnent

$$\|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{H}^p} \geq \|g\|_{\mathcal{H}^p} = \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k p_k^{-c_1} z_k^{c_0} \Big\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)} = \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k p_k^{-c_1} z_k \Big\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$$

la dernière relation venant de l'invariance de la mesure de Haar m_∞ de $\mathbb{T}^\infty$ par la transformation $(z_j) \mapsto (z_j^{c_0})$. Appliquant deux fois les inégalités de Khintchine aux variables de Steinhaus z_j, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{H}^p} &\gg \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k p_k^{-c_1} z_k \Big\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)} \geq p_n^{-\Re\mathrm{e}\, c_1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k z_k \Big\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)} \\ &\gg p_n^{-\Re\mathrm{e}\, c_1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k z_k \Big\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)} = p_n^{-\Re\mathrm{e}\, c_1} \|f\|_{\mathcal{H}^p}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$a_n(C_\varphi) \geq b_n(C_\varphi) \gg p_n^{-\Re\mathrm{e}\, c_1}.$$

Par une forme simple du théorème des nombres premiers, déjà utilisée dans le cas de $\mathcal{H}^2$, on a $p_n \ll n \log n$, ce qui achève la preuve. On pourrait aussi (cf. [11]) utiliser les théorèmes 3.22 et 3.23. $\square$

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide du Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01). Je remercie vivement F. Bayart, Y. Heurteaux et A. Stos pour m'avoir invité à donner ce mini-cours en Juin 2014, et m'avoir ensuite donné la possibilité d'en rédiger une version détaillée dans les Annales Mathématiques Blaise Pascal.

Références

[1] A. Aleman, J.-F. Olsen et E. Saksman – « Fourier multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2014), no. 16, p. 4368–4378.

[2] T. M. Apostol – *Introduction to analytic number theory*, 5e éd., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1998, Undergraduate Texts in Mathematics.

[3] M. Bailleul – « Espaces de Banach de séries de Dirichlet et leurs opérateurs de composition », Thèse, Université d'Artois (France), 2014.

[4] M. Bailleul et O. F. Brevig – « Composition operators on Bohr-Bergman spaces of dirichlet series », `http://arxiv.org/abs/1409.3017v1`, 2014.

[5] M. Bailleul et P. Lefèvre – « Some Banach spaces of Dirichlet series », *Studia Math.* **226** (2015), no. 1, p. 17–55.

[6] R. Balasubramanian, B. Calado et H. Queffélec – « The Bohr inequality for ordinary Dirichlet series », *Studia Math.* **175** (2006), no. 3, p. 285–304.

[7] P. T. Bateman et H. G. Diamond – *Analytic number theory*, Monographs in Number Theory, vol. 1, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2004, An introductory course.

[8] F. Bayart et A. Mouze – « Division et composition dans l'anneau des séries de Dirichlet analytiques », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 7, p. 2039–2060.

[9] F. Bayart – « Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators », *Monatsh. Math.* **136** (2002), no. 3, p. 203–236.

[10] ———, « Compact composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series », *Illinois J. Math.* **47** (2003), no. 3, p. 725–743.

[11] F. Bayart, H. Queffélec et K. Seip – « Approximation numbers of composition operators on H^p spaces of Dirichlet series », à paraître dans Ann. Inst. Fourier.

[12] R. P. Boas, Jr. – « A general moment problem », *Amer. J. Math.* **63** (1941), p. 361–370.

[13] H. Bohr – « Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen », *J. Reine Angew. Math.* **143** (1913), p. 203–211.

[14] D. G. Bourgin et C. W. Mendel – « Orthonormal sets of periodic functions of the type $\{f(nx)\}$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **57** (1945), p. 332–363.

[15] J. Burnol – 2014, Communication personnelle.

[16] B. Carl et I. Stephani – *Entropy, compactness and the approximation of operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[17] E. D. Cashwell et C. J. Everett – « The ring of number-theoretic functions », *Pacific J. Math.* **9** (1959), p. 975–985.

[18] C. C. Cowen et B. D. MacCluer – *Composition operators on spaces of analytic functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[19] P. J. Davis – *Interpolation and approximation*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co. New York-Toronto-London, 1963.

[20] S. E. Ebenstein – « Some H^p spaces which are uncomplemented in L^p », *Pacific J. Math.* **43** (1972), p. 327–339.

[21] C. Finet, H. Queffélec et A. Volberg – « Compactness of composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series », *J. Funct. Anal.* **211** (2004), no. 2, p. 271–287.

[22] J. B. Garnett – *Bounded analytic functions*, first éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 236, Springer, New York, 2007.

[23] J. Gordon et H. Hedenmalm – « The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients », *Michigan Math. J.* **46** (1999), no. 2, p. 313–329.

[24] R. P. Gosselin et J. H. Neuwirth – « On Paley-Wiener bases », *J. Math. Mech.* **18** (1968/69), p. 871–879.

[25] G. H. Hardy et M. Riesz – *The general theory of Dirichlet's series*, Dover Phenix Editions, Second Edition, 2005.

[26] G. H. Hardy et E. M. Wright – *An introduction to the theory of numbers*, fifth éd., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[27] H. Hedenmalm, P. Lindqvist et K. Seip – « A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$ », *Duke Math. J.* **86** (1997), no. 1, p. 1–37.

[28] ———, « Addendum to : "A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$" », *Duke Math. J.* **99** (1999), no. 1, p. 175–178.

[29] H. Helson – « Hankel forms and sums of random variables », *Studia Math.* **176** (2006), no. 1, p. 85–92.

[30] ———, « Hankel forms », *Studia Math.* **198** (2010), no. 1, p. 79–84.

[31] E. Hlawka, J. Schoissengeier et R. Taschner – *Geometric and analytic number theory*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991, Translated from the 1986 German edition by Charles Thomas.

[32] B. Hollenbeck et I. E. Verbitsky – « Best constants for the Riesz projection », *J. Funct. Anal.* **175** (2000), no. 2, p. 370–392.

[33] J.-P. Kahane – *Some random series of functions*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[34] J. Korevaar – *Tauberian theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 329, Springer-Verlag, Berlin, 2004, A century of developments.

[35] D. Li – 2014, Communication orale.

[36] D. Li et H. Queffélec – *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 12, Société Mathématique de France, Paris, 2004, Analyse et probabilités. [Analysis and probability theory].

[37] D. Li, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza – « On approximation numbers of composition operators », *J. Approx. Theory* **164** (2012), no. 4, p. 431–459.

[38] P. Lindqvist et K. Seip – « Note on some greatest common divisor matrices », *Acta Arith.* **84** (1998), no. 2, p. 149–154.

[39] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava – « Interlacing families II : Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem », *Ann. of Math. (2)* **182** (2015), no. 1, p. 327–350.

[40] J. E. McCarthy – « Hilbert spaces of Dirichlet series and their multipliers », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), no. 3, p. 881–893 (electronic).

[41] A. V. Megretskiĭ, V. V. Peller et S. R. Treil – « The inverse spectral problem for self-adjoint Hankel operators », *Acta Math.* **174** (1995), no. 2, p. 241–309.

[42] H. L. Montgomery et R. C. Vaughan – « Hilbert's inequality », *J. London Math. Soc. (2)* **8** (1974), p. 73–82.

[43] J.-F. Olsen et K. Seip – « Local interpolation in Hilbert spaces of Dirichlet series », *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 1, p. 203–212 (electronic).

[44] A. Pietsch – « Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces », *Math. Ann.* **247** (1980), no. 2, p. 149–168.

[45] G. Pólya et G. Szegő – *Problems and theorems in analysis. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by D. Aeppli,.

[46] H. Queffélec et C. Zuily – *Analyse pour l'Agrégation*, 4e éd., Dunod, 2013.

[47] H. Queffélec – « Composition operators in the Dirichlet series setting », Perspectives in operator theory, Banach Center Publ., vol. 75, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007, p. 261–287.

[48] H. Queffélec et M. Queffélec – *Diophantine approximation and Dirichlet series*, Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes, vol. 2, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2013.

[49] H. Queffélec et K. Seip – « Approximation numbers of composition operators on the H^2 space of Dirichlet series », *J. Funct. Anal.* **268** (2015), no. 6, p. 1612–1648.

[50] O. Ramaré – 2013, Communication personnelle.

[51] E. Saksman – 2012, Communication personnelle.

[52] E. Saksman et K. Seip – « Integral means and boundary limits of Dirichlet series », *Bull. Lond. Math. Soc.* **41** (2009), no. 3, p. 411–422.

[53] K. Seip – 2014, Communication personnelle.

[54] H. S. Shapiro et A. L. Shields – « On some interpolation problems for analytic functions », *Amer. J. Math.* **83** (1961), p. 513–532.

[55] J. H. SHAPIRO – *Composition operators and classical function theory*, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

[56] D. WERNER – *Funktionalanalysis*, 6e éd., Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[57] R. M. YOUNG – *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Pure and Applied Mathematics, vol. 93, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.

HERVÉ QUEFFÉLEC
Université Lille Nord de France
UMR 8524 CNRS
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX, France
Herve.Queffelec@univ-lille1.fr