ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Abhishek Banerjee

Les motifs de Tate et les opérateurs de périodicité de Connes

Volume 21, n° 1 (2014), p. 1-23.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2014__21_1_1_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques

http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **21**, 1-23 (2014)

Les motifs de Tate et les opérateurs de périodicité de Connes

Abhishek Banerjee

Résumé

Dans cet article, nous définissons une catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs sur une catégorie monoïdale symétrique $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ vérifiant certaines hypothèses. Le rôle des espaces sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ est joué par les monoïdes (non necessairement commutatifs) dans $\mathbf{C}$. Pour définir les morphismes dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, nous utilisons des classes dans les groupes d'homologie cyclique bivariante. Le but est de montrer que les opérateurs de périodicité de Connes induisent des morphismes $M \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} \longrightarrow M$ dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, où $\mathbb{T}$ est le motif de Tate dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

Tate motives and the periodicity operators of Connes

Abstract

In this paper, we define a category $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ of motives over a symmetric monoidal category $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ satisfying certain conditions. The role of spaces over $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ is played by monoid objects (not necessarily commutative) in $\mathbf{C}$. To define morphisms in the category $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, we use classes in bivariant cyclic homology groups. The aim is to show that the Connes periodicity operators induce morphisms $M \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} \longrightarrow M$ in $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, where $\mathbb{T}$ is the Tate motive in $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

1. Introduction

Soit k un anneau commutatif. Alors, il est bien connu que la géométrie algébrique des schémas sur k admet une généralisation naturelle aux catégories monoïdales symétriques (voir, par exemple, Deligne [4], Hakim [5], Toën et Vaquié [11]). Étant donnée une telle catégorie $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ abélienne et monoïdale symétrique (sous certaines hypothèses), nous définissons la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs (purs) sur $\mathbf{C}$. Pour chaque monoïde (pas nécessairement commutatif) A dans $\mathbf{C}$, on a un motif dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. De plus,

Mots-clés : Motifs de Tate, opérateurs de périodicité.
Classification math. : 14F42.

si B est un autre monoïde dans $\mathbf{C}$, une correspondance de A vers B (au sens de Section 2) induit un morphisme dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. Ceci est motivé par le domaine de la géométrie noncommutative, dans lequel le rôle des espaces est joué par les algèbres non nécessairement commutatives. Pour définir les correspondances entre les espaces non-commutatifs (C^*-algèbres), on peut utiliser (voir [3, § 2]) la KK-théorie de Kasparov. Dans la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, les morphismes sont définis en utilisant les homologies cycliques bivariantes. Dans le cas des C^*-algèbres, la KK-théorie est étroitement liée à la théorie d'homologie cyclique bivariante. Puisque l'homologie cyclique est un analogue noncommutatif de cohomologie motivique, on peut se demander s'il est possible de décrire l'opérateur de périodicité de Connes en termes de motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. Le but de cet article est de montrer que l'opérateur de périodicité de Connes donne les morphismes naturels

$$M \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} \longrightarrow M \qquad \forall\ M \in \widetilde{Mot}_{\mathbf{C}} \tag{1.1}$$

où $\mathbb{T}$ est le motif de Tate dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

Plus précisément, soit $Alg_{\mathbf{C}}$ la catégorie des monoïdes dans $\mathbf{C}$. Fixons un entier positif $n \geq 1$. Pour A, $B \in Alg_{\mathbf{C}}$, nous introduisons la notion d'une correspondance de rang n de A vers B. Notons par $Corr_n(A, B)$ l'ensemble des correspondances de rang n de A vers B. Ces correspondances sont composables ; autrement dit, étant donnés trois monoïdes A, B, C dans $\mathbf{C}$, il existe des morphismes naturels

$$Corr_m(A, B) \times Corr_n(B, C) \longrightarrow Corr_{mn}(A, C) \qquad \forall\ m, n \geq 1 \tag{1.2}$$

De plus, si $e \in Corr_1(A, A)$ est une correspondance telle que $e \circ e = e$, nous disons que e est un projecteur. Posons $Corr(A, B) := \bigcup_{n \geq 1} Corr_n(A, B)$ et notons par $C(A, B)$ le groupe abélien engendré par les correspondances de A vers B. Alors, nous définissons la catégorie $ALG_{\mathbf{C}}$ telle que les objets de $ALG_{\mathbf{C}}$ sont les monoïdes dans $\mathbf{C}$ et avec

$$Hom_{ALG_{\mathbf{C}}}(A, B) := C(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \tag{1.3}$$

On peut considérer la catégorie $ALG_{\mathbf{C}}$ comme un analogue de la catégorie des schemas projectifs lisses sur k enrichie par les correspondances.

Dans Section 3, nous construirons une théorie cyclique bivariante pour les monoïdes dans $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. Étant donnés deux monoïdes A, B dans $\mathbf{C}$, notons par $HC_k(A, B)$, $k \in \mathbb{Z}$ les groupes d'homologie cyclique bivariante. Alors, considérons la catégorie $Mot_{\mathbf{C}}$ telle que ses objets sont les couples

(A, m) où A est un monoïde et $m \in \mathbb{Z}$. De plus, posons $(\forall\ (A, m), (B, n) \in Mot_{\mathbf{C}}, k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n)) &= Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m+k), (B, n+k)) \\ &:= HC_{m-n}(A, B) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nous montrons qu'il existe un foncteur canonique

$$I : ALG_{\mathbf{C}} \longrightarrow Mot_{\mathbf{C}} \qquad I(A) := (A, 0) \tag{1.5}$$

En particulier, si $e \in Corr_1(A, A)$ est un projecteur, on a un morphisme $I(e) \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, 0), (A, 0))$. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, notons par $I(e)[m]$ le morphisme $I(e)$ consideré comme un élément de $Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (A, m)) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, 0), (A, 0))$.

La catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ est définie comme suit : Les objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ sont les triplets (A, e, m) tels que A est un monoïde dans $\mathbf{C}$, $e \in Corr_1(A, A)$ est un projecteur et $m \in \mathbb{Z}$. De plus, posons

$$\begin{aligned} &Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n)) \\ &:= I(f)[n] \circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n)) \circ I(e)[m] \subseteq HC_{m-n}(A, B) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dans la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, nous considérons le motif de Tate $\mathbb{T} := (1, id, -1)$ et le motif de Lefschetz $\mathbb{L} := (1, id, -1)$. Nous montrons que les opérateurs de périodicité de Connes, considérés comme cycles dans $HC_{-2}(A, A)$, induisent les morphismes naturels (voir (3.50))

$$\xrightarrow{S_{m-2}(A)} (A, e, m) \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} \xrightarrow{S_m(A)} (A, e, m) \xrightarrow{S_{m+2}(A)} (A, e, m) \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \tag{1.7}$$

Enfin, nous utilisons le système inductif (1.7) pour définir une catégorie des motifs périodiques sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ (voir (3.54)).

Remerciements : J'adresse mes plus sincères remerciements au Professeur Alain Connes, qui a suggéré cette direction de recherche.

2. Correspondances entre les catégories des modules

Soit k un corps algébriquement clos. Notons par Alg_k la catégorie des k-algèbres unitaires. Dans tout l'article, les algèbres considérées appartiennent à Alg_k. Tous les homomorphismes sont supposés unitaires.

Pour chaque k-algèbre A, la catégorie des A-modules à gauche est notée par $A - Mod$. Notons que $A - Mod$ est une catégorie abélienne. Alors, les produits directs finis dans $A - Mod$ coïncident avec les sommes directes finies. Pour chaque objet M de $A-Mod$, notons par M^n la somme directe (ou le produit direct) de n copies de M.

Étant donné un morphisme $f : A \longrightarrow B$ dans Alg_k, il existe un foncteur $f^* : A - Mod \longrightarrow B - Mod$ défini comme suit :

$$f^* : A - Mod \longrightarrow B - Mod \qquad f^*(M) := B \otimes_A M \tag{2.1}$$

Il est bien connu que le foncteur de restriction $f_* : B - Mod \longrightarrow A - Mod$ est un adjoint à droite de f^*.

Notre but est d'agrandir la catégorie Alg_k en ajoutant les correspondances finies et étales. La notion de correspondance finie entre les schémas est bien connue (voir [10]). Mais, dans la définition suivante, nous nous limitons à des correspondances finies et étales.

Définition 2.1. Soient X et Y deux schémas lisses et separés sur k. Supposons que X est connexe. Une correspondance élémentaire de X vers Y est un sous-ensemble $Z \subseteq X \times Y$ fermé et irréductible tel que Z est fini, étale et surjectif sur X.

Si X n'est pas nécessairement connexe, une correspondance élémentaire de X vers Y est une correspondance élémentaire d'une composante connexe de X vers Y.

Notons par $Cor(X, Y)$ le groupe abélien libre engendré par les correspondances élémentaires de X vers Y.

De plus, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini et étale de schémas sur k, on sait que (voir [8, § 5.6]) pour chaque sous-ensemble ouvert $V = Spec(A) \subseteq Y$, on a $U = f^{-1}(V) = Spec(B)$, où B est une A-algèbre séparable et projective de type fini. Ainsi, on sait que B est un A-module projectif de rang fini. Alors, il existe un A-module libre A^n et un monomorphisme $B \longrightarrow A^n$ des A-modules. Si le morphisme d' anneaux commutatifs induit par $f|U : U \longrightarrow V$ est noté par $g : A \longrightarrow B$, il existe des morphismes naturels de A-modules :

$$g_*g^*(M) = B \otimes_A M \longrightarrow A^n \otimes_A M \simeq M^n \qquad \forall\ M \in A - Mod \tag{2.2}$$

Définition 2.2. Soient A, B deux algèbres appartenant à Alg_k. Soit n un entier $n \geq 1$. Une correspondance de A vers B de rang n est un quadruplet (C, f_A, f_B, i_B) tel que :

(a) C est une k-algèbre et $f_A : A \longrightarrow C$, $f_B : B \longrightarrow C$ sont des homomorphismes d'anneaux.

(b) $i_B : f_{B*}f_B^* \longrightarrow Id^n$ est une transformation des foncteurs, où $Id^n : B - Mod \longrightarrow B - Mod$ est défini comme $Id^n(M) = M^n$ pour chaque $M \in B - Mod$.

Soient A, B deux algèbres appartenant à Alg_k et soit (C, f_A, f_B, i_B) une correspondance de A vers B de rang n. Alors, on peut définir deux foncteurs :

$$\begin{array}{ll} P : A - Mod \longrightarrow B - Mod & P := f_{B*} \circ f_A^* \\ Q : B - Mod \longrightarrow A - Mod & Q := f_{A*} \circ f_B^* \end{array} \tag{2.3}$$

Choisissons M, $M'' \in B - Mod$ et $M' \in A - Mod$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Hom(f_B^*M, f_A^*M') \otimes Hom(f_A^*M', f_B^*M'') & \longrightarrow & Hom(f_B^*M, f_B^*M'') \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ Hom(M, f_{B*}f_A^*M') \otimes Hom(M', f_{A*}f_B^*M'') & \longrightarrow & Hom(M, f_{B*}f_B^*M'') \\ =\downarrow & & {\scriptstyle Hom(M, i_B(M''))}\downarrow \\ Hom(M, P(M')) \otimes Hom(M', Q(M'')) & \longrightarrow & Hom(M, M'')^n \end{array} \tag{2.4}$$

où le morphisme

$Hom(f_B^*(M), f_A^*(M')) \otimes Hom(f_A^*(M'), f_B^*(M'') \longrightarrow Hom(f_B^*(M), f_B^*(M''))$

dans le diagramme (2.4) est donné par composition. Notons que la catégorie $C - Mod$ n'apparaît pas explicitement dans la flèche du bas du diagramme (2.4) Pour nos fins, nous avons besoin d'introduire la notion de correspondance entre catégories abéliennes. Cela est motivé par (2.4).

Définition 2.3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et soit $n \geq 1$. Une correspondance de rang n de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est un triplet (P, Q, f_{PQ}) tel que :

(a) $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $Q : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ sont des foncteurs.

(b) $f_{PQ} = \{f_{PQ}(M')\}_{M' \in \mathcal{A}}$ est une famille des transformations des foncteurs telle que, pour chaque $M' \in \mathcal{A}$ fixé, il existe des morphismes naturels ($\forall$ M, $M'' \in \mathcal{B}$)

$$Hom(M, P(M')) \otimes Hom(M', Q(M'')) \xrightarrow{f_{PQ}(M, M', M'')} Hom(M, M'')^n \tag{2.5}$$

Notons par $Corr_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ le sous-ensemble des correspondances de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ de rang n. Posons $Corr(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \bigcup\limits_{n\geq 1} Corr_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Nous remarquons que, $\forall\ M,\ M'' \in \mathcal{B}$, l'ensemble $Hom(M,M'')$ est un groupe abélien. Ainsi, la somme directe de n copies de $Hom(M,M'')$ coïncide avec le produit direct de n copies de $Hom(M,M'')$.

Proposition 2.4. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Soit (P,Q) un couple des foncteurs adjoints $P : \mathcal{A} \longrightarrow B$, $Q : \mathcal{B} \longrightarrow A$. Alors, (P,Q) définit une correspondance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ de rang 1.*

Démonstration. Fixons un objet $M' \in \mathcal{A}$ et choisissons deux objets M, $M'' \in \mathcal{B}$. Alors, il existe un morphisme naturel

$$f_{PQ}(M,M',M'') := \begin{cases} Hom(M,P(M')) \otimes Hom(M',Q(M'')) \\ \qquad\qquad\qquad \cong\big\downarrow \\ Hom(M,P(M')) \otimes Hom(P(M'),M'') \\ \qquad\qquad\qquad \big\downarrow \\ \qquad\qquad Hom(M,M'') \end{cases} \tag{2.6}$$

où le morphisme $Hom(M,P(M'))\otimes Hom(P(M'),M'') \longrightarrow Hom(M,M'')$ est défini par composition des morphismes. Alors, (P,Q,f_{PQ}) est une correspondance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ de rang 1. $\square$

Soient $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ trois catégories. Soit (P,Q), $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $Q : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un couple des foncteurs adjoints. Soit (P',Q'), $P' : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, $Q' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ un autre couple des foncteurs adjoints. Alors, il est bien connu que $(P'P,QQ')$, $P'P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, $QQ' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un couple des foncteurs adjoints. Dans la proposition suivante, on voit que la composition des correspondances est effectuée d'une manière très similaire.

Proposition 2.5. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes. Fixons m, $n \geq 1$. Alors, il existe une composition des correspondances*

$$Corr_m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \otimes Corr_n(\mathcal{B},\mathcal{C}) \longrightarrow Corr_{mn}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \tag{2.7}$$

Démonstration. Soit $(P, Q, f_{PQ}) \in Corr_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ une correspondance de rang m et soit $(P', Q', f_{P'Q'}) \in Corr_n(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ une correspondance de rang n. Choisissons M, $M'' \in \mathcal{C}$ et $M' \in \mathcal{A}$. Puisque (P, Q, f_{PQ}) est une correspondance, il existe un morphisme

$$\begin{array}{c} Hom(PM', PM') \otimes Hom(M', QQ'(M'')) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle f_{PQ}(PM', M', Q'M'')} \\ Hom(PM', Q'M'')^m \end{array} \tag{2.8}$$

En particulier, considérons le morphisme identité $id \in Hom(PM', PM')$. Alors, on a un morphisme

$$f_{PQ}(PM', M', Q'M'')(id\otimes\_) : Hom(M', QQ'M'') \to Hom(PM', Q'M'')^m$$

Puisque $(P', Q', f_{P'Q'})$ est une correspondance, il existe un morphisme

$$\begin{array}{c} Hom(M, P'PM') \otimes Hom(PM', Q'M'') \\ \Big\downarrow {\scriptstyle f_{P'Q'}(M, PM', M'')} \\ Hom(M, M'')^n \end{array} \tag{2.9}$$

En utilisant (2.8) et (2.9), nous posons :

$$f_{P'P,QQ'}(M, M', M'') := \left\{ \begin{array}{c} Hom(M, P'PM') \otimes Hom(M', QQ'M'') \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes f_{PQ}(PM', M', Q'M'')(id\otimes\_\_\_)} \\ Hom(M, P'PM') \otimes Hom(PM', Q'M'')^m \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \bigoplus_{i=1}^{n} f_{P'Q'}(M, PM', M'')} \\ Hom(M, M'')^{nm} \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Donc, le triplet $(P'P, QQ', f_{P'P,QQ'})$ est une correspondance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{C}$ de rang mn.

□

Plus généralement, considérons une petite catégorie monoïdale symétrique $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. Supposons que $\mathbf{C}$ est abélienne et tous les produits directs finis sont inclus dans $\mathbf{C}$. Pour en savoir plus sur les catégories monoïdales symétriques, voir, par exemple, [7]. Dans toute la suite, notons par $Alg_{\mathbf{C}}$ la catégorie des monoïdes commutatifs et unitaires dans $\mathbf{C}$.

Définition 2.6. Soit ($\mathbf{C}$,$\otimes$,1) une catégorie monoïdale symétrique comme plus haut. Soient A, B deux monoïdes appartenant à $Alg_{\mathbf{C}}$. Alors, une correspondance de rang n de A vers B est une famille

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ})=\{(P^T,Q^T,f^T_{PQ})_{T\in Alg_{\mathbf{C}}}\} \tag{2.11}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) Pour chaque monoïde $T\in Alg_{\mathbf{C}}$, (P^T,Q^T,f^T_{PQ}) est une correspondance de $(A\otimes T)-Mod$ vers $(B\otimes T)-Mod$ de rang n (au sens de la Définition 2.3).

(b) Soit $g:T\longrightarrow T'$ un morphisme dans $Alg_{\mathbf{C}}$. Pour M, $M''\in (B\otimes T)-Mod$, $M'\in(A\otimes T)-Mod$, posons $N:=(B\otimes T')\otimes_{B\otimes T}M$, $N':=(A\otimes T')\otimes_{A\otimes T}M'$, $N'':=(B\otimes T')\otimes_{B\otimes T}M''$. Alors, les foncteurs $\{P^T,Q^T\}_{T\in Alg_{\mathbf{C}}}$ sont compatibles avec le changement de base :

$$\begin{array}{c}P^{T'}(N')=P^{T'}((A\otimes T')\otimes_{A\otimes T}M')=(B\otimes T')\otimes_{B\otimes T}P^T(M')\\ Q^{T'}(N'')=Q^{T'}((B\otimes T')\otimes_{B\otimes T}M'')=(A\otimes T')\otimes_{A\otimes T}Q^T(M'')\end{array} \tag{2.12}$$

De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Hom_{B\otimes T}(M,P^TM')\otimes Hom_{A\otimes T}(M',Q^TM'') \arrow[r, "f^T_{PQ}(M,M',M'')"] \arrow[d] & Hom_{B\otimes T}(M,M'')^n \arrow[d] \\ Hom_{B\otimes T'}(N,P^{T'}N')\otimes Hom_{A\otimes T'}(N',Q^{T'}N'') \arrow[r, "f^{T'}_{PQ}(N,N',N'')"] & Hom_{B\otimes T'}(N,N'')^n \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

où les morphismes verticaux sont induits par changement de base. Notons par $Corr_n(A,B)$ le sous-ensemble des correspondances de A vers B de rang n. Posons $Corr(A,B):=\bigcup\limits_{n\geq 1}Corr_n(A,B)$.

Proposition 2.7. *Soit* $(\mathbf{C},\otimes,1)$ *une catégorie monoïdale symétrique comme plus haut. Soient* A, B, T *trois monoïdes appartenant à* $Alg_{\mathbf{C}}$. *Alors, il existe des applications naturelles :*

$$Corr_n(A,B)\longrightarrow Corr_n(A\otimes T,B\otimes T)\qquad \forall n\geq 1 \tag{2.14}$$

Démonstration. Soit $(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ})=\{(P^{T'},Q^{T'},f^{T'}_{PQ})_{T'\in Alg_{\mathbf{C}}}\}$ une correspondance de A vers B de rang n. Nous posons ($\forall\ T'\in Alg_{\mathbf{C}}$)

$$P[T]^{T'}:=P^{T\otimes T'}\qquad Q[T]^{T'}:=Q^{T\otimes T'}\qquad f_{PQ}[T]^{T'}:=f^{T\otimes T'}_{PQ} \tag{2.15}$$

Alors, on voit aisement que la famille

$$(\mathbf{P}[T], \mathbf{Q}[T], \mathbf{f}_{PQ}[T]) := \{(P[T]^{T'}, Q[T]^{T'}, f_{PQ}[T]^{T'})_{T' \in Alg_{\mathbf{C}}}\} \tag{2.16}$$

satisfait toutes les conditions dans la définition 2.6. □

Proposition 2.8. *Soit* $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ *une catégorie monoïdale symétrique comme plus haut. Soient* A_1*,* A_2*,* A_3 *trois monoïdes appartenant à* $Alg_{\mathbf{C}}$*. Fixons* m*,* $n \geq 1$*. Alors, il existe une composition des correspondances*

$$Corr_m(A_1, A_2) \otimes Corr_n(A_2, A_3) \longrightarrow Corr_{mn}(A_1, A_3) \tag{2.17}$$

Démonstration. Soit $\{(P^T, Q^T, f^T_{PQ})_{T \in Alg_{\mathbf{C}}})\} \in Corr_m(A_1, A_2)$ une correspondance de A_1 vers A_2 et soit $\{(P'^T, Q'^T, f^T_{P'Q'})_{T \in Alg_{\mathbf{C}}})\} \in Corr_n(A_2, A_3)$ une correspondance de A_2 vers A_3. Il résulte de Proposition 2.5 que, pour chaque $T \in Alg_{\mathbf{C}}$, on peut composer les correspondances $(P^T, Q^T, f^T_{PQ}) \in Corr_m(A_1 \otimes T - Mod, A_2 \otimes T - Mod)$ et $(P'^T, Q'^T, f^T_{P'Q'}) \in Corr_n(A_2 \otimes T - Mod, A_3 \otimes T - Mod)$. Posons

$$\begin{aligned} &(P'^T, Q'^T, f^T_{P'Q'}) \circ (P^T, Q^T, f^T_{PQ}) \\ &= (P'^T P^T, Q^T Q'^T, f^T_{P'P,QQ'}) \in Corr_{mn}(A_1 \otimes T - Mod, A_3 \otimes T - Mod) \end{aligned}$$

où $f^T_{P'P,QQ'}$ est défini comme dans (2.10). Soit $g : T \longrightarrow T'$ un morphisme dans $Alg_{\mathbf{C}}$. Alors, les foncteurs $P'^T P^T$, $Q^T Q'^T$, $T \in Alg_{\mathbf{C}}$ sont compatibles avec le changement de base :
Pour chaque $M \in A_3 \otimes T - Mod$, $N \in A_1 \otimes T - Mod$, on a

$$\begin{aligned} P'^{T'} P^{T'}((A_1 \otimes T') \otimes_{A_1 \otimes T} N) &= P'^{T'}((A_2 \otimes T') \otimes_{A_2 \otimes T} P^T(N)) \\ &= (A_3 \otimes T') \otimes_{A_3 \otimes T} P'^T P^T(N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{T'} Q'^{T'}((A_3 \otimes T') \otimes_{A_3 \otimes T} M) &= Q^{T'}((A_2 \otimes T') \otimes_{A_2 \otimes T} Q'^T(M)) \\ &= (A_1 \otimes T') \otimes_{A_1 \otimes T} Q^T Q'^T(M) \end{aligned}$$

Enfin, on voit que les morphismes $f^T_{P'P,QQ'}$, $T \in Alg_{\mathbf{C}}$ définis comme dans (2.10) sont naturels au sens de (2.13).

□

Enfin, nous définissons la catégorie $ALG_{\mathbf{C}}$ des monoïdes et correspondances. Les objets de $ALG_{\mathbf{C}}$ sont les monoïdes dans $\mathbf{C}$. Soient A,

$B \in ALG_{\mathbf{C}}$. Notons par $C(A,B)$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $Corr(A,B)$. Posons

$$Hom_{ALG_{\mathbf{C}}}(A,B) := C(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \tag{2.18}$$

Il résulte de (2.18) que la catégorie $ALG_{\mathbf{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Dans la section suivante, nous allons définir la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. La catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ est munie d'un foncteur canonique $F : ALG_{\mathbf{C}} \longrightarrow \widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

3. La catégorie des motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$

Soit $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ une catégorie monoïdale symétrique et abélienne comme dans la section 2. Nous avons supposé que la catégorie $\mathbf{C}$ est petite. Soit A un monoïde dans $\mathbf{C}$. Alors, le nerf cyclique de la catégorie $A - Mod$ est un ensemble cyclique au sens de Connes (voir [1], [2]). Notons par $CN(A - Mod)$ le nerf cyclique de $A - Mod$, $CN_n(A)$ l'ensemble de ses simplexes de dimension n ($\forall\ n \geq 0$). Alors, on a

$$CN_n(A) := \coprod_{\substack{M_0,\dots,M_n \\ \in A-Mod}} Hom_A(M_1, M_0) \times Hom_A(M_2, M_1) \times \dots \times Hom_A(M_0, M_n)$$

On a les morphismes suivants :

$$\begin{array}{c} \delta_i^n(A) : CN_n(A) \longrightarrow CN_{n-1}(A) \\ \delta_i^n(A)(f_0, \dots, f_n) := (f_0, \dots, f_i \circ f_{i+1}, \dots, f_n) \qquad \forall\ 0 \leq i \leq n-1 \\ \delta_n^n(A)(f_0, \dots, f_n) := (f_n \circ f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \end{array} \tag{3.1}$$

entre les ensembles $CN_n(A)$, $n \geq 0$. De plus, on a un opérateur cyclique

$$\begin{array}{c} \delta_i^n(A) : CN_n(A) \longrightarrow CN_{n-1}(A) \\ \tau_n(A)(f_0, f_1, , \dots, f_n) := (-1)^n (f_n, f_0, \dots, f_{n-1}) \quad \forall\ (f_0, \dots, f_n) \in CN_n(A) \end{array}$$

Posons

$$CN_n(A)_{\mathbb{C}} := \mathbb{Z}[CN_n(A)] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \qquad \forall\ n \geq 0 \tag{3.2}$$

où $\mathbb{Z}[CN_n(A)]$ est le groupe abélien libré engendré par les éléments de $CN_n(A)$. Alors, on a les morphismes induits ($\forall\ n \geq 0$)

$$\begin{array}{c} \delta_{i,\mathbb{C}}^n : CN_n(A)_{\mathbb{C}} \longrightarrow CN_{n-1}(A)_{\mathbb{C}} \quad 0 \leq i \leq n \\ \tau_{n,\mathbb{C}} : CN_n(A)_{\mathbb{C}} \longrightarrow CN_n(A)_{\mathbb{C}} \end{array} \tag{3.3}$$

Il résulte de (3.2) que $CN(A)_{\mathbb{C}} := \{CN_n(A)_{\mathbb{C}}\}_{n\geq 0}$ est un module cyclique au sens de Connes (voir [2], [1]). Considérons le bi-complexe $CC(A)$ correspondant à ce module cyclique (comme expliqué dans [9, § 2]) et notons par $Tot(CC(A))$ le complexe total de $CC(A)$. Alors, on a

$$Tot_k(CC(A)) := CN_k(A)_{\mathbb{C}} \oplus CN_{k-1}(A)_{\mathbb{C}} \oplus ... \oplus CN_0(A)_{\mathbb{C}} \ \forall\ k \geq 0 \quad (3.4)$$

Les opérateurs de périodicité sont induits par les projections

$$\begin{array}{c} Tot_k(CC(A)) = CN_k(A)_{\mathbb{C}} \oplus CN_{k-1}(A)_{\mathbb{C}} \oplus ... \oplus CN_0(A)_{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle S_k(A)}\Big\downarrow \\ Tot_{k-2}(CC(A)) = CN_{k-2}(A)_{\mathbb{C}} \oplus CN_{k-3}(A)_{\mathbb{C}} \oplus ... \oplus CN_0(A)_{\mathbb{C}} \end{array} \quad (3.5)$$

L'opérateur différentiel du complexe $Tot(CC(A))$ est donné par ($\forall\ k \in \mathbb{Z}$) :

$$d_k(A) : Tot_k(CC(A)) \longrightarrow Tot_{k-1}(CC(A)) \quad d_k(A) := \sum_{p=0}^{k} d_k^{k-p}(A) \quad (3.6)$$

où les morphismes $d_k^{k-p}(A)$ sont définis comme :

$$d_k^{k-p}(A) := \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \delta_{i,\mathbb{C}}^k(A) & \text{si } p{=}0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-p-1} (-1)^{i+1} \delta_{i,\mathbb{C}}^{k-p}(A) + (1 - \tau_{k-p,\mathbb{C}}(A)) & \text{si } p{\geq}1 \text{ est impair} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-p} (-1)^i \delta_{i,\mathbb{C}}^{k-p}(A) + \sum\limits_{i=0}^{k-p} (\tau_{k-p,\mathbb{C}}(A))^i & \text{si } p{\geq}2 \text{ est pair} \end{cases}$$

Soient A, B deux monoïdes dans $\mathbf{C}$. Rappelons que $Alg_{\mathbf{C}}$ est la catégorie des monoïdes dans $\mathbf{C}$. Si $T \longrightarrow T'$ est un morphisme dans $Alg_{\mathbf{C}}$, il existe des morphismes naturels ($\forall\ n \geq 0$)

$$(A \otimes T') \otimes_{(A\otimes T)} \underline{\quad} : CN_n(A \otimes T)_{\mathbb{C}} \longrightarrow CN_n(A \otimes T')_{\mathbb{C}} \quad (3.7)$$

induits par les foncteurs $(A\otimes T')\otimes_{(A\otimes T)}\underline{\quad} : (A\otimes T)-Mod \longrightarrow (A\otimes T')-Mod$ de changement de base. En combinant avec (3.4), on peut définir les morphismes ($\forall\ k \geq 0$)

$$(A \otimes T') \otimes_{(A\otimes T)} \underline{\quad} : Tot_k(A \otimes T) \longrightarrow Tot_k(A \otimes T') \quad (3.8)$$

Nous adaptons la théorie cyclique bivariante au cas des nerfs cycliques. Pour en savoir plus sur cette théorie, voir [6], [9]. Nous considérons un complexe

$$(Hom_*^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B))), \partial_*) \quad (3.9)$$

tel qu'un élément $F \in Hom_n^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B)))$ est une famille de morphismes linéaires :

$$F = \{F_k^T : Tot_k(CC(A\otimes T)) \longrightarrow Tot_{k+n}(CC(B\otimes T)) | k \in \mathbb{Z}, T \in Alg_{\mathbf{C}}\} \quad (3.10)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Pour chaque morphisme $T \longrightarrow T'$ dans $Alg_{\mathbf{C}}$, on a ($\forall\ k \in \mathbb{Z}$)

$$(B \otimes T') \otimes_{(B\otimes T)} \_\_\_ \circ F_k^T = F_k^{T'} \circ ((A \otimes T') \otimes_{(A\otimes T)} \_\_\_) \quad (3.11)$$

(b) Pour chaque $T \in Alg_{\mathbf{C}}$, les morphismes F_k^T commutent avec les morphismes de périodicité :

$$S_{k+n}(B \otimes T) \circ F_k^T = F_{k-2}^T \circ S_k(A \otimes T) \quad (3.12)$$

Pour chaque élément $F \in Hom_n^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B)))$, l'opérateur différentiel ∂_* du complexe $Hom_*^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B)))$ est donné par ($\forall\ T \in Alg_{\mathbf{C}}$, $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\partial_n(F)_k^T = d_{k+n}(B \otimes T) \circ F_k^T - (-1)^n F_{k-1}^T \circ d_k(A \otimes T) \quad (3.13)$$

Nous posons

$$HC_p(A, B) := H_p(Hom_*^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B)))) \qquad \forall\ p \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

De plus, si B' est un autre monoïde dans $\mathbf{C}$, on a un produit

$$HC_p(A, B) \otimes HC_q(B, B') \longrightarrow HC_{p+q}(A, B') \quad \forall\ p, q \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

donné par la composition des morphismes. Nous sommes prêts à définir une catégorie préliminaire des motifs sur $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$.

Définition 3.1. Soit ($\mathbf{C}$,$\otimes$,1) une catégorie monoïdale symétrique comme plus haut. Les objets de la catégorie $Mot_{\mathbf{C}}$ sont les couples (A, m), où A est un monoïde dans $\mathbf{C}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Étant donnés deux objets (A, m), (B, n) de $Mot_{\mathbf{C}}$, nous posons

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n)) := HC_{m-n}(A, B) \quad (3.16)$$

Si (B', p) est un autre objet de $Mot_{\mathbf{C}}$, il résulte de (3.15) qu'il existe une composition

$$\begin{array}{c} Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n)) \otimes Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B,n),(B',p)) \\ \Big\downarrow{=} \\ HC_{m-n}(A,B) \otimes HC_{n-p}(B,B') \\ \Big\downarrow \\ HC_{m-p}(A,B') = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B',p)) \end{array} \tag{3.17}$$

En appliquant (3.16), nous voyons aussi que ($\forall\ k \geq 0$)

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m+k),(B,n+k)) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n)) \tag{3.18}$$

De plus, étant donné un morphisme $F \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n))$, notons par $F[k]$ le morphisme F considéré comme un élément de $Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m+k),(B,n+k))$.

Proposition 3.2. *Soient A, B, T trois monoïdes dans $(\mathbf{C},\otimes,1)$. Pour tous les entiers m, n, $p \in \mathbb{Z}$, il existe des morphismes naturels*

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n)) \longrightarrow Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A\otimes T,m+p),(B\otimes T,n+p))$$

Démonstration. En combinant (3.14) et (3.16), on a

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n)) = H_{m-n}((Hom^S_*(Tot(CC(A)),Tot(CC(B)))))$$

Considérons un élément $F \in Hom^S_{m-n}(Tot(CC(A)),Tot(CC(B)))$ qui induit une classe dans le groupe d'homologie

$$H_{m-n}((Hom^S_*(Tot(CC(A)),Tot(CC(B))))) = HC_{m-n}(A,B) \tag{3.19}$$

Alors, F est une famille de morphismes

$$\{F_k^{T'} : Tot_k(CC(A\otimes T') \longrightarrow Tot_{k+m-n}(CC(B\otimes T'))|k\in\mathbb{Z}, T'\in Alg_{\mathbf{C}}\} \tag{3.20}$$

comme dans (3.10). En particulier, la sous-famille

$$F[T] := \{F[T]_k^{T''}|k\in\mathbb{Z}, T''\in Alg_{\mathbf{C}}\}$$
$$F[T]_k^{T''} := F_k^{T\otimes T''} : Tot_k(CC(A\otimes T\otimes T'')) \longrightarrow Tot_{k+m-n}(CC(B\otimes T\otimes T''))$$

est un élément de $Hom^S_{m-n}(Tot(CC(A\otimes T)),Tot(CC(B\otimes T)))$. Puisque F induit un élément dans le groupe d'homologie, on a ($\forall\ T' \in Alg_{\mathbf{C}}$, $k\in\mathbb{Z}$)

$$\partial_{m-n}(F)_k^{T'} = d_{k+m-n}(B\otimes T')\circ F_k^{T'} - (-1)^{m-n}F_{k-1}^{T'}\circ d_k(A\otimes T') = 0 \tag{3.21}$$

En particulier, on a ($\forall\ T'' \in Alg_{\mathbf{C}},\ k \in \mathbb{Z}$)

$$\partial_{m-n}(F[T])_k^{T''} = d_{k+m-n}(B \otimes T \otimes T'') \circ F_k^{T\otimes T''} - (-1)^{m-n} F_{k-1}^{T\otimes T''} \circ d_k(A \otimes T \otimes T'') = 0$$

Alors, il existe dans $H_{m-n}((Hom_*^S(Tot(CC(A \otimes T)), Tot(CC(B \otimes T)))))$ une classe induite par $F[T]$. Ainsi, nous avons un morphisme

$$\begin{aligned} Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n)) &\longrightarrow Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A \otimes T, m),(B \otimes T, n)) \\ &= Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A \otimes T, m+p),(B \otimes T, n+p)) \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3. *Soient A, B, T trois monoïdes dans $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. Alors, il existe un foncteur naturel $I : ALG_{\mathbf{C}} \longrightarrow Mot_{\mathbf{C}}$ défini comme*

$$I : ALG_{\mathbf{C}} \longrightarrow Mot_{\mathbf{C}} \qquad I(A) := (A,0) \qquad \forall\ A \in ALG_{\mathbf{C}} \tag{3.22}$$

De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C(A,B) & \longrightarrow & C(A\otimes T, B \otimes T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,0),(B,0)) & \longrightarrow & Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A \otimes T, 0),(B \otimes T, 0)) \end{array} \tag{3.23}$$

Démonstration. Choisissons une correspondance $\{(P^{T'}, Q^{T'}, f_{PQ}^{T'})_{T' \in Alg_{\mathbf{C}}}\}$ de A vers B. Pour chaque $T' \in Alg_{\mathbf{C}}$, le foncteur $P^{T'} : (A \otimes T') - Mod \longrightarrow (B \otimes T') - Mod$ induit un morphisme entre les nerfs cycliques $CN(A \otimes T' - Mod)$ et $CN(B \otimes T' - Mod)$. Donc, le foncteur $P^{T'}$ induit un morphisme entre les modules cycliques $CN(A \otimes T')_{\mathbb{C}}$ et $CN(B \otimes T')_{\mathbb{C}}$. Alors, on obtient les morphismes ($\forall\ k \in \mathbb{Z}$)

$$CN(P)_k^{T'} : Tot_k(CC(A \otimes T')) \longrightarrow Tot_k(CC(B \otimes T')) \tag{3.24}$$

Alors, on a une famille de morphismes :

$$CN(P) := \{CN(P)_k^{T'} | k \in \mathbb{Z}, T' \in Alg_{\mathbf{C}}\} \tag{3.25}$$

Puisque les morphismes $CN(P)_k^{T'}$ sont induits par les foncteurs $P^{T'} : (A \otimes T') - Mod \longrightarrow (B \otimes T') - Mod$, il résulte de la définition 2.6 que les morphismes $\{CN(P)_k^{T'} | k \in \mathbb{Z}, T' \in Alg_{\mathbf{C}}\}$ satisfont les propriétés (3.11) et (3.12). De plus, les morphismes induits $CN(P)_k^{T'}$ commutent avec les différentielles sur les complexes totaux $Tot(CC(A\otimes T'))$ et $Tot(CC(B\otimes T'))$. Alors, on a

$$\partial_0(CN(P))_k^{T'} = d_k(B\otimes T')\circ CN(P)_k^{T'} - CN(P)_{k-1}^{T'}\circ d_k(A\otimes T') = 0 \quad (3.26)$$

Donc, $CN(P)$ est une classe dans le groupe d'homologie

$$H_0(Hom_*^S(Tot(CC(A)), Tot(CC(B)))) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,0),(B,0))$$

Alors, on a un foncteur

$$I : ALG_{\mathbf{C}} \longrightarrow Mot_{\mathbf{C}} \qquad I(A) := (A,0) \qquad \forall\ A \in ALG_{\mathbf{C}}$$

De plus, on sait que les morphismes

$$Corr_n(A,B) \longrightarrow Corr_n(A\otimes T, B\otimes T) \qquad \forall\ n \geq 1 \quad (3.27)$$

dans (2.14) sont définis comme sous-familles de $\{P^{T'} : (A\otimes T')-Mod \longrightarrow (B\otimes T')-Mod | T' \in Alg_{\mathbf{C}}\}$. Dans la démonstration de la proposition 3.2, on voit que les morphismes

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,0),(B,0)) \longrightarrow Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A\otimes T,0),(B\otimes T,0)) \quad (3.28)$$

sont définis d'une manière similaire. Ainsi, le diagramme (3.23) est commutatif.

□

Définition 3.4. Soit A un monoïde dans $(\mathbf{C},\otimes,1)$. Alors, une correspondance $(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ}) = \{(P^T,Q^T,f_{PQ}^T)_{T\in Alg_{\mathbf{C}}}\}$ de rang 1 est dite un projecteur si elle satisfait :

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ})\circ(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ}) = (\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{f}_{PQ}) \quad (3.29)$$

Nous sommes prêts à définir la catégorie des motifs sur $(\mathbf{C},\otimes,1)$.

Définition 3.5. Soit $(\mathbf{C},\otimes,1)$ une catégorie monoïdale symétrique comme plus haut. Les objets de la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ des motifs sur $(\mathbf{C},\otimes,1)$ sont les triplets (A,e,m) tels que :

(a) A est un monoïde dans $(\mathbf{C},\otimes,1)$ et $m\in\mathbb{Z}$.

(b) $e\in Corr_1(A,A)$ est un projecteur.

Soient (A,e,m), (B,f,n) deux objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. Il résulte de (3.18) que

$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(A,m)) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,0),(A,0)) = HC_0(A,A)$$
$$Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B,n),(B,n)) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B,0),(B,0)) = HC_0(B,B)$$

Les morphismes dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}&Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A,e,m),(B,f,n))\\&:= I(f)[n]\circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n))\circ I(e)[m]\end{aligned}\tag{3.30}$$

où $I(e)[m]$ (resp. $I(f)[n]$) est l'élément de $Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(A,m))$ (resp. $Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B,n),(B,n))$) correspondant à $I(e)\in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,0),(A,0))$ (resp. $I(f)\in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B,0),(B,0))$).

Pour chaque monoïde A dans $\mathbf{C}$, le motif de A est défini comme l'objet $(A,id,0)$ de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

Considérons deux objets (A,e,m), (B,f,n) de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. Puisque $I(e)[m]\in HC_0(A,A)$ et $I(f)[m]\in HC_0(B,B)$ sont des idempotents, on a

$$\begin{aligned}&Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A,e,m),(B,f,n))\\&= I(f)[n]\circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A,m),(B,n))\circ I(e)[m]\subseteq HC_{m-n}(A,B)\end{aligned}\tag{3.31}$$

Dans la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, nous définissons les trois motifs suivants :

(1) Le motif trivial : $\mathbf{1}:=(1,id,0)$.

(2) Le motif de Lefschetz : $\mathbb{L}:=(1,id,1)$.

(3) Le motif de Tate : $\mathbb{T}:=(1,id,-1)$.

Proposition 3.6. *Soit T un monoïde dans $\mathbf{C}$. Pour chaque $k\in\mathbb{Z}$, on a un foncteur*

$$\_\otimes(T,id,k):\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}\longrightarrow\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}\quad (A,e,m)\mapsto(A\otimes T,e[T],m+k)\tag{3.32}$$

où $e[T]\in Corr_1(A\otimes T,A\otimes T)$ est l'élément associé à $e\in Corr_1(A,A)$ par le morphisme

$$Corr_1(A,A)\longrightarrow Corr_1(A\otimes T,A\otimes T)\tag{3.33}$$

défini comme dans 2.14.

Démonstration. Soient (A,e,m), (B,f,n) deux objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. Il suffit de montrer qu'on a un morphisme naturel :

$$\begin{array}{c}Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A,e,m),(B,f,n))\\ \big\downarrow\\ Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A\otimes T,e[T],m+k),(B\otimes T,f[T],n+k))\end{array}\tag{3.34}$$

Puisque e, f sont des projecteurs, il résulte de la démonstration de la proposition 2.7 que $e[T]$, $f[T]$ sont des projecteurs. Choisissons un élément

$$I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m] \in Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A, e, m), (B, f, n)) \tag{3.35}$$

où F est la famille des morphismes :

$$F = \{F_l^{T'} : Tot_l(CC(A \otimes T')) \longrightarrow Tot_{l+m-n}(CC(B \otimes T')) | T' \in Alg_{\mathbf{C}}, l \in \mathbb{Z}\}$$

Nous considérons la sous-famille $F[T] = \{F[T]_l^{T''} | T'' \in Alg_{\mathbf{C}}, l \in \mathbb{Z}\}$ de F définie comme suit ($\forall\ T'' \in Alg_{\mathbf{C}}$, $l \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{array}{c} Tot_l(CC(A \otimes T \otimes T'')) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle F[T]_l^{T''} := F_l^{T \otimes T''}} \\ Tot_{l+m-n}(CC(B \otimes T \otimes T'')) = Tot_{l+(m+k)-(n+k)}(CC(B \otimes T \otimes T'')) \end{array}$$

Il résulte de la proposition 3.2 que la sous-famille $F[T]$ est un morphisme dans $Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A \otimes T, m+k), (B \otimes T, n+k))$. Ainsi, on obtient un élément $I(f[T])[n+k] \circ F[T] \circ I(e[T])[m+k] \in Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A \otimes T, e[T], m+k), (B \otimes T, f[T], n+k))$. Alors, on a un morphisme

$$\begin{array}{c} Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A, e, m), (B, f, n)) \\ \Big\downarrow \\ Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A \otimes T, e[T], m+k), (B \otimes T, f[T], n+k)) \end{array} \tag{3.36}$$

De plus, puisque les familles $F[T]$, $I(e[T])$ et $I(f[T])$ sont définies comme sous-familles des F, $I(e)$ et $I(f)$ (respectivement), le morphisme (3.36) est compatible avec les compositions dans la catégorie $\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}$. $\square$

En particulier, le motif de Tate $\mathbb{T} = (1, id, -1)$ définit un foncteur

$$\_ \otimes \mathbb{T} : \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} \longrightarrow \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} \quad (A, e, m) \mapsto (A, e, m) \otimes \mathbb{T} := (A, e, m-1) \tag{3.37}$$

De même, le motif de Lefschetz définit un foncteur

$$\_ \otimes \mathbb{L} : \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} \longrightarrow \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} \quad (A, e, m) \mapsto (A, e, m) \otimes \mathbb{L} := (A, e, m+1) \tag{3.38}$$

Proposition 3.7. *Considérons les foncteurs* $\_ \otimes \mathbb{T} : \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} \longrightarrow \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}, \_ \otimes \mathbb{L} : \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}} :\longrightarrow \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}$ *définis comme plus haut. Alors,* $(\_ \otimes \mathbb{L}, \_ \otimes \mathbb{T})$ *et*

$(\_ \otimes \mathbb{T}, \_ \otimes \mathbb{L})$ *sont des couples des foncteurs adjoints entre* $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ *et* $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

Démonstration. Soient (A, e, m), (B, f, n) deux objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. En appliquant (3.30), on a

$$\begin{aligned}
&Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m) \otimes \mathbb{L}, (B, f, n)) \\
&= Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m + 1), (B, f, n)) \\
&= I(f)[n] \circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m + 1), (B, n)) \circ I(e)[m + 1]
\end{aligned}$$

De plus, il résulte de (3.18) que

$$\begin{gathered}
Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m + 1), (A, m + 1)) = HC_0(A, A) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (A, m)) \\
Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B, n), (B, n)) = HC_0(B, B) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B, n - 1), (B, n - 1)) \\
Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m + 1), (B, n)) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n - 1))
\end{gathered}$$

On voit que le morphisme $I(e)[m+1] \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m + 1), (A, m + 1))$ (resp. $I(f)[n] \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B, n), (B, n)))$ considéré comme un élément de $HC_0(A, A)$ (resp. $HC_0(B, B)$) coïncide avec le morphisme $I(e)[m] \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (A, m))$ (resp. $I(f)[n-1] \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((B, n-1), (B, n-1)))$ Alors, on a

$$\begin{aligned}
&Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m) \otimes \mathbb{L}, (B, f, n)) \\
&= I(f)[n] \circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m + 1), (B, n)) \circ I(e)[m + 1] \\
&= I(f)[n - 1] \circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n - 1)) \circ I(e)[m] \\
&= Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n - 1)) \\
&= Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n) \otimes \mathbb{T})
\end{aligned}$$

De même on peut vérifier que $(\_ \otimes \mathbb{T}, \_ \otimes \mathbb{L})$ est un couple des foncteurs adjoints.

□

Proposition 3.8. *Soit* $Vec_{\mathbb{C}}$ *la catégorie des espaces vectoriels sur* $\mathbb{C}$. *Il existe un foncteur contravariant de réalisation*

$$Réal : \widetilde{Mot}_{\mathbf{C}} \longrightarrow Vec_{\mathbb{C}} \tag{3.39}$$

à valeurs dans $Vec_{\mathbb{C}}$. *Le foncteur Réal est défini comme suit :*

$$Réal(A, e, m) := Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (1, id, 0)) \quad \forall\ (A, e, m) \in \widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$$

où $(1, id, 0)$ *est le motif trivial.*

Démonstration. Il résulte de (3.31) que la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Étant donné un morphisme $I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m] : (A, e, m) \longrightarrow (B, f, n)$ dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$, on a un morphisme induit

$$\begin{array}{c} Réal(B, f, n) = Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((B, f, n), (1, id, 0)) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}(\_,(1,id,0))} \\ Réal(A, e, m) = Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (1, id, 0)) \end{array} \tag{3.40}$$

Il est clair que *Réal* est compatible avec les compositions dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

□

Soient (A, e, m), (B, f, n) deux objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. Alors, pour chaque monoïde $T' \in Alg_{\mathbf{C}}$, les opérateurs de périodicité sont induits par les projections (comme expliqué dans (3.5)) ($\forall\ k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{array}{c} Tot_k(CC(A \otimes T')) = CN_k(A \otimes T')_{\mathbf{C}} \oplus ... \oplus CN_0(A \otimes T')_{\mathbf{C}} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle S_k(A \otimes T')} \\ Tot_{k-2}(CC(A \otimes T')) = CN_{k-2}(A \otimes T')_{\mathbf{C}} \oplus ... \oplus CN_0(A \otimes T')_{\mathbf{C}} \end{array} \tag{3.41}$$

Ainsi, la famille de foncteurs

$$S(A) := \{S_k(A \otimes T') | k \in \mathbb{Z}, T' \in Alg_{\mathbf{C}}\} \tag{3.42}$$

est un élément $S(A) \in HC_{-2}(A, A) = Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m-2), (A, m))$. Nous avons déjà dit que

$$Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n)) \subseteq HC_{m-n}(A, B) \tag{3.43}$$

Alors, l'élément $S(A) \in HC_{-2}(A, A)$ définit un morphisme

$$\begin{array}{rr} S_{m,n}(A, B) : Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n)) \hookrightarrow & HC_{m-n}(A, B) \\ & \Big\downarrow {\scriptstyle \_\circ S(A)} \\ & HC_{m-n-2}(A, B) \end{array} \tag{3.44}$$

Nous allons montrer que l'image du morphisme $S_{m,n}(A, B)$ est contenue dans $Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m-2), (B, f, n)) \subseteq HC_{m-n-2}(A, B)$.

Proposition 3.9. *Soient* (A, e, m), (B, f, n) *deux objets de* $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$. *Alors, l'image du morphisme* $S_m(A,B)$ *est contenue dans* $Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m–2), (B, f, n)) \subseteq HC_{m-n-2}(A, B)$.
Autrement dit, on peut restreindre $S_{m,n}(A, B)$ *à un morphisme :*

$$\begin{array}{c} Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n)) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle S_{m,n}(A,B)} \\ Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m) \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2}, (B, f, n)) \subseteq HC_{m-n-2}(A, B) \end{array} \tag{3.45}$$

où $\mathbb{T}$ *est le motif de Tate et* $(A, e, m) \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} := (A, e, m) \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbb{T} = (A, e, m - 2)$ *au sens de* (3.37).

Démonstration. On sait que

$$Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n)) = I(f)[n] \circ Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n)) \circ I(e)[m]$$

Soit $I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m] \in Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A, e, m), (B, f, n))$ un morphisme, où $F \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m), (B, n))$ est une famille de morphismes :

$$F = \{F_k^{T'} : Tot_k(CC(A \otimes T')) \to Tot_{k+m-n}(CC(B \otimes T')) | k \in \mathbb{Z}, T' \in Alg_{\mathbf{C}}\}$$

Ainsi, l'image $S_{m,n}(A, B)(I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m]) \in HC_{m-n-2}(A, B)$ est donnée par la famille de morphismes ($\forall\ T' \in Alg_{\mathbf{C}}$, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{c} Tot_k(CC(A \otimes T')) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m])_{k-2}^{T'} \circ S_k(A \otimes T')} \\ Tot_{k+m-n-2}(CC(B \otimes T')) \end{array} \tag{3.46}$$

Puisque $I(e) \in HC_0(A, A)$, en utilisant la propriété (3.12), on a

$$(I(e))_{k-2}^{T'} \circ S_k(A \otimes T') = S_k(A \otimes T') \circ (I(e))_k^{T'} \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}, T' \in Alg_{\mathbf{C}} \tag{3.47}$$

Alors, on voit que

$$\begin{aligned} &(S_{m,n}(A, B)(I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m]))_k^{T'} \\ &= (I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m])_{k-2}^{T'} \circ S_k(A \otimes T') \\ &= (I(f))_{k-2+m-n}^{T'} \circ F_{k-2}^{T'} \circ (I(e))_{k-2}^{T'} \circ S_k(A \otimes T') \\ &= (I(f))_{k-2+m-n}^{T'} \circ F_{k-2}^{T'} \circ S_k(A \otimes T') \circ (I(e))_k^{T'} \\ &= (I(f)[n] \circ (F \circ S(A)) \circ I(e)[m-2])_k^{T'} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Puisque $F \circ S(A) \in Hom_{Mot_{\mathbf{C}}}((A, m-2),(B,n))$, on a $(I(f)[n] \circ (F \circ S(A)) \circ I(e)[m-2]) \in Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A,e,m-2),(B,f,n))$. Alors, la composition avec les morphismes $S_k(A \otimes T')$ de périodicité induit un morphisme naturel

$$\begin{aligned} S_{m,n}(A,B) : Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A,e,m),(B,f,n)) &\to Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A,e,m-2),(B,f,n)) \\ I(f)[n] \circ F \circ I(e)[m] &\mapsto I(f)[n] \circ F \circ S(A) \circ I(e)[m-2] \end{aligned}$$

□

En combinant la proposition 3.9 avec le lemme de Yoneda, pour chaque $m \geq 0$ et pour chaque objet (A,e,m) de $\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}$, on a un morphisme naturel

$$S_m(A) : (A,e,m) \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} = (A,e,m-2) \longrightarrow (A,e,m) \tag{3.49}$$

dans $\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}$. Plus généralement, les opérateurs de périodicité définissent la tour suivante :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Big\downarrow{\scriptstyle S_{m-2}(A)} \\ (A,e,m) \otimes \mathbb{T}^{\otimes 2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle S_m(A)} \\ (A,e,m) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle S_{m+2}(A)} \\ (A,e,m) \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle S_{m+4}(R)} \\ \vdots \end{array} \tag{3.50}$$

Nous considérons le foncteur covariant correspondant au système (3.50). Plus précisément, pour $(B,f,n) \in \widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}$, posons

$$\begin{aligned} &H((A,e,m),(B,f,n)) \\ &:= \underset{i \in \mathbb{Z}}{colim}(Hom_{\widetilde{Mot_{\mathbf{C}}}}((A,e,m+2i),(B,f,n)), S_{m+2i,n}(A,B)) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Il résulte de (3.51) que

$$H((A,e,m+2k),(B,f,n)) = H((A,e,m),(B,f,n)) \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z} \tag{3.52}$$

De plus, puisque $Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A,e,m),(B,f,n+2l)) = Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}}((A,e,m-2l),(B,f,n))$ pour tous les entiers $l \in \mathbb{Z}$, on voit que

$$H((A,e,m),(B,f,n+2l)) = H((A,e,m),(B,f,n)) \qquad \forall\, l \in \mathbb{Z} \tag{3.53}$$

Enfin, les résultats précédents motivent l'introduction de la catégorie $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}^{\text{pér}}$ des motifs périodiques sur $(\mathbf{C},\otimes,1)$. Les objets de $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}^{\text{pér}}$ sont les triplets (A,e,ϵ) tels que :

(a) A est un monoïde dans $(\mathbf{C},\otimes,1)$ et $\epsilon \in \{0,1\}$.

(b) $e \in Corr_1(A,A)$ est un projecteur.

Les morphismes dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}^{\text{pér}}$ sont définis comme :

$$Hom_{\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}^{\text{pér}}}((A,e,\epsilon),(A',e',\epsilon')) := H((A,e,\epsilon),(A',e',\epsilon')) \tag{3.54}$$

La composition des morphismes dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}^{\text{pér}}$ est induite par la composition des morphismes dans $\widetilde{Mot}_{\mathbf{C}}$.

Références

[1] A. Connes – « Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.* **296(23)** (1983), p. 953–958.

[2] ———, *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

[3] A. Connes, C. Consani & M. Marcolli – « Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives », *Adv. Math.* **214(2)** (2007), p. 761–831.

[4] P. Deligne – « Catégories tannakiennes », in *The Grothendieck Festschrift Vol II, Progr. Math. Vol. 87*, Birkhäuser, Boston, 1990, p. 111–195.

[5] M. Hakim – *Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 64*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.

[6] J. D. S. Jones & C. Kassel – « Bivariant cyclic theory », *K-Theory* **3(4)** (1989), p. 339–365.

[7] A. Joyal & R. Street – « Braided tensor categories », *Adv. Math.* **102(1)** (1993), p. 20–78.

[8] H. LENSTRA – « Galois theory for schemes », Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam, 1985.

[9] J. L. LODAY – *Cyclic homology, Appendix E by Maria O. Ronco*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[10] C. MAZZA, V. VOEVODSKY & C. WEIBEL – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, 2. American Mathematical Society, Providence, RI, Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[11] B. TOEN & M. VAQUIÉ – « Au-dessous de Spec(Z) », *J. K-Theory* **3(3)** (2009), p. 437–500.

ABHISHEK BANERJEE
Collège de France
3 Rue d'Ulm
75231 Paris CEDEX 05
FRANCE
abhishekbanerjee1313@gmail.com