

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

LYLIANE IRÈNE RAJAONARISON & TOUSSAINT JOSEPH
RABEHERIMANANA

**Nouveaux résultats sur les petites perturbations
d'équations d'évolutions aléatoires**

Volume 19, n° 1 (2012), p. 271-296.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2012__19_1_271_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Nouveaux résultats sur les petites perturbations d'équations d'évolutions aléatoires

LYLIANE IRÈNE RAJAONARISON
TOUSSAINT JOSEPH RABEHERIMANANA

Résumé

Dans cet article, nous étudions les résultats de grandes déviations associés au couple $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$, solution de l'E.D.S. interprétée au sens d'Itô :

$$dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dW_t + b_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dt; \quad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d$$

avec des conditions assez générales sur les coefficients et dans les deux cas suivants :
Premier cas : ν^ε est indépendant du mouvement brownien W et satisfait à un principe de grandes déviations ;

Deuxième cas : ν^ε est un processus markovien avec un nombre fini d'états $\{1, \dots, n\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}\{\nu^\varepsilon(t + \Delta) = j / \nu^\varepsilon(t) = i, X^\varepsilon(t) = x\} = d_{ij}(x)\Delta + o(\Delta)$$

uniformément dans \mathbb{R}^d pourvu que $\Delta \downarrow 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Ces résultats sont des extensions de ceux de Bezuidenhout [2] et d'Eizenberg & Freidlin [7] au cas où σ est quelconque.

Small random perturbations of random evolution equations

Abstract

In this paper, we study a large deviations principle associated to the couple $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$, solution of Itô integral:

$$dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dW_t + b_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dt; \quad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d$$

under general conditions on the coefficients, in the two following cases:

First case: ν^ε is independant of the brownian motion W and obeys a large deviations principle;

Second case: ν^ε is a markovian process with finite states $\{1, \dots, n\}$ such that $\mathbb{P}\{\nu^\varepsilon(t + \Delta) = j / \nu^\varepsilon(t) = i, X^\varepsilon(t) = x\} = d_{ij}(x)\Delta + o(\Delta)$ uniformly in \mathbb{R}^d , provided $\Delta \downarrow 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Our results extend those of Bezuidenhout [2] and Eizenberg & Freidlin [7], to general σ .

Mots-clés: Principe de grandes déviations, équations d'évolutions aléatoires, systèmes d'E.D.P., goulots de sortie.

Classification math. : 60F17, 60F10.

1. Introduction et notations

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier la vitesse de convergence du processus X^ε , solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) interprétée au sens d'Itô :

$$dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dW_t + b_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dt; \quad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d \quad (1.1)$$

vers le processus aléatoire X^0 , solution de (1.2)

$$dX_t^0 = b_{\nu^0(t)}(X_t^0) dt; \quad X_0^0 = x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.2)$$

Nous étudions le principe de grandes déviations (PGD) avec des conditions assez générales sur les coefficients, dans les deux cas suivants :

Premier cas :

$$(\nu_t^\varepsilon)_{t \in [0,1]} \text{ indépendant du mouvement brownien } W = (W_t)_{t \in [0,1]} \\ \text{et satisfait à un principe de grandes déviations;} \quad (1.3)$$

Deuxième cas :

ν^ε est un processus markovien avec un nombre fini d'états $\{1, \dots, n\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}\{\nu^\varepsilon(t + \Delta) = j / \nu^\varepsilon(t) = i, X^\varepsilon(t) = x\} = d_{ij}(x) \Delta + o(\Delta) \\ \text{uniformément dans } \mathbb{R}^d \text{ pourvu que } \Delta \downarrow 0, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j. \quad (1.4)$$

Signalons le fait que d'une part, Bezuidenhout [2] avait étudié le PGD associé à (1.1) sous la condition (1.3) dans le cas où σ est identité et d'autre part, Eizenberg & Freidlin [7] considéraient le même problème sous la condition (1.4) dans le cas où σ est l'identité et avaient montré que le problème est fortement lié au comportement asymptotique d'un certain système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Plus précisément, considérons le problème de Dirichlet pour le système d'E.D.P.

$$\begin{cases} L_k^\varepsilon u_k^\varepsilon(x) + \sum_{j=1}^n d_{kj}(x) (u_j^\varepsilon(x) - u_k^\varepsilon(x)) = 0, x \in D \subset \mathbb{R}^d \\ u_k^\varepsilon / \partial D = \Psi_k, u_k^\varepsilon \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D}), k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.5)$$

où D est un domaine connexe borné avec un bord ∂D de classe \mathcal{C}^2 , voir [7], [5] et [6].

Les opérateurs L_k^ε sont donnés par

$$L_k^\varepsilon u = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^d a_k^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^d b_k^j(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \quad (1.6)$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^2(D)$, $\Psi \in \mathcal{C}(\partial D)$; pour chaque $k = 1, \dots, n$, l'application

$$a_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \text{ est de classe } \mathcal{C}_b^2; \quad (1.7)$$

$$b_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ est de classe } \mathcal{C}_b^1; \quad (1.8)$$

$$d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \text{ est de classe } \mathcal{C}_b^1 \quad (1.9)$$

avec $d_{kj}(x) > 0$ pour tous $k, j \in \{1, \dots, n\}$.

Suivant les idées d'Eizenberg & Freidlin [7], $\{u_1^\varepsilon(x), \dots, u_n^\varepsilon(x)\}$, solution de (1.5), est représentée par :

$$u_k^\varepsilon(x) = \mathbb{E}_{x,k} \left(\Psi_{\nu^\varepsilon(\tau^\varepsilon)} (X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon) \right), \quad (1.10)$$

$$\text{où } \tau^\varepsilon = \inf\{t, X^\varepsilon(t) \in \partial D\} \quad (1.11)$$

le couple $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ est tel que la première composante est solution de (1.1) avec $\sigma_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ est de classe \mathcal{C}_b^2 et $b_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}_b^1 ,

$$\sigma_k(x) \sigma_k^*(x) = a_k(x), \quad (1.12)$$

$$b_k(x) = (b_k^1(x), \dots, b_k^d(x)) \quad (1.13)$$

et la deuxième composante vérifie (1.4).

Le but de cet article est d'étendre dans le cas $\sigma_y(x)$ quelconque les résultats de [2], [7] cas où la matrice $\sigma_y(x)$ est égale à l'identité et [8], cas où la matrice $\sigma_y(x)$ est indépendante de y . Signalons qu'il existe d'autres traitements de (1.1), cf Hu [17], Mellouk [9] et nous mêmes ([13],[14]).

Dans tout cet article, nous supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :

H. 1.

- L'application $b: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui à (y, x) associe $b_y(x)$ est lipschitzienne et bornée i.e. il existe une constante C telle que

$$|b_y(x) - b_{y'}(x')| \leq C(|y - y'| + |x - x'|); |b_y(x)| \leq C,$$

pour tout $(x, x', y, y') \in (\mathbb{R}^d)^2 \times (\mathbb{R}^l)^2$.

- De même, l'application $\sigma: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ qui à (y, x) associe $\sigma_y(x)$ est lipschitzienne et bornée.

– W est un $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ -mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^r vérifiant les conditions habituelles.

Dans tout cet article, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ désignera l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^d , muni de la norme uniforme $\|f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. De même, nous notons $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ le même espace constitué des fonctions issues de x en $t = 0$.

Nous notons $\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace de Cameron-Martin sur \mathbb{R}^d

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \begin{array}{l} f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d, f \text{ absolument continue} \\ \text{telle que } f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds < +\infty \end{array} \right\}.$$

$\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)$ est un espace d'Hilbert muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}(\mathbb{R}^d)} = \int_0^1 \dot{f}_s \cdot \dot{g}_s ds.$$

Cet article comporte trois sections.

Dans la section 2, sous l'hypothèse **H.1**, nous énonçons d'une part, dans le théorème 2.1, le PGD relatif à X^ε , solution de (1.1) lorsque ν^ε satisfait (1.3), et d'autre part, dans le théorème 2.7, le PGD relatif à X^ε lorsque ν^ε satisfait (1.4) et dans le théorème 2.11, le comportement asymptotique du couple $(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, \nu_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)$ où τ^ε est le temps de sortie de X^ε hors du domaine D . La section 3 est consacrée à la preuve théorème 2.1 et la section 4 aux preuves des théorème 2.7 théorème 2.11.

Remerciements. Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance au referee pour ses précieuses remarques.

2. Principaux résultats

2.1. PGD pour X^ε lorsque ν^ε satisfait à un PGD

Nous introduisons l'hypothèse suivante

H. 2. ν^ε est un processus indépendant du brownien $\sqrt{\varepsilon}W$ à valeurs dans \mathbb{R}^l satisfaisant un PGD avec une bonne fonctionnelle d'action I .

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses **H.1** et **H.2**, notons \mathbb{P}^ε la loi de X^ε , solution de (1.1) considérée comme une v.a. à valeurs dans $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$. Alors*

\mathbb{P}^ε satisfait à un PGD avec la fonctionnelle d'action λ définie par

$$\lambda(g) = \inf_{(\phi, f)} \{S(f) + I(\phi) / g = F_x, \phi(f)\}, \quad (\inf \{\emptyset\} = +\infty) \quad (2.1)$$

où F est définie par

$$g = F_{x, \phi}(f) \iff dg_t = [\sigma_{\phi(t)}(g_t) \dot{f}_t + b_{\phi(t)}(g_t)] dt; \quad g(0) = x,$$

I est donnée dans **H.2**, et

$$S(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|f\|_{\mathbb{H}(\mathbb{R}^r)}^2, & \text{si } f \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^r) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Remarque 2.2. Signalons le fait que notre situation contient le cas où

$$\nu^\varepsilon(t) = \varepsilon \sum_{i=1}^{[t/\varepsilon]} X_i; \quad t \in [0, 1]$$

avec X_i une suite de variables indépendantes, (cf. Mogulskii [10] et Dembo & Zeitouni [3]). Signalons aussi le fait que si $\nu^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \widetilde{W}$ où \widetilde{W}_t est un mouvement brownien indépendant de W , le résultat est trivial. En effet, ceci résulte tout simplement de la théorie de Wentzell & Freidllin [16] et du principe classique des contractions, [3].

2.2. Petites perturbations des équations d'évolutions aléatoires

2.2.1. Énoncé du résultat du PGD de X^ε

Dans toute la suite, nous supposons vérifiée l'hypothèse **H.1**. Nous étendons au cas où σ_k est quelconque, les résultats de Freidllin & Eizemberg [7]. A cet effet, nous faisons un changement de probabilités comme dans [7] et étudions les résultats de grandes déviations associés au processus (Z^ε, ν) où $\nu(t)$ est un processus de Markov discret à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ avec les probabilités de transition :

$$\mathbb{P} \{ \nu(t + \Delta) = k / \nu(t) = i \} = \Delta + o(\Delta), \quad (2.3)$$

$\Delta \searrow_0 \forall i \neq k$ et $i, k \in \{1, \dots, n\}$ et le processus Z^ε est solution de

$$dZ_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{\nu(t)}(Z_t^\varepsilon) dW_t + b_{\nu(t)}(Z_t^\varepsilon) dt; \quad Z_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.4)$$

Notre méthode est basée sur les idées d’Azencott [1] voir aussi [4] et [11] en étudiant la propriété de quasi-continuité de l’application

$$F: \mathbb{H}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$$

définie par $\varphi = F_x(g, f)$ si et seulement si φ_t est solution de

$$d\varphi_t = \left[\sigma_{f(t)}(\varphi_t) \dot{g}_t + b_{f(t)}(\varphi_t) \right] dt; \varphi(0) = x, \tag{2.5}$$

où \mathcal{F} désigne l’espace des fonctions continues à droite

$$\nu: [0, 1] \rightarrow \{1, \dots, n\}, \text{ telle que } \nu(0) = 1,$$

avec la métrique définie par la L^1 -topologie (ou la topologie de Skorohod) notée $\rho_{\mathcal{F}}$ ou de la norme $|\cdot|_{\mathcal{F}}$.

Considérons les processus définis par (2.4) et (1.1) et ν^ε vérifiant (1.4). Il est connu (Eizenberg & Freidlin [7]) que la mesure μ_1^ε loi de $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ définie par (1.1) et (1.4) est absolument continue par rapport à μ_2^ε , loi de (Z^ε, ν) solution de (2.4) et la densité est donnée par

$$\begin{aligned} p_1^\varepsilon(Z^\varepsilon(\cdot), \nu(\cdot)) &= \frac{d\mu_1^\varepsilon}{d\mu_2^\varepsilon}(Z^\varepsilon(\cdot), \nu(\cdot)) \\ &= \prod_{i=0}^{n(1)-1} d_{\nu(\eta_i), \nu(\eta_{i+1})}(Z^\varepsilon(\eta_{i+1})) \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{i=0}^{n(1)} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1} \wedge 1} d_{\nu(\eta_i)}(Z^\varepsilon(s) - n + 1) ds\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$d_k(x) = \sum_{i=1, i \neq k}^n d_{ki}(x) \tag{2.7}$$

et η_i est une suite de temps d’arrêt définie par :

$$\eta_0 = 0; \eta_{i+1} = \inf\{s > \eta_i : \nu(s) \neq \nu(\eta_i)\} \tag{2.8}$$

$$n(1) = \max\{i/\eta_i \leq 1\}. \tag{2.9}$$

Si $n(1) = 0$, alors

$$p_1^\varepsilon(Z^\varepsilon(\cdot), \nu(\cdot)) = \exp\left(-\int_0^1 d_{\nu(0)}(Z^\varepsilon(s) - n + 1) ds\right). \tag{2.10}$$

De la même manière qu'Eizenberg & Freidlin [7], nous déduisons des résultats de grandes déviations de (Z^ε, ν) ceux de $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ en utilisant (2.6) à (2.10).

Pour chaque $\varphi \in C_x(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{F}$, nous définissons $S_f(\varphi)$ par

$$S_f(\varphi) = \inf\{S(\psi), \text{ lorsque } F_x(\psi, f) = \varphi\}, \quad (2.11)$$

où S est définie dans (2.2) et F_x dans (2.5).

Considérons σ une matrice $d \times r$ et Q la forme quadratique sur \mathbb{R}^d définie par $Q(v) = \langle v, \sigma\sigma^*v \rangle$; on définit la forme quadratique conjuguée Q^* par

$$\begin{aligned} Q^*(v) &= \inf\{|w|^2; w \text{ tel que } \sigma v = w\} \\ &\iff Q^*(v) = \sup\{2\langle t, v \rangle - Q(t); t \in \mathbb{R}^d\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Remarquons que $Q^*(v) \geq \frac{|v|^2}{\|\sigma\|^2}$, que si $\sigma\sigma^*$ est inversible alors $Q^*(v) = \langle v, (\sigma\sigma^*)^{-1}v \rangle$ et que si σ est $d \times d$ inversible,

$$Q^*(v) = |\sigma^{-1}(v)|^2. \quad (2.13)$$

Pour chaque $f \in \mathcal{F}$, prenons $\sigma = \sigma_f(x)$, nous obtenons alors

$$Q_{x,f}(v) = |\sigma_f(x).v|^2 \quad (2.14)$$

et on note $Q_{x,f}^*(v)$ la forme quadratique conjuguée qui, vu (2.12) est s.c.i. en (x, v) et convexe en v . Notons que $Q_{x,f}^*(v) \geq \frac{|v|^2}{C}$. Si l'on pose

$$\Theta_f(x, v) = Q_{x,f}^*(v - b_f(x)), \quad (2.15)$$

$\Theta_f(x, v)$ a la même propriété, et de plus :

$$\Theta_f(x, v) \geq \frac{1}{2C^2}|v|^2 - 1. \quad (2.16)$$

Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$, nous avons alors

$$S_f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \Theta_{f(t)}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) dt & \text{si } \varphi \in \mathbb{H}_x(\mathbb{R}^d) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Par (2.16), $S_f(\varphi) \leq a \implies \int_0^1 |\dot{\varphi}_t|^2 dt \leq (2+4a)C^2$ d'où l'on peut déduire que $\{S_f \leq a\}$ est un compact de $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.3. *La fonctionnelle S_f définie dans (2.17) est s.c.i. sur $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ et les ensembles de niveaux sont compacts. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $S_f(\varphi) \leq +\infty$ l'inf est atteint. Enfin,*

$$F_x \{ \{S \leq a\} \times \{f\} \} = \{S_f \leq a\}.$$

Remarque 2.4. Si σ_f est- $d \times d$ inversible,

$$S_f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) \cdot (\dot{\varphi}_t - b_{f(t)}(\varphi_t))|^2 dt & \text{si } \varphi \in \mathbb{H}_x(\mathbb{R}^d) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Fixons $f \in \mathcal{F}$. Notons $\mathbf{T}^\varepsilon(f, d\nu)$ la loi de $Z^{\varepsilon, f} = (Z_t^{\varepsilon, f})_{t \in [0, 1]}$, solution de

$$dZ_t^{\varepsilon, f} = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{f(t)}(Z_t^{\varepsilon, f}) dW_t + b_{f(t)}(Z_t^{\varepsilon, f}) dt; \quad Z_0^{\varepsilon, f} = x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.19)$$

Alors $\mathbf{T}^\varepsilon(\cdot, d\nu)$ est une version particulière de la loi conditionnelle de Z^ε sachant ν . Nous obtenons alors

Théorème 2.5. *Sous l'hypothèse H.1, la famille $\mathbf{T}^\varepsilon(f, \cdot)$ comme une v.a. à valeurs dans $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ satisfait à un PGD de fonctionnelle d'action S_f .*

Preuve. On déduit ce théorème du théorème 4.1. □

Nous introduisons l'hypothèse générale suivante, que nous allons vérifier dans la démonstration voir la section 4.

H. 3. Supposons qu'il existe une suite de boréliens (\mathcal{F}_k)

$$\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}, \quad k \geq 1 \text{ telle que } \forall k, \alpha > 0, f_0 \in \mathcal{F}_k \quad (2.20)$$

$$m\{f' \in \mathcal{F}_k; |f' - f_0|_{\mathcal{F}} < \alpha\} \geq \delta(k, \alpha) > 0,$$

où $\delta(k, \alpha)$ est indépendant de f_0 . De plus, pour tous $\delta, s > 0$, il existe $k = k(\delta, s)$ tel que pour tous $f \in \mathcal{F}_k$, $\varphi \in \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad S_{\tilde{f}}(\tilde{\varphi}) \leq S_f(\varphi) + \delta. \quad (2.21)$$

Posons $\tilde{S}(\varphi) = \inf_{f \in \mathcal{F}} S_f(\varphi)$. La fonction \tilde{S} n'est pas nécessairement semi-continue (voir Bezuidenhout [2]). Considérons la variante s.c.i. S^* définie par

$$S^*(\varphi) = \lim_{\varphi' \rightarrow \varphi} \inf \tilde{S}(\varphi') \wedge \tilde{S}(\varphi).$$

Posons $\Phi^*(s) = \{\varphi : S^*(\varphi) \leq s\}$ et $\Phi_x^*(s) = \Phi^*(s) \cap \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.6. *Sous l'hypothèse H.1, on a*

a) $\forall s, \gamma, \delta > 0, \exists \varepsilon_0(s, \gamma, \delta) \geq 0$ et $M = M(s, \gamma, \delta) > 0$

$$\mathbb{P}(Z_x^\varepsilon \in B_\delta(\varphi) \text{ et } f \in \mathcal{F}_M) \geq \exp\left(-\frac{S^*(\varphi) + \gamma}{\varepsilon}\right), \quad (2.22)$$

pourvu que $\varphi \in \Phi_x^*(s), x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

b) Soit C un fermé de $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \gamma > 0, \exists \varepsilon'_0 \geq 0$ tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon'_0$

$$\mathbb{P}(Z_x^\varepsilon \in C) \leq \exp\left(-\frac{S^*(C) - \gamma}{\varepsilon}\right) \text{ et } S^*(C) = \inf_{\varphi \in C} \{S^*(\varphi)\}. \quad (2.23)$$

De la même façon qu'Eizenberg & Freidlin [7], choisissons

$$\mathcal{F}_k = \{v(\cdot) \in \mathcal{F}; n(1, v(\cdot)) \leq k\}$$

où $n(1, v(\cdot))$ est défini dans (2.8) et (2.9). Comme nous l'avons mentionné, les formules (2.6) à (2.10) et le théorème 2.6 impliquent les résultats de grandes déviations associés au processus $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$. Plus précisément, on a

Théorème 2.7. On note $\mathbb{P}_{x,i}$ pour \mathbb{P} quand $X^\varepsilon(0) = x$ et $\nu^\varepsilon(0) = i$. Sous l'hypothèse **H.1**, on a

a) L'ensemble $\Phi_x^*(s) = \{S^* \leq s\} \cap \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$ est compact $\forall s > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

b) $\forall s, \gamma, \delta > 0, \exists \varepsilon_1(s, \gamma, \delta) \geq 0$ et $M = M(s, \gamma, \delta) > 0$

$$\mathbb{P}_{x,i}(X^\varepsilon \in B_\delta(\varphi) \text{ et } \tilde{n}(1) \leq M(s, \gamma, \delta)) \geq \exp\left(-\frac{S^*(\varphi) + \gamma}{\varepsilon}\right) \quad (2.24)$$

pourvu que $\varphi \in \Phi_x^*(s), x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

c) Soit C un fermé de $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \gamma > 0, \exists \varepsilon_1 \geq 0$ tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\mathbb{P}_{x,i}(X^\varepsilon \in C) \leq \exp\left(-\frac{S^*(C) - \gamma}{\varepsilon}\right) \text{ et } S^*(C) = \inf\{S^*(\varphi), \varphi \in C\}. \quad (2.25)$$

Remarque 2.8. Le fait que ces estimations sont uniformes par rapport à $i \in \{1, \dots, n\}$ est trivial (cf. Wentzell & Freidlin [16]).

Remarque 2.9. Les résultats du théorème 2.6 restent valables si l'on considère le processus $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \in [0,1]}$, solution de

$$dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \sigma_{\nu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dW_t + b_{\mu^\varepsilon(t)}(X_t^\varepsilon) dt; X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d,$$

En effet, on pose $v^\varepsilon(t) = (\nu^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t))$. Donc $X^\varepsilon = F(\sqrt{\varepsilon} W, v^\varepsilon)$ avec F mesurable. On suppose que $\text{supp } v^\varepsilon$ est compact. Alors les théorèmes 4.1 et 4.2 sont valables qui impliqueront à leur tour les résultats de grandes déviations.

Remarque 2.10. Les résultats du théorème 2.6 sont encore valables si b est à croissance linéaire en x i.e. il existe une constante C telle que

$$|b_y(x)| \leq C(1 + |x|).$$

A cet effet, on pourra modifier une variante de la méthode d’Azencott, cf. Stroock [15] page 86 par exemple.

2.3. Goulot de sortie

Maintenant, nous allons donner le comportement asymptotique de

$$\{u_1^\varepsilon(x), \dots, u_n^\varepsilon(x)\},$$

solution de (1.5) lorsque ε tend vers 0. Ici, τ^0 désigne le temps de sortie de X^0 , solution de (1.2) hors de D . Pour chaque $x, y \in D$, définissons

$$V(x, y) = \inf_{\varphi} S^*(\varphi) \tag{2.26}$$

où l’infimum est pris sur tous les $\varphi \in \mathcal{C}_x([0, 1], \mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

H. 4. I) $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, les matrices $a_k(x) = \sigma_k^*(x)\sigma_k(x)$ sont inversibles en tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

II) Il existe un compact $\mathcal{X}_0 \subset D$ contenant tous les point-limite des systèmes dynamiques

$$\frac{dS_i^t x}{dt} = b_i(S_i^t x); S_i^0 x = x, i \in \{1, \dots, n\}, \tag{2.27}$$

tel que

$$V(x, y) = V(y, x) = 0, \forall x, y \in \mathcal{X}_0. \tag{2.28}$$

III) $\langle n(x), b(x) \rangle < 0$ pour $x \in \partial D, i \in \{1, \dots, n\}$, où $n(x)$ est la normale extérieure en $x \in \partial D$.

IV) Il existe $x_0 \in \partial D$ tel que $V(\mathcal{X}_0, x_0) < V(\mathcal{X}_0, x), \forall x \in \partial D$, où $V(\mathcal{X}_0, y) = V(z, y), \forall z \in \mathcal{X}_0$.

H. 5. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$g_{i_0}(x_0) < g_i(x) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}; i \neq i_0, \tag{2.29}$$

où x_0 est défini dans **H.4 IV**) et $g_i(x) = -\langle n(x), b_i(x) \rangle > 0$ pour $x \in \partial D, i \in \{1, \dots, n\}$.

Théorème 2.11.

i) Sous l'hypothèse **H.4**, on a pour tous $\delta > 0, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{x,k} (|X^\varepsilon(\tau^\varepsilon) - x_0| > \delta) = 0 \quad (2.30)$$

uniformément sur tous les compacts $\mathcal{X} \subset D$.

ii) Si en plus l'hypothèse **H.5** est satisfaite, alors on a pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{x,k} (\nu^\varepsilon(\tau^\varepsilon) = i_0) = 1 \quad (2.31)$$

uniformément sur tous les compacts $\mathcal{X} \subset D$.

Nous avons aussi le résultat suivant

Corollaire 2.12. *Sous l'hypothèse **H.4** et l'hypothèse **H.5**, on a pour $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_k^\varepsilon = \psi_{i_0}(x_0) \quad (2.41)$$

uniformément sur tous les compacts $\mathcal{X} \subset D$.

3. Preuve du Théorème 2.1

Pour chaque $z \in \mathbb{R}^d$, $\nu \in \text{Supp } \nu^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}$, muni d'une distance $\rho_{\mathcal{F}}$ ou d'une norme $|\cdot|_{\mathcal{F}}$ et $f \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^r)$, définissons une application

$$g = F_{z,\nu}(f) \iff dg_t = \left[\sigma_{\nu(t)}(g_t) \dot{f}_t + b_{\nu(t)}(g_t) \right] dt; \quad g(0) = z. \quad (3.1)$$

Posons

$$X^\varepsilon = F_{\nu^\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} W) \text{ et } X_{\nu^\varepsilon}^{\varepsilon,f} = F_{\nu^\varepsilon}(f). \quad (3.2)$$

Le théorème 2.1 va résulter du théorème 3.1

Théorème 3.1. $\forall A, R, \rho > 0, \exists \varepsilon_0 \geq 0, \alpha, r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds \leq A, |z - x| < r$, on a

$$\varepsilon \log \mathbb{P} \left(|\nu^\varepsilon - \nu|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon} W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha; \right. \\ \left. \|X^\varepsilon - F_{z,\nu}(f)\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \rho \right) \leq -R. \quad (3.3)$$

Preuve. Du fait que

$$\begin{aligned} & \left\{ \|X^\varepsilon - g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \rho; \|\sqrt{\varepsilon} W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} + |\nu^\varepsilon - \nu|_{\mathcal{F}} < \alpha \right\} \\ & \subset \left\{ \|X^\varepsilon - X_{\nu^\varepsilon}^f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \frac{\rho}{2}; \|\sqrt{\varepsilon} W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha \right\} \\ & \quad \cup \left\{ \|g - X_{\nu^\varepsilon}^f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \frac{\rho}{2}; |\nu^\varepsilon - \nu|_{\mathcal{F}} < \alpha \right\} = I \cup II, \end{aligned}$$

nous devons estimer $\mathbb{P}(I)$ et $\mathbb{P}(II)$.

Lemme 3.2. $\forall A, \rho > 0, \exists \alpha, r > 0$ tels que si $\int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds \leq A, |z - x| < r$, on a

$$\mathbb{P} \left\{ \|g - X_{\nu^\varepsilon}^f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \frac{\rho}{2}; |\nu^\varepsilon - \nu|_{\mathcal{F}} < 2 \right\} = 0. \quad (3.4)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|X_{\nu^\varepsilon}^f(t) - g_t\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} & \leq |x - z| + \left| \int_0^t \left(\sigma_{\nu^\varepsilon(s)}(X_{\nu^\varepsilon}^f(s)) - \sigma_{\nu(s)}(g_s) \right) \dot{f}_s ds \right| \\ & \quad + \left| \int_0^t b_{\nu^\varepsilon(s)} \left(X_{\nu^\varepsilon}^f(s) - b_{\nu(s)}(g_s) \right) ds \right|. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse **H.1** et grâce au lemme de Gronwall, il existe une constante C telle que

$$\|g - X_{\nu^\varepsilon}^f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \leq \left(|x - z| + C(A^{1/2} + 1)|\nu^\varepsilon - \nu|_{\mathcal{F}} \right) e^{C(A^{1/2}+1)}.$$

Si

$$|x - z| < \frac{\rho}{8} e^{-C(A^{1/2}+1)} \text{ et } \alpha < \frac{\rho}{4C(A^{1/2} + 1)} e^{-C(A^{1/2}+1)},$$

alors $\mathbb{P}(II) = 0$. □

Pour l'estimation de $\mathbb{P}(I)$, on utilise

Lemme 3.3. $\forall A, R, \rho > 0, \exists \varepsilon_0 \geq 0, \alpha, r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \int_0^1 |\dot{f}_s|^2 ds \leq A, |z - x| < r$, on a

$$\varepsilon \log \mathbb{P} \left(\|\sqrt{\varepsilon} W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha; \|X^\varepsilon - X_{\nu^\varepsilon}^f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \frac{\rho}{2} \right) \leq -R. \quad (3.5)$$

Preuve. Pour la preuve de ce lemme, nous renvoyons le lecteur à Azencott [1], Priouret [11], Doss & Priouret [4] et nous-même [12], [13] et [14]. □

Ceci termine la preuve du théorème 3.1. □

Proposition 3.4. *L'application de $\mathbb{R}^d \times \{I \leq a_1\} \times \{S \leq a_2\}$ dans $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$, associant $g = F_{z,\nu}(f)$ définie dans (3.1) est continue, où $\{I \leq a_1\}$ est muni d'une certaine topologie et $\{S \leq a_2\}$ muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous allons rappeler sous forme de proposition les résultats de Bezuidenhout [2], voir aussi Dembo & Zeitouni [3] concernant le couple $(\nu^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} W)$.

Proposition 3.5. *Sous H.2, la famille $(\nu^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} W)$ considérée comme une v.a. à valeurs dans $E = L^\infty(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}_x([0, 1], \mathbb{R}^d)$ satisfait à un PGD avec la fonctionnelle d'action*

$$\tilde{\lambda}(h) = \inf\{I(\varphi) + S(f) \text{ lorsque } h = (\varphi, f)\} \quad (3.6)$$

où S est définie dans (2.2) et I est donnée dans H.2.

3.1. Preuve du théorème 2.1

Du fait que $\{\lambda \leq a\} = F_x\{I + S \leq a\}$, la compacité des ensembles de niveaux résulte des propositions 3.4 et 3.5.

Minoration. La minoration se déduit de la proposition 3.6 suivante :

Proposition 3.6. *Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(g) < +\infty$. Alors $\forall \eta, \rho > 0$, $\exists \varepsilon_0 \geq 0$ et $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $|z - x| < r$, on a*

$$\varepsilon \log \mathbb{P} \left(\|X_x^\varepsilon - g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} < \rho \right) \geq -\lambda(g) - \eta.$$

Démonstration. Soit (φ, f) tel que $F_{z,\varphi}(f) = g$ et $\lambda(g) = \inf\{I(\varphi) + S(f)/F_{z,\varphi}(f) = g\}$ et soit $R = \lambda(g) + \eta$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\|X_x^\varepsilon - g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} < \rho \right) &\geq \mathbb{P} \left[|\nu^\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon}W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha \right] \\ &- \mathbb{P} \left\{ \|X_x^\varepsilon - g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \geq \rho; |\nu^\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon}W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha \right\} \\ &\geq \mathbb{P} \left[|\nu^\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon}W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha \right] - \exp \left(-\frac{R}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

si α est bien choisi et si $|z - x| < r$ (voir le théorème 3.1). Mais par la proposition 3.4, si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\begin{aligned} -\lambda(g) - \frac{\eta}{2} &= -\tilde{\lambda}(\varphi, f) - \frac{\eta}{2} \\ &\leq \varepsilon \log \mathbb{P} \left[|\nu^\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon}W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} \leq \alpha \right] \\ &\leq \varepsilon \log 2 + \text{Max} \left(-R, \varepsilon \log \mathbb{P}(\|X_x^\varepsilon - g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} < \rho) \right) \end{aligned}$$

mais étant donné le choix de R , ce maximum ne peut-être $-R$, d'où le résultat. \square

Majoration. Soit F un fermé. Si $\lambda(F) = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon soit $a > 0$ tel que $a < \lambda(F)$ et soit $R > a$. Si $K_a = \{\lambda \leq a\}$ et $C_a = \{I + S \leq a\}$, alors $K_a = F_x\{I + S \leq a\}$.

Soit $(\varphi, f) \in C_a$, $g = F_{x,\varphi}(f)$ donc $\lambda(g) \leq a < \lambda(F)$, d'où $g \in F^c$ et il existe $\rho_z > 0$ tel que $B_x(g, \rho_z) \subset F^c$, $\tilde{Z} = (\varphi, f)$. Par le théorème 3.1, il existe $\alpha_z > 0$, $\varepsilon_z > 0$ tels que si $\varepsilon < \varepsilon_z$, on ait en posant $\tilde{Z}^\varepsilon = (\nu^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}W)$

$$\mathbb{P}\{\|X^\varepsilon - F_z(\tilde{Z})\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \geq \rho_z; \|\tilde{Z}^\varepsilon - \tilde{Z}\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha_z\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right),$$

où l'on a posé $F_z(\tilde{Z}) = F_{z,\varphi}(f)$ si $\tilde{Z} = (\varphi, f)$ et

$$\|\tilde{Z}^\varepsilon - \tilde{Z}\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} = |\nu^\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\varepsilon}W - f\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)}.$$

Comme $C_a \subset \bigcup_{\tilde{Z} \in C_a} B(\tilde{Z}, \alpha_{\tilde{Z}})$, on peut trouver $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n \in C_a$ telles que, notant $\alpha_k, \varepsilon_k, \rho_k, g_k$ pour $\alpha_{\tilde{Z}_k}, \varepsilon_{\tilde{Z}_k}, \rho_{\tilde{Z}_k}, F_x(\tilde{Z}_k)$, $C_a \subset \bigcup_1^n B(\tilde{Z}_k, \alpha_k)$ ouvert et $F \subset B^c(g_k, \rho_k)$. On a alors

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}^\varepsilon \in U) \cap (X^\varepsilon \in F) &= \bigcup_1^n \left\{ \|\tilde{Z}^\varepsilon - \tilde{Z}_k\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha_k, X^\varepsilon \in F \right\} \\ &\subset \bigcup_1^n \left\{ \|\tilde{Z}^\varepsilon - \tilde{Z}_k\|_{\mathcal{F} \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha_k, \|X^\varepsilon - g_k\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \rho_k \right\} \end{aligned}$$

et donc si $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$, on a $\mathbb{P}(\tilde{Z}^\varepsilon \in U, X^\varepsilon \in F) \leq n \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right)$.

Finalement, du fait que

$$\mathbb{P}(X^\varepsilon \in F) \leq \mathbb{P}(\tilde{Z}^\varepsilon \in U, X^\varepsilon \in F) + \mathbb{P}(\tilde{Z}^\varepsilon \in U^c)$$

on déduit, du fait que $U^c \subset C_a^c$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \varepsilon \log \mathbb{P}(X^\varepsilon \in F) \leq \text{Max}(-R, -\tilde{\lambda}(U^c)) \leq -a.$$

4. Preuve du Théorème 2.7

Nous commençons par la preuve du théorème 2.5.

4.1. Preuve du théorème 2.5

La preuve du théorème 2.5 se déduit du théorème 4.1

Théorème 4.1. $\forall s, R, \rho > 0, \exists \varepsilon_0 \geq 0, \alpha, r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\int_0^1 |\dot{\psi}_u|^2 du < s$, $|z - x| < r$, on a

$$\mathbb{P}(\|\sqrt{\varepsilon} W - \psi\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha; \|Z_f^\varepsilon - F_z(\psi, f)\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} > \rho) \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right). \quad (4.1)$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à Azen-cott [1] et Rabeherimanana [12], [13] et [14]. \square

De la même façon, nous avons :

Théorème 4.2. $\forall s, R, \rho > 0, \exists \varepsilon_0 \geq 0, \alpha, r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\int_0^1 |\dot{\psi}_u|^2 du < s$, $|z - x| < r$, on a

$$\varepsilon \log \mathbb{P}\left(\|\sqrt{\varepsilon} W - \psi\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha, |\nu - f|_{\mathcal{F}} < \alpha; \|Z^\varepsilon - F_z(\psi, f)\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} > \rho\right) \leq -R. \quad (4.2)$$

Vérification de l'hypothèse H3. Pour (2.20), (cf. Eizenberg & Freidlin [7]). Pour simplifier, nous démontrons (2.21) dans le cas où $\sigma_f(x)$ est partout inversible.

Soient donc $(\varphi, f) \in \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{F}$ et $s > 0$ tels que $S_f(\varphi) < s$. Alors (2.17) implique que φ est höldérienne de puissance $1/2$.

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq (2 + 4s)^{1/2} C \cdot |t_1 - t_2|^{1/2} \quad (4.3)$$

Soit $m > 0$, divisons $[0, 1]$ en m segments de longueur $\frac{1}{m}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \left| S_f(\varphi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} \left| \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \left(\dot{\varphi}_t - b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) \right|^2 dt \right| = \\
 & \quad \frac{1}{2} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} \left\langle \left[\sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) + \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right] (\dot{\varphi}_t) \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) \left[b_{f(t)}(\varphi_t) - b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. - \left[\sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) + \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right] \left(b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right), \left[\sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) - \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right] (\dot{\varphi}_t) \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) \left[b_{f(t)}(\varphi_t) + b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left[\sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) - \sigma_{f(t)}^{-1}(\varphi_t) \right] \left(b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) \right\rangle dt \right| \\
 & \quad \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^9 I_j, \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

où par (4.3),

$$I_1 = 2 \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \cdot m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C \int_0^1 |\dot{\varphi}_t|^2 dt$$

$$I_2 = 2 \left(\max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \right)^2 \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| \cdot m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C \int_0^1 |\dot{\varphi}_t| dt$$

$$\begin{aligned}
 I_3 = 2 \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| & \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \\
 & m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C \int_0^1 |\dot{\varphi}_t| dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 = \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| & \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \\
 & m^{-1} (2 + 4s)^{1/2} C \int_0^1 |\dot{\varphi}_t| dt
 \end{aligned}$$

$$I_5 = \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \left(\max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| \right)^2 \cdot m^{-1} (2 + 4s) C^2$$

$$I_6 = \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |b_i(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \\ m^{-1} (2 + 4s) C^2$$

$$I_7 = 2 \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |b_i(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \\ m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C \int_0^1 |\dot{\varphi}_t| dt$$

$$I_8 = 2 \left(\max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \right)^2 \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |b_i(x)| \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla b_i(x)| \cdot m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C$$

$$I_9 = 2 \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\sigma_i^{-1}(x)| \cdot \left(\max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |b_i(x)| \right)^2 \cdot \max_{\substack{i \in [1, n] \\ x \in \mathbb{R}^d}} |\nabla \sigma_i^{-1}(x)| \cdot m^{-\frac{1}{2}} (2 + 4s)^{1/2} C.$$

donc,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^9 I_j \leq K(s) \cdot m^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

Comme dans Eizenberg & Freidlin [7], introduisons les fonctions $X^i(t) = 1_{(\nu(t)=i)}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et définissons

$$\gamma_i^j = \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} X^i(t) dt \quad (4.6)$$

pour chaque $j \in \{0, \dots, m-1\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Tout d'abord, définissons $f_m: [0, 1] \rightarrow \{1, \dots, n\}$ par la formule

$$f_m(t) = i \text{ pour } t \in \Delta_i^j, j \in \{0, \dots, m-1\} \text{ et } i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.7)$$

où Δ_i^j est défini par

$$\Delta_i^j = \left[\frac{j}{m} + \sum_{k=0}^{i-1} \gamma_k^i, \frac{j}{m} + \sum_{k=0}^i \gamma_k^i \right]. \quad (4.8)$$

Notons que $\cup_{i=1}^n \Delta_i^j = \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m} \right]$ puisque $\sum_{i=1}^n \gamma_i^j = \frac{1}{m}, j \in \{0, \dots, m-1\}$ et notons aussi que Δ_i^j peut être vide mais $f_m(0) = 1$.

Maintenant, définissons φ_m par

$$\dot{\varphi}_m(t) = \sigma_{f_m(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \left(\dot{\varphi}_t - b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) + b_{f_m(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right). \quad (4.9)$$

On peut vérifier que

$$\varphi_m \left(\frac{j}{m} \right) = \varphi_{\frac{j}{m}} \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (4.10)$$

et de plus, comme il existe $\psi \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^r)$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) - \varphi_t = \int_0^t \left\{ \left(\sigma_{f_m(u)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) - \sigma_{f(u)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) \cdot \dot{\psi}_u \right. \\ \left. + \left(b_{f_m(u)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) - b_{f(u)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) \right\} du, \end{aligned}$$

on a

$$\max_{t \in [0,1]} |\varphi_m(t) - \varphi_t| \leq \frac{M_0}{m} \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, m-1\} \quad (4.11)$$

où la constante M_0 dépend seulement des σ_i , b_i et s . Les équations (4.3) et (4.9) impliquent que les φ_m sont hôldériennes avec les mêmes constantes dépendant de $(2 + 4s)^{1/2}C$ (formule (4.3)), des σ_i et des b_i .

Comme dans (4.4) et (4.5), pour $t \in [0, 1]$ et $j \in \{0, \dots, m-1\}$, on a

$$\begin{aligned} \left| S_{f_m}(\varphi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} \left| \sigma_{f_m(t)}^{-1} \left(\varphi_m \left(\frac{j}{m} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\dot{\varphi}_m(t) - b_{f_m(t)} \left(\varphi_m \left(\frac{j}{m} \right) \right) \right) \right|^2 dt \right| \leq K'(s).m^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Par (4.9) pour $t \in [0, 1]$ et $j \in \{0, \dots, m-1\}$ on a

$$\begin{aligned} \sigma_{f_m(t)}^{-1} \left(\varphi_m \left(\frac{j}{m} \right) \right) \left(\dot{\varphi}_m(t) - b_{f_m(t)} \left(\varphi_m \left(\frac{j}{m} \right) \right) \right) \\ = \sigma_{f(t)}^{-1} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \left(\dot{\varphi}_t - b_{f(t)} \left(\varphi_{\frac{j}{m}} \right) \right) \quad (4.13) \end{aligned}$$

(4.4) et (4.5) impliquent que

$$|S_f(\varphi) - S_{f_m}(\varphi_m)| \leq K''(s).m^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

Soit $\delta > 0$. Choisissons $m = m(\delta, s)$ assez grand pour que $\max(K''(s).m^{-\frac{1}{2}}, M_0 m^{-1}) \leq \delta$. Posons $\tilde{f} = f_m \in \mathcal{F}_{mn}$ et $\tilde{\varphi} = \varphi_m$. Par (4.11) et (4.14), on a (2.21) en posant $k(\delta, s) = nm(\delta, s)$. \square

Pour le cas général, on pourra utiliser la formule (2.18). La difficulté vient du fait qu'on n'a pas une représentation plus explicite dans ce cas.

4.2. Preuve du Théorème 2.7

Le théorème 2.7 découle du théorème 2.6. Nous allons faire la preuve du théorème 2.6 en deux étapes.

Étape 1. D'une part, les définitions de \tilde{S} et S^* impliquent que $\forall \beta, 0 < \beta < 1$ et $g \in \Phi_x^*(s)$, $\exists g_1(g)$ et $f \in \mathcal{F}$ telles que :

$$S = S_f(g_1) \leq \tilde{S}(g_1) + \beta \leq S^*(g) + \beta \leq s + \beta \text{ et } \|g_1 - g\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} \leq \beta. \quad (4.15)$$

D'autre part, par (2.2), (2.21) et la proposition 2.3, $\exists \tilde{\psi} \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^r)$, $\tilde{g}_1 \in \Phi_x^*(s)$, $\tilde{f} \in \mathcal{F}_k$ et $k = k(\beta, s)$ tels que

$$S(\tilde{\psi}) = S_{\tilde{f}}(\tilde{g}_1) \leq S_f(g_1) + \beta \text{ et } \|\tilde{g}_1 - g\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} \leq \beta. \quad (4.16)$$

Par le théorème de Schilder et grâce à l'indépendance de $\sqrt{\varepsilon} W$ et ν , $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ (\sqrt{\varepsilon} W, \nu) \in B_\alpha(\tilde{\psi}) \times (B_\alpha(\tilde{f}) \cap \mathcal{F}_k) \right\} &\geq \exp - \frac{S(\tilde{\psi}) + \beta}{\varepsilon} \cdot \delta(k, \alpha) \\ &\geq \exp - \frac{S^*(g) + 3\beta}{\varepsilon} \cdot \delta(k, \alpha). \end{aligned}$$

Choisissons $\beta = \min(\delta, \gamma)/4$. Soit $R = S(\tilde{\psi}) + 2\beta$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z^\varepsilon \in B_\delta(g) \text{ et } \nu \in \mathcal{F}_k) &\geq \mathbb{P}\{Z^\varepsilon \in B_{\delta/3}(g) \text{ et } \nu \in (B_\alpha(\tilde{f}) \cap \mathcal{F}_k)\} \\ &\geq \mathbb{P} \left(\|\sqrt{\varepsilon} W - \tilde{\psi}\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha, |\nu - \tilde{f}|_{\mathcal{F}} < \alpha; \nu \in \mathcal{F}_k \right) \\ &\quad - \mathbb{P} \left(\|\sqrt{\varepsilon} W - \tilde{\psi}\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha, \right. \\ &\quad \left. |\nu - \tilde{f}|_{\mathcal{F}} < \alpha; \nu \in \mathcal{F}_k; \|Z^\varepsilon - \tilde{g}_1\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{\delta}{3} \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left(\|\sqrt{\varepsilon} W - \tilde{\psi}\|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^r)} < \alpha \right) \cdot \delta(k, \alpha) - \exp - \frac{R}{\varepsilon} \end{aligned}$$

si α est bien choisi et $|x - z| < r$ (théorème 4.2).

Si $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \wedge -\beta / \log \frac{\delta(k, \alpha)}{2}$, alors on a :

$$\begin{aligned} -S_{\tilde{f}}(\tilde{g}_1) - \beta + \varepsilon \log \delta(k, \alpha) &= -S(\tilde{\psi}) - \beta + \varepsilon \log \delta(k, \alpha) \\ &\leq \max(\varepsilon \log \mathbb{P}(Z^\varepsilon \in B_\delta(g) \text{ et } \nu \in \mathcal{F}_k); -R) \\ &\quad + \varepsilon \log 2 \end{aligned}$$

mais vu le choix de R , ce max ne peut être $-R$, d'où le résultat en appliquant (4.15) et (4.16). La preuve complète s'obtient en posant $M(s, \gamma, \delta) = k(\beta, s)$.

Étape 2. Soit C un fermé de $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$. Soit $0 < s < \inf\{S^*(g), g \in \mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)\}$. Si $S^*(C) = 0$, il n'y a rien à montrer. Alors C et $\Phi_x^*(s)$ sont disjoints $\Phi_x^*(s)$ étant compact donc il existe $\rho > 0$ tel que $d(Z^\varepsilon(x), \phi_x(s)) \geq \rho$ si $Z^\varepsilon(x) \in C$ où d est la distance associée à la norme uniforme sur $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\mathbb{P}(d(Z^\varepsilon(x), \Phi_x^*(s)) \geq \rho) \leq \mathbb{P}(d(Z^\varepsilon(x), \tilde{\phi}_x(s)) \geq \rho)$$

On applique le théorème 4.2 à $s, \rho, R = s - \gamma + 1$, on en tire ε_1 et α , il existe $g_1, \dots, g_N \in \phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{g \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^r), \frac{1}{2} \|g\|_{\mathbb{H}(\mathbb{R}^r)}^2 \leq s\right\}, f_1, \dots, f_M \in \mathcal{F}$,

$$\tilde{\phi}(s) \times \mathcal{F} \in \bigcup_{i=1}^N B_\alpha(g_i) \times \bigcup_{j=1}^M B_\alpha(f_j);$$

alors comme $\varphi_{ij} = F_x(g_i, f_j) \in \tilde{\Phi}_x(s)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\{(\sqrt{\varepsilon}W, \nu) \in U \times \mathcal{F} \cap \{Z^\varepsilon(x) \in C\}\} \\ &\subset \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^M \left\{B_\alpha(g_i) \times B_\alpha(f_j), \|Z^\varepsilon(x) - \varphi_{ij}\|_{\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^d)} \geq \rho\right\} \end{aligned}$$

et donc si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, on a

$$\mathbb{P}\{(\sqrt{\varepsilon}W, \nu) \in U \times \mathcal{F}, Z^\varepsilon(x) \in C\} \leq NM \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right)$$

U^c étant fermé, par le théorème de Schilder, on obtient pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$

$$\varepsilon \log \mathbb{P}(\sqrt{\varepsilon}W \in U^c) \leq -S(U^c) + \frac{\gamma}{2} \leq -s + \frac{\gamma}{2}.$$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ et par le choix de R , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z^\varepsilon(x) \in C) &\leq \mathbb{P}(\sqrt{\varepsilon}W \in U^c) + NM \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{s}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{2\varepsilon}\right) + NM \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{s}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \times \left(\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\right) + NM \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{s}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Ici ε_0 dépend de s . On termine la démonstration en utilisant les arguments de Doss et Priouret [4].

Remarque 4.3. On peut aussi utiliser le théorème 2.5. En effet, par la définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(Z_\varepsilon^x \in C) = \int T^\varepsilon(f, C)m(df) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} T^\varepsilon(f, C).m(\mathcal{F}).$$

Par le théorème 2.5, $\forall \gamma > 0, \exists \varepsilon'_0 > 0, \forall \varepsilon \leq \varepsilon'_0$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} T^\varepsilon(f, C).m(\mathcal{F}) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \exp\left(-\frac{S_f(c) - \gamma}{\varepsilon}\right) = \exp\left(-\inf_{f \in \mathcal{F}} \frac{S_f(C) - \gamma}{\varepsilon}\right).$$

Des définitions de \tilde{S} et S^* , on déduit que

$$\exp\left(-\inf_{f \in \mathcal{F}} \frac{S_f(C) - \gamma}{\varepsilon}\right) = \exp\left(-\frac{\tilde{S}(C) - \gamma}{\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{S^*(C) - \gamma}{\varepsilon}\right).$$

4.3. Preuve du Théorème 2.11

Pour *i*), la démonstration est basée sur le théorème 2.8 d'une manière standard (cf. Wentzell & Freidlin [16]).

Pour *ii*). Nous supposons que $i_0 = 1$ dans l'hypothèse **H.5** sans rien perdre en généralité. Nous allons d'abord mettre (1.5), (1.6) sous une forme convenable et réduisons le problème à un problème unidimensionnel.

Comme dans [7], nous introduisons la fonction

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} d(x, \partial D) & \text{si } x \in \partial D \cup D; \\ -d(x, \partial D) & \text{si } x \notin D. \end{cases} \quad (4.17)$$

Il est connu que $\tilde{\rho}(x)$ est régulière pour $x : d(x, \partial D) \leq \rho_0$ pour chaque $\rho_0 > 0$ assez petit et que $\nabla \tilde{\rho}(x) = -n(x)$ pour $x \in \partial D$.

Nous introduisons la fonction $\rho(x)$ de classe \mathcal{C}_b^2

$$\rho(x) = \tilde{\rho}(x) \text{ pour } x : d(x, \partial D) < \frac{\rho_0}{2} \tag{4.18}$$

et $|\rho(x)| > \frac{\rho_0}{2}$ pour $x : d(x, \partial D) < \frac{\rho_0}{2}$.

Définissons pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$

$$G_i(x) = \langle a_i(x) \nabla \rho(x), \nabla \rho(x) \rangle \text{ et } \tilde{b}_i = \frac{b_i(x)}{G_i(x)}. \tag{4.19}$$

Notons \tilde{S}_i^t les systèmes dynamiques induits par les champs de vecteurs $\tilde{b}_i(x)$

$$\frac{d\tilde{S}_i^t x}{dt} = \tilde{b}_i(\tilde{S}_i^t x); \tilde{S}_i^0 x = x, i \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.20}$$

Nous introduisons les processus de Markov dégénérés ‘réduits’ avec l’espace de phase $D \times \{1, \dots, n\}$ définis par

$$d\tilde{X}_t^0 = \tilde{b}_{\tilde{V}^0(t)}(\tilde{X}_t^0) dt; \tilde{X}_0^0 = x \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{et } \mathbb{P}_{x,i}\{\tilde{V}^0(t) = j\} = \tilde{d}_{ij}(x)t + o(t), \text{ où } \tilde{d}_{ij}(x) = \frac{d_{ij}(x)}{G_i(x)}. \tag{4.21}$$

Nous aurons besoin de la proposition 4.4 :

Proposition 4.4 (E. & F.[5]). *Etant donné un ouvert régulier $D \subset \mathbb{R}^d$, un champ de vecteurs réguliers $V(x)$ ne s’annulant pas et une fonction matricielle définie positive $a(x)$, alors on peut trouver une matrice régulière $\sigma(x)$ dans D telle que*

$$a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x) \text{ et } \sigma^*(x)V(x) = \langle a(x)V(x), V(x) \rangle^{\frac{1}{2}} e_1, \tag{4.22}$$

où $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

En divisant les 2 membres des EDP (1.5) par les G_k définis dans (4.19) et en considérant les champs vectoriels $\tilde{b}_i(x)$ et les fonctions $\tilde{d}_{ij}(x)$ définis par (4.19) et (4.21) au lieu des $b_i(x)$ et $d_{ij}(x)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^d \tilde{a}_k^{ij}(x) \frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d \tilde{b}_k^i(x) \frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x^i} \\ + \sum_{j=1}^n \tilde{d}_{kj}(x) (u_j^\varepsilon(x) - u_k^\varepsilon(x)) = 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^d$, $u_k^\varepsilon / \partial D = \psi$, $u_k^\varepsilon \in \mathcal{C}^2(D) \cap C(\overline{D})$, $k \in \{1, \dots, n\}$. et nous supposons que

$$\sigma_i^*(x) \nabla \rho(x) = e_1 \text{ dans } D. \quad (4.24)$$

Dans toute la suite, pour une raison de commodité, nous enlevons le signe ' \sim ' sur les coefficients de (4.23). De plus, notons $(X^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ le processus de Markov correspondant à ces coefficients.

Choisissons $\delta_0 > 0$ tel que

$$\min_{\substack{x \in \partial D; |x-x_0| \leq \delta_0 \\ 1 \leq i \leq n}} g_i(x) - g_1(x) = a_0 > 0 \quad (4.25)$$

Soit $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $\gamma = \exp(-a_0/\varepsilon)$. Notons $\Gamma_1^\varepsilon = \{x \in D; d(x, \partial D) = \gamma\}$, $\Gamma_2^\varepsilon = \{x \in D; d(x, \partial D) = 2\gamma\}$, $K_1^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cap \{x : |x - x_0| \leq \frac{\delta_0}{2}\} \neq \emptyset$, pour ε assez petit et $K_2^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \setminus K_1^\varepsilon$. Définissons

$$\tilde{\tau}^\varepsilon = \inf\{t > 0; X^\varepsilon(t) \in K_2^\varepsilon\} \wedge \tau^\varepsilon.$$

Alors, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in K \subset D$:

$$\mathbb{P}_{x,i}(\nu^\varepsilon(\tau^\varepsilon) \neq 1) \leq \mathbb{P}_{x,i}(\tilde{\tau}^\varepsilon < \tau^\varepsilon) + \mathbb{P}_{x,i}(\nu^\varepsilon(\tau^\varepsilon) \neq 1 \text{ et } \tilde{\tau}^\varepsilon = \tau^\varepsilon). \quad (4.26)$$

Notons que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il résulte de l'hypothèse **H.4 IV**) et de la continuité de $V(x, y)$ que

$$V(\mathcal{X}_0, x_0) = \min_{x \in \partial D} V(\mathcal{X}_0, x) = \min_{x \in K_2^\varepsilon} V(\mathcal{X}_0, x) \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.} \quad (4.27)$$

Donc par des arguments classiques, on peut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{x,i}(\tilde{\tau}^\varepsilon < \tau^\varepsilon) = 0 \text{ uniformément sur tous les compacts de } D. \quad (4.28)$$

Maintenant, définissons des suites d'instantanés markoviens

$$\begin{aligned} \sigma_1^\varepsilon &= \inf\{t \geq 0; X^\varepsilon(t) \in \Gamma_1^\varepsilon\} \wedge \tau^\varepsilon, \\ \tau_m^\varepsilon &= \inf\{t \geq \sigma_m^\varepsilon; X^\varepsilon(t) \in \partial D \cup \Gamma_1^\varepsilon\}, \\ \sigma_{m+1}^\varepsilon &= \inf\{t \geq \tau_m^\varepsilon; X^\varepsilon(t) \in \Gamma_2^\varepsilon\} \wedge \tau^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Grâce à (4.28), pour avoir les résultats il suffit de montrer que

$$\sup_{\substack{x \in K_1^\varepsilon \\ j \in \{1, \dots, n\}}} \mathbb{P}_{x,i}(\nu^\varepsilon(\tau^\varepsilon) \neq 1) / X^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.30)$$

Pour prouver (4.30), nous réduisons le problème au cas unidimensionnel. Considérons les processus aléatoires $F^\varepsilon(t)$ et $\psi^\varepsilon(t)$ définis par :

$$F^\varepsilon(t) = \gamma^{-1} \rho(Z^\varepsilon(\gamma t))$$

et $\psi^\varepsilon(t) = \nu(\gamma t)$, où ρ est définie dans la formule (4.18) et Z^ε dans (2.4). Par la formule d'Ito, $F^\varepsilon(t)$ est solution de l'E.D.S.

$$\begin{aligned} dF^\varepsilon(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}} \left\langle \nabla\rho(Z^\varepsilon(\gamma t)), \sigma_{\psi^\varepsilon(t)}(Z^\varepsilon(\gamma t))dW_t^\gamma \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \nabla\rho(Z^\varepsilon(\gamma t)), b_{\psi^\varepsilon(t)}(Z^\varepsilon(\gamma t)) \right\rangle dt \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{\psi^\varepsilon(t)}^{ij}(Z^\varepsilon(\gamma t)) \frac{\partial^2\rho(Z^\varepsilon(\gamma t))}{\partial x^i\partial x^j} dt, \end{aligned}$$

où $W_t^\gamma = \gamma^{-\frac{1}{2}}W(\gamma t)$. Par (4.24),

$$\begin{aligned} &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}dW_1(t) + \left\langle \nabla\rho(Z^\varepsilon(\gamma t)), b_{\psi^\varepsilon(t)}(Z^\varepsilon(\gamma t)) \right\rangle dt \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{\psi^\varepsilon(t)}^{ij}(Z^\varepsilon(\gamma t)) \frac{\partial^2\rho(Z^\varepsilon(\gamma t))}{\partial x^i\partial x^j} dt, \end{aligned}$$

où $W_1(t) = \langle W_t^\gamma, e_1 \rangle$.

Notons que, par la définition de γ on a $\frac{\varepsilon}{\gamma} \approx \frac{1}{|\log \varepsilon|}$. Les probabilités de transition pour $F^\varepsilon(t)$ sont $\mathbb{P}(\psi^\varepsilon(t+h) = i/\psi^\varepsilon(t) = j) = \gamma h + o(\gamma h)$.

Nous considérons aussi le processus unidimensionnel

$$Y_y^\varepsilon(t) = Y_y^\varepsilon(0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}W_1(t) - \int_0^t \left\langle n(y), b_{\psi^\varepsilon(t)}(y) \right\rangle dt,$$

où $y \in \partial D$. Nous avons alors :

Proposition 4.5 (E. & F.[7]). *Si $Y_y^\varepsilon(0) = F^\varepsilon(0)$ et $|Z^\varepsilon(0) - y| \leq \gamma$ pour chaque $y \in \partial D$, alors il existe une constante $C(t) > 0$ telle que*

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |Y_y^\varepsilon(s) - F^\varepsilon(s)| \geq \delta \right\} \leq \exp\left(-C(t)\delta\gamma^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta, t)$, où $\varepsilon(\delta, t)$ est indépendante de y .

Pour démontrer (2.31), il suffit maintenant de transposer mot pour mot les preuves d'Eizenberg & Freidlin [7] dans le cas où $\sigma_k = \text{Id}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Références

- [1] R. AZENCOTT – « Grandes Déviations et Applications », *Ecole d'Eté de Proba. de Saint Flour VIII* **774** (1980), p. 1–76, Lect. Notes in Math.
- [2] C. BEZUIDENHOUT – « A large deviations principle for small random perturbations of random evolution equations », *Ann. Probab.* **15** (1987), p. 646–658.
- [3] A. DEMBO & O. ZEITOUNI – *Large Deviations Techniques and Applications*, Applications of Mathematics 38, Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [4] H. DOSS & P. PRIOURET – « Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion », *Seminar on probability, XVII* **986** (1983), p. 353–370, Lectures Notes in Math.
- [5] A. EIZENBERG & M. FREIDLIN – « On the dirichlet problem for a class of second order p.d.e. systems with small parameter », *Stochastics and Stochastic Reports* **33**, n° 3 (1990), p. 111–148.
- [6] ———, « Averaging principle for perturbed random evolution equations and corresponding dirichlet problems », *Prob. Theory Relat. Fields* **94** (1993), p. 335–374.
- [7] ———, « Large deviations for markov process corresponding to p.d.e. systems », *Ann. Prob.* **21**, n° 2 (1993), p. 1015–1044.
- [8] Y.-J. HU – « A unified approach to the large deviations for small perturbations of random evolution equations », *Science in China (séries A)* **40**, n° 7 (1997), p. 697–706.
- [9] M. MELLOUK – « A large deviation principle for random evolution equations », *Bernoulli* **6** n° 6 (2000), p. 977–999.
- [10] A. MOGUL'SKII – « Large deviations for trajectories of multidimensional random walks », *Th. Prob. Appl.* **21** (1976), p. 300–315.
- [11] P. PRIOURET – « Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques », in *Seminar on Probability, XVI*, Lecture Notes in Math., vol. 920, Springer, Berlin, 1982, p. 184–200.
- [12] T. J. RABEHERIMANANA – « Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire et algèbre de lie nilpotentes », *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* **30**, n° 3 (1994), p. 331–352.

- [13] ———, « Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires », *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **XI**, n° 2 (2002), p. 201–224.
- [14] ———, « Contribution à l'étude des chaînes de différences absolues et grandes déviations », Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université Université d'Antananarivo (spécialité : mathématiques), 2007.
- [15] D. STROOCK – *An introduction to large deviations*, Springer-Verlag, New York Inc, 1984.
- [16] A. WENTZEELL & M. FREIDLIN – « On small random perturbations of dynamical systems », *Russian Math. Surveys* **25** (1970), p. 1–25.
- [17] Y.-J.HU – « A large deviation principle for small perturbations of random evolution equations in hölder norm », *Stochastic Process* n° 1 (83-99), p. 1997, Appl.68.

LYLIANE IRÈNE RAJAONARISON
E.S.P.A,
Département Electronique
Vontovorona
Antananarivo 101
MADAGASCAR
lilirabe@voila.fr

TOUSSAINT JOSEPH RABEHERIMANANA
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et
Informatique
B.P. 906, Ankatso
Antananarivo101
MADAGASCAR
rabeherimanana.toussaint@yahoo.fr