

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

JEAN-MARC CLÉRIN

Analyse de sensibilité d'un problème de contrôle optimal bilinéaire

Volume 19, n° 1 (2012), p. 177-196.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2012__19_1_177_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Analyse de sensibilité d'un problème de contrôle optimal bilinéaire

JEAN-MARC CLÉRIN

Résumé

Dans cet article, nous étudions la sensibilité d'un problème de contrôle optimal de type bilinéaire. Le coût est différentiable, quadratique et strictement convexe. Le système est gouverné par un opérateur parabolique du quatrième ordre et présente une perturbation additive dans l'équation d'état, ainsi qu'une partie bilinéaire, relativement au contrôle u et à l'état z , de la forme $(u \cdot \nabla)z$. Sous des conditions de petitesse de l'état initial et de la perturbation, nous exploitons les propriétés de régularité et d'unicité du contrôle optimal pour démontrer la stabilité de la fonction valeur optimale. La formule des dérivées directionnelles en zéro de la valeur optimale est explicitée.

Sensitivity analysis of a bilinear optimal control problem

Abstract

In this paper, we study the sensitivity of an optimal control problem of bilinear type. The cost is differentiable, strictly convex and quadratic. The system is governed by a fourth order parabolic operator and has an additive perturbation in the state equation, and a bilinear part with respect to the control u and the state z of the form $(u \cdot \nabla)z$. Under conditions of smallness of the initial state and perturbation, we exploit the properties of regularity and uniqueness of optimal control to demonstrate the stability of the optimal value function. The formula for directional derivatives at zero of the optimal value is explained.

Mots-clés: contrôle optimal bilinéaire, bilaplacien, équations paraboliques, contraintes sur l'état, conditions d'optimalité du second ordre, analyse de sensibilité, valeur optimale.

Classification math. : 35K55, 49K20, 49K40.

1. Introduction

Le problème de contrôle optimal perturbé (\mathcal{P}_f) qui nous intéresse consiste à minimiser le coût différentiable, quadratique et strictement convexe

$$J(z, u) = \int_0^T \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt$$

où u est un contrôle et z une solution de l'équation d'état ci-dessous. Pour n égal à deux ou à trois, nous notons Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe C^1 et borné. Le nombre T est un réel positif et l'état initial z^0 est de classe C^∞ .

$$(\mathcal{E}_{z^0, u, f}) \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) + \Delta^2 z(t, x) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial z}{\partial x_i}(t, x) + f(t, x) \text{ sur }]0, T[\times \Omega \\ z(t, x) = 0 = \frac{\partial z}{\partial \nu}(t, x) \text{ sur }]0, T[\times \partial\Omega \\ z(0, x) = z^0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

Cette équation aux dérivées partielles est un modèle de déformation mécanique de la glace. Le contrôle pilote l'amortissement ou l'excitation de cette déformation. Un premier type de contrôle consiste à positionner des masses à la surface de la glace (voir Trentin et Guyaner [17]). D'autres modèles considèrent des contrôles dynamiques où la structure est soumise à des excitations harmoniques ponctuelles ou encore à une onde acoustique qui provoque des vibrations (cf. Yu [18]). La perturbation f résulte quant à elle des actions conjuguées de forces externes (e. g. la gravité de la plaque, des irradiations ou des variations thermiques). L'opérateur bi-laplacien Δ^2 (i.e. le laplacien du laplacien) est linéaire et la présence de l'opérateur bilinéaire relativement au contrôle et à l'état rend ce problème non convexe. Il n'existe, à ce jour, pas de théorie générale pour les problèmes de contrôle optimal de type bilinéaire. Cette terminologie a été introduite par Bruni, DiPillo et Koch dans [8]. Nous renvoyons à leurs exemples ainsi qu'à ceux de Bonnans [3] et de Bradley, Lenhart et Yong [6] en ce qui concerne un modèle de plaque vibrante de Kirchhoff, à Ito et Kunisch [14] pour l'équation de Schrödinger ou encore à Khapalov [15] qui étudie un modèle de réaction en chaîne.

Le choix d'un triplet de Gelfand (voir [11]) $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ avec injections continues, denses et compactes, offre un cadre fonctionnel adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes au bord du domaine. Nous posons :

$$V := H_0^2(\Omega),$$

$$H := L^2(\Omega),$$

$$V^* := H^{-2}(\Omega).$$

L'espace de Hilbert H est identifié à son dual et sa norme usuelle est notée $|\cdot|$. L'espace de Sobolev V est muni de la norme $\|\cdot\|$ qui est définie pour tout élément ϕ appartenant à V par :

$$\|\phi\| := (|\phi|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \phi|^2)^{1/2}$$

où α est un multi-indice. Cette norme est équivalente à celle de $H^2(\Omega)$

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} := (\sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha \phi|^2)^{1/2}.$$

Nous notons : $\|\cdot\|_* := \|\cdot\|_{H^{-2}(\Omega)}$. Le produit scalaire sur H est noté (\cdot, \cdot) et le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^* \times V}$ est abrégé en $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ici, nous faisons le choix classique (cf. [7], remarque 1, p. 81) d'identifier H à son dual. Pour tout $h \in H$, l'application que nous notons $T(h) : v \in V \mapsto (h, v)$ est une forme linéaire et continue sur H , et donc sur V . Par construction, pour tout $h \in H$ et pour tout $v \in V$, on a l'égalité ci-dessous.

$$\langle T(h), v \rangle = (h, v)$$

Ainsi, on plonge H dans V^* à l'aide de l'application $T : H \rightarrow V^*$ qui est injective, telle que $T(H)$ est dense dans V^* et telle que, pour tout $h \in H : \|Th\|_* \leq |h|$. Les injections canoniques $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ sont donc continues, denses, et les deux produits sont compatibles, c'est à dire que, si $h \in H$, alors, pour tout $v \in V$:

$$\langle h, v \rangle_{H \times V} = (h, v).$$

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, on définit à l'aide de l'intégrale au sens de Bochner (cf. [2], page 49) l'espace

$$L^2(0, T; X) := \{y :]0, T[\rightarrow X \text{ fortement mesurable} \mid \int_0^T \|y(t)\|_X^2 dt < \infty\}$$

qui, muni de la norme $\|y\|_{L^2(0, T; X)} := (\int_0^T \|y(t)\|_X^2 dt)^{1/2}$, est un espace de Banach. En particulier, $(L^2(0, T; H), \|\cdot\|_{L^2(0, T; H)})$ est un espace de Hilbert plongé dans $L^2(0, T; V^*)$. Il est muni du produit scalaire que nous noterons $((\cdot, \cdot))$. Pour tout $\Phi \in L^2(0, T; H)$ et pour tout $\Psi \in L^2(0, T; V)$, on a :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{L^2(0, T; V^*) \times L^2(0, T; V)} = ((\Phi, \Psi)). \quad (1.1)$$

Les fonctions définies sur $]0, T[$ et à valeurs dans H s'identifient aux fonctions de $L^2(]0, T[\times \Omega)$ et le choix des espaces fonctionnels permet de

se ramener à l'étude de l'équation différentielle $(E_{z^0, u, f})$ ci-dessous dont l'inconnue qui sera notée encore z ne dépend que du temps.

$$(E_{z^0, u, f}) \begin{cases} \dot{z}(t) + \Delta^2 z(t) = (u(t) \cdot \nabla)z(t) + f(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = z^0 \text{ dans } H \end{cases}$$

D'une part, $\Delta^2 : V \rightarrow V^*$ et, d'autre part, le terme bilinéaire est défini par

$$(u(t) \cdot \nabla)z(t) := \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial z}{\partial x_i}(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

où le contrôle u est à valeurs dans \mathbb{R}^n . L'espace des états dans lequel nous cherchons d'éventuelles solutions est

$$\{z \in L^2(0, T; V) | \exists w \in (L^2(0, T; V))^* : \\ z(t) = z^0 + \int_{]0, t[} w \quad p.p. \quad t \in [0, T]\}.$$

Toute solution est absolument continue et la condition initiale de $(E_{z^0, u, f})$ s'écrit : $w(0) = z^0$. L'unique élément w de $(L^2(0, T; V))^*$ associé à z est noté de façon usuelle \dot{z} . Le dual de $L^2(0, T; V)$ est identifié avec $L^2(0, T; V^*)$ (cf. [2], theorem 3.1, page 50) et l'on notera plus simplement l'espace des états :

$$W(0, T) := \{z \in L^2(0, T; V) | \dot{z} \in L^2(0, T; V^*)\}.$$

Muni de la norme

$$\|z\|_{W(0, T)} := (\|z\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|\dot{z}\|_{L^2(0, T; V^*)}^2)^{1/2}$$

il s'agit d'un espace de Banach réflexif et séparable qui s'injecte continûment dans $C([0, T]; H)$. Autrement dit, tout élément de $W(0, T)$ a un unique représentant continu. En effet, $W(0, T)$ est égal à

$$\{z \in L^2(0, T; V) | \exists v \in (L^2(0, T; V))^*, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[) : \\ \int_0^T \varphi(t)v(t) dt = \int_0^T \varphi'(t)z(t) dt\}$$

où $\mathcal{D}(]0, T[)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à supports compacts inclus dans $]0, T[$ (cf. [9], lemme 23, annexe B).

La suite de cet article est organisée en trois sections. Dans la section 2, nous rappelons les principaux résultats relatifs à l'équation différentielle $(E_{z^0, u, f})$. Pour toute perturbation f présente sous la forme d'un terme additif dans l'équation d'état, il existe au moins une paire optimale (cf.

Addou et Benbrik [1], proposition 3.1). Ainsi, il existe un point critique qui est un minimum local pour le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_f) . Sous réserve d'imposer à l'état initial et à la perturbation d'être assez petits, le contrôle optimal existe et est unique (cf. [1], cor 3.2.). Nous en déduisons la propriété qui s'avère d'importance pour l'analyse de sensibilité qui suit : les contrôles optimaux sont bornés dans $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, non pas a priori, mais a posteriori.

L'analyse de sensibilité a pour objet l'étude de la stabilité d'un point critique. Dans la section 3, nous montrons la régularité du problème perturbé (\mathcal{P}_f) . En particulier, nous cherchons à caractériser les variations de la fonction valeur optimale

$$\varphi(f) := \inf\{J(z_{z^0, u, f}, u) \mid u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)\}$$

où $z_{z^0, u, f}$ est l'unique solution de l'équation $(E_{z^0, u, f})$ et lorsque les perturbations décrivent un voisinage de $f \in L^2(0, T; V^*)$. La difficulté essentielle porte sur les liens entre les contrôles et les perturbations. Sous réserve que l'état initial z^0 et les perturbations f soient assez petits, c'est à dire plus précisément, en respectant la condition

$$|z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0, T; V^*)} < \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1.2}$$

les contrôles optimaux sont bornés. Nous démontrons leur régularité relativement à la perturbation et nous en déduisons que la fonction valeur optimale est localement lipschitzienne relativement à cette même perturbation.

Théorème 1.1. *La fonction valeur optimale φ est localement lipschitzienne sur*

$$\{f \in L^2(O, T; V^*) : |z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0, T; V^*)} < \frac{1}{\sqrt{3}}\}.$$

La dernière section est consacrée à l'analyse directionnelle du problème (\mathcal{P}_0) . Nous démontrons que la fonction valeur optimale φ est directionnellement différentiable en 0. Le fait que les contrôles optimaux soient bornés a posteriori autorise à traiter les problèmes perturbés (\mathcal{P}_f) en tant que problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité pour de petites perturbations. (Des exemples de problèmes avec contraintes de boîte sur les contrôles se trouvent chez [6] ainsi que chez Griesse et Vexler [12]). Après avoir établi des conditions suffisantes d'optimalité du second ordre (voir Bonnans [4], (5.5) Contraintes d'image dans un convexe, ainsi que

Bonnans et Shapiro [5], section 2.3) pour le jacobien du système d'optimalité du problème non perturbé (\mathcal{P}_0), la méthode consiste à appliquer le théorème des fonctions implicites. Nous retrouvons alors les formules classiques des dérivées directionnelles en 0 de la valeur optimale. En effet, cette étude est menée dans le cadre de la formulation lagrangienne (voir les travaux de Maurer et Zowe [16] ainsi que [12]) et l'état adjoint associé à la paire optimale en 0 permet de caractériser les dérivées directionnelles.

Proposition 1.2. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, la dérivée directionnelle de la fonction valeur optimale en 0 dans la direction δf appartenant à $L^2(0, T; V^*)$ est donnée par la formule*

$$\varphi'(0; \delta f) = -\langle \delta f, \bar{p} \rangle_{L^2(0, T; V^*) \times L^2(0, T; V)} \quad (1.3)$$

où l'état adjoint \bar{p} est l'unique solution du problème non perturbé :

$$(EA_0, -\bar{u}, \bar{z}) \begin{cases} -\dot{p}(t) + \Delta^2 p(t) = -(\bar{u}(t) \cdot \nabla) p(t) + \bar{z}(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ p(T) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

De plus, la fonction valeur optimale est de classe C^1 au voisinage de 0.

Le fait d'avoir appliqué le théorème des fonctions implicites au système d'optimalité du problème perturbé (\mathcal{P}_f) permet son analyse directionnelle en 0 à l'ordre deux. On obtient ainsi le développement de Taylor de la fonction valeur optimale à cet ordre en 0.

2. Existence et unicité d'une paire optimale

2.1. L'équation d'état ($E_{z^0, u, f}$)

Le coût du problème (\mathcal{P}_f) est :

$$J(z, u) = \|z\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^n)}^2.$$

La présence du terme bilinéaire $(u \cdot \nabla)z$ dans l'équation d'état ($E_{z^0, u, f}$) impose au contrôle d'appartenir a priori à $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ (voir la remarque qui précède le lemme 2.4 quant à l'affaiblissement de cette régularité). Sous cette condition, on montre dans le lemme ci-dessous que le choix des espaces fonctionnels est compatible avec l'équation d'état.

Lemme 2.1. *Si $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ et $z \in L^2(0, T; V)$ alors $(u \cdot \nabla)z$ appartient à $L^2(0, T; H)$ et*

$$\|(u \cdot \nabla)z\|_{L^2(0, T; H)} \leq \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)} \|z\|_{L^2(0, T; V)} \quad (2.1)$$

Démonstration. Pour tout $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ et pour tout $z \in L^2(0, T; V)$:

$$|(u(t) \cdot \nabla)z(t)|^2 = \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial z}{\partial x_i}(t, x))^2 dx \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

$$|(u(t) \cdot \nabla)z(t)|^2 \leq \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|z(t)\|^2 \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

Ainsi

$$\|(u \cdot \nabla)z\|_{L^2(0, T; H)} \leq \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)} \|z\|_{L^2(0, T; V)}$$

□

Les démonstrations des estimations a priori utilisent les propriétés du bilaplacien et, plus particulièrement, celles du terme bilinéaire $(u \cdot \nabla)z$.

Lemme 2.2 (cf. [1], lemma 1.1, p. 143). *Si $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, $z^0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V^*)$ alors toute solution z de $(E_{z^0, u, f})$ vérifie les estimations a priori ci-dessous.*

$$\|z\|_{L^2(0, T; V)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|z^0| + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)} \quad (2.2)$$

$$\|z\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq |z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0, T; V^*)} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \|\dot{z}\|_{L^2(0, T; V^*)} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|z^0| + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)}\right)(1 + \sqrt{2}\|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^n)}) \\ &\quad + \|f\|_{L^2(0, T; V^*)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Remarque 2.3. Il est à noter que dans l'estimation a priori (2.4) c'est la norme au sens L^2 du contrôle qui est considérée. Bien entendu, les contrôles sont définis sur le segment $]0, T[$ et, en tant qu'éléments de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ ils appartiennent également à $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$. Mais, de plus, la seconde estimation a priori (2.3) permet d'affaiblir la régularité sur le contrôle associé à une solution. Une solution éventuelle z appartient à $L^\infty(0, T; H)$ donc l'appartenance du terme bilinéaire $(u \cdot \nabla)z$ à $L^2(0, T; V^*)$ est assurée dès lors que u est un élément de $L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$. Ce fait, énoncé dans le lemme qui suit, sera utilisé lors de l'étude de la sensibilité du problème de contrôle optimal perturbé (\mathcal{P}_f) .

Lemme 2.4. *L'état initial $z^0 \in H$ et la perturbation $f \in L^2(0, T; V^*)$ étant fixés, si $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ est un contrôle associé à une solution $z \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ de $(E_{z^0, u, f})$ alors*

$$\|(u \cdot \nabla)z\|_{L^2(0, T; V^*)} \leq \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^n)} \|z\|_{L^\infty(0, T; H)} \quad (2.5)$$

Démonstration. Pour tout $\xi \in V$:

$$\langle (u(t) \cdot \nabla)z(t), \xi \rangle = \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial z}{\partial x_i}(t, x)) \xi(x) dx \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

$$\langle (u(t) \cdot \nabla)z(t), \xi \rangle = - \int_{\Omega} z(t, x) (\sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i}) dx \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

L'état z étant une solution de $(E_{z^0, u, f})$, l'estimation (2.3) traduit l'appartenance de z à $L^\infty(0, T; H)$.

$$\langle (u(t) \cdot \nabla)z(t), \xi \rangle \leq \|z\|_{L^\infty(0, T; H)} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} \|\xi\| \quad p.p. \quad t \in [0, T]$$

On déduit l'inégalité (2.5) de la définition de $\|\cdot\|_{L^2(0, T; V^*)}$. □

L'état initial $z^0 \in H$ et la perturbation $f \in L^2(0, T; V^*)$ étant fixés, pour tout contrôle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$, on montre qu'il existe une unique solution de l'équation d'état $(E_{z^0, u, f})$; nous la notons $z_{z^0, u, f}$.

Proposition 2.5. *Si $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$, $z^0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V^*)$ alors il existe un unique état $z_{z^0, u, f} \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; H)$ qui est la solution de $(E_{z^0, u, f})$.*

Démonstration. Etape 1 – Commençons par démontrer l'unicité d'une solution au problème $(E_{z^0, u, f})$. Supposons l'existence de deux solutions z_1 et z_2 . Leur différence $z_1 - z_2$ notée z vérifie :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) + \Delta^2 z(t) = (u(t) \cdot \nabla)z(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Pour presque tout t appartenant à $[0, T]$, $z(t)$ appartient à V . Intégrons sur $[0, t]$ le produit de dualité ci-dessous.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \dot{z}(\tau), z(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \langle \Delta^2 z(\tau), z(\tau) \rangle d\tau \\ &= \int_0^t \langle (u(\tau) \cdot \nabla)z(\tau), z(\tau) \rangle d\tau \end{aligned}$$

On vérifie avec la formule de Green que le membre de droite est nul.

$$\frac{1}{2} |z(t)|^2 + \int_0^t \langle \Delta^2 z(\tau), z(\tau) \rangle d\tau = 0$$

La positivité du bilaplacien permet de conclure à la nullité de z pour presque tout t appartenant à $[0, T]$.

Etape 2 – Le problème $(E_{z^0, u, f})$ est posé dans un espace de dimension infinie. L'unicité démontrée ci-dessus permet la mise en oeuvre de la méthode d'approximation de Galerkin qui consiste à résoudre des problèmes approchés dans une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces de dimensions finies. Chaque problème approché est plus facile à résoudre que le problème initial et admet une unique solution. On construit ainsi une suite de solutions dont on montre la convergence quand la dimension des espaces d'approximation tend vers l'infini. (Cette convergence se démontre à l'aide des estimations a priori des états.) La dernière étape de la démonstration d'existence est la preuve que cette limite est la solution du problème $(E_{z^0, u, f})$.

Nous avons démontré ci-dessus les estimations a priori (2.2), (2.3) et (2.4) ainsi que l'unicité de la solution. En ce qui concerne l'existence de solutions approchées et le passage à la limite, nous nous référons respectivement aux sections 6.2 (page 123) et 6.4 (pages 129 à 135) du théorème 5.1 de Clérin [10]. \square

Remarque 2.6. Ici l'opérateur bilinéaire est de la forme $(u \cdot \nabla)z$ tandis que chez [10] l'existence d'une solution est établie pour une classe générale de problèmes dont le terme bilinéaire est de la forme $u \cdot z$. La proposition ci-dessus n'est pas un cas particulier de ce résultat.

2.2. Le problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_f) consiste à minimiser le coût

$$J(z, u) = \int_0^T \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt$$

pour des paires admissibles $(z_{z^0, u, f}, u)$.

Lemme 2.7 (cf. [1], proposition 3.1, p. 146). *L'état initial $z^0 \in H$ étant fixé, pour toute perturbation $f \in L^2(0, T; V^*)$, il existe une paire optimale que nous noterons $(z_f, u_f) \in [W(0, T) \cap L^\infty(0, T; H)] \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ telle que z_f soit l'unique solution de l'équation $(E_{z^0, u_f, f})$ et telle que le coût $J(z_f, u_f)$ soit minimal.*

Dans [1], Addou et Benbrik considèrent que la perturbation est nulle car ils n'étudient pas la sensibilité du problème. Au contraire, ici, nous tenons compte de ce terme. Sous réserve que l'état initial z^0 et les perturbations f soient assez petits, i.e. sous la condition (1.2), la paire optimale est unique.

Lemme 2.8 (cf. [1], lemma 3.1 et corollary 3.2, p. 150 et 151). *Si $|z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors la paire optimale (z_f, u_f) est unique dans $[W(0, T) \cap L^\infty(0, T; H)] \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$.*

Nous exploitons l'unicité du contrôle optimal pour établir que les contrôles optimaux sont bornés.

Lemme 2.9. *Supposons l'hypothèse (1.2) vérifiée, alors l'unique contrôle optimal associé à une perturbation $f \in L^2(0, T; V^*)$, noté u_f , est borné :*

$$\|u_f\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{3\sqrt{2}}. \quad (2.6)$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, écrivons les conditions nécessaires d'optimalité du contrôle u_f (cf. [1], proposition 2.1 p. 147)

$$(u_f)_i(t) = -\langle p_f(t), \frac{\partial z_f}{\partial x_i}(t) \rangle_{V \times H} \quad p.p. \quad t \in [0, T] \quad (2.7)$$

où p_f est l'état adjoint associé à l'état z_f . C'est l'unique solution de l'équation adjointe (1.4).

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) + \Delta^2 p(t) = -(u_f(t) \cdot \nabla)p(t) + z_f(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{aligned} q(t) &:= p(T - t), \\ v(t) &:= -u_f(T - t), \end{aligned}$$

et

$$g(t) := z_f(T - t),$$

l'équation adjointe ci-dessus s'écrit sous la forme $(E_{0,v,g})$.

$$\begin{cases} \dot{q}(t) + \Delta^2 q(t) = (v(t) \cdot \nabla)q(t) + g(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

L'estimation a priori (2.2) fournit successivement les majorations

$$\|q\|_{L^2(0,T;V)} \leq \|z_f\|_{L^2(0,T;V)}$$

puis

$$\|p_f\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|z^0| + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)}.$$

L'hypothèse (1.2) assure l'unicité du contrôle optimal associé à f .

$$\|u_f\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \|p_f\|_{L^2(0,T;V)} \|z_f\|_{L^\infty(0,T;H)}$$

On en déduit la majoration ci-dessous.

$$\|u_f\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(|z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)})^2$$

L'hypothèse (1.2) permet d'obtenir la majoration annoncée. □

3. Stabilité de la valeur optimale

Sous l'hypothèse (1.2), nous avons démontré ci-dessus que les contrôles optimaux étaient bornés. Ici, nous établissons leur régularité relativement aux perturbations sur les ensembles

$$F_\alpha := \{f \in L^2(0, T; V^*) \mid |z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0, T; V^*)} \leq \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}\}.$$

On pourra alors en déduire le théorème 1.1, c'est à dire que la fonction valeur optimale est elle-même localement lipschitzienne par rapport aux perturbations sur l'ensemble

$$\{f \in L^2(0, T; V^*) \mid |z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0, T; V^*)} < \frac{1}{\sqrt{3}}\}.$$

3.1. Régularité des contrôles

Lemme 3.1. *Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, considérons deux perturbations f_1 et f_2 appartenant à F_α , alors les contrôles optimaux u_1 et u_2 , associés respectivement aux perturbations f_1 et f_2 , sont tels que :*

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^n)} \leq \frac{2\alpha}{1 - 3\alpha^2} \|f_2 - f_1\|_{L^2(0, T; V^*)} \quad (3.1)$$

Démonstration. Notons z_1 et z_2 deux états associés respectivement aux deux contrôles optimaux u_1 et u_2 . Les conditions d'optimalité (2.7) s'écrivent pour $1 \leq i \leq n$:

$$u_{2,i}(t) - u_{1,i}(t) = -\langle p_2(t), \frac{\partial z_2}{\partial x_i}(t) \rangle + \langle p_1(t), \frac{\partial z_1}{\partial x_i}(t) \rangle.$$

$$u_{2,i}(t) - u_{1,i}(t) = -\langle p_2(t), \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial x_i}(t) \rangle - \langle (p_2 - p_1)(t), \frac{\partial z_1}{\partial x_i}(t) \rangle$$

Nous obtenons la majoration ci-dessous.

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} &\leq \|p_2\|_{L^\infty(0,T;H)} \|z_2 - z_1\|_{L^2(0,T;V)} \\ &\quad + \|p_2 - p_1\|_{L^2(0,T;V)} \|z_1\|_{L^\infty(0,T;H)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour $j = 1$ ou 2 , utilisons l'estimation a priori (2.3) et le lemme 2.4 afin de majorer les états adjoints p_j associés aux états z_j .

$$\|p_j\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \|z_j\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \alpha \quad (3.3)$$

L'unique solution de $(E_{0,u_2,((u_2-u_1)\cdot\nabla)z_1+f_2-f_1})$ est $z_2 - z_1$. Pour cette équation, le lemme 2.1 et les estimations a priori (2.2) et (2.3) permettent d'obtenir la majoration ci-dessous.

$$\|z_2 - z_1\|_{L^2(0,T;V)} \leq \alpha \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} \quad (3.4)$$

En ce qui concerne l'équation adjointe $(EA_{0,-(u_2-u_1),z_2-z_1})$ dont l'unique solution est $p_2 - p_1$, on a :

$$\|p_2 - p_1\|_{L^2(0,T;V)} \leq 2\alpha \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;V^*)}. \quad (3.5)$$

En synthèse, on utilise les majorations (3.3), (3.4), (3.5) et (2.3) dans (3.2) pour obtenir :

$$\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq \alpha(3\alpha \|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + 2\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;V^*)}).$$

On déduit la majoration (3.1) de l'hypothèse : $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$. □

3.2. Stabilité de la valeur optimale

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 1.1 qui découle des résultats précédents.

Démonstration du théorème 1.1. Si $z^0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;V^*)$ vérifient l'inégalité (1.2) alors il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ tel que

$$|z^0| + \sqrt{2}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

Considérons deux perturbations f_1 et f_2 dans la boule ouverte de l'espace $L^2(0,T;V^*)$ centrée en f et de rayon $\frac{\alpha - |z^0|}{\sqrt{2}}$. Notons (z_1, u_1) et (z_2, u_2) les paires optimales associées respectivement à f_1 et f_2 . Quitte à échanger

ces deux paires de façon à avoir le second membre ci-dessous positif, on a l'égalité :

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| = \|z_2\|_{L^2(0,T;V)}^2 - \|z_1\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 - \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2.$$

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| = (\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} + \|z_1\|_{L^2(0,T;V)})(\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} - \|z_1\|_{L^2(0,T;V)}) + (\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})(\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} - \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})$$

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| \leq (\|z_2\|_{L^2(0,T;V)} + \|z_1\|_{L^2(0,T;V)})\|z_2 - z_1\|_{L^2(0,T;V)} + (\|u_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)})\|u_2 - u_1\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}.$$

Majorons le membre de droite de cette inégalité à l'aide de l'estimation a priori (2.2), de l'inégalité (3.4), en utilisant le fait que les contrôles optimaux sont bornés (cf. (2.6) du lemme 2.9) et avec la majoration (3.1) du lemme 3.1 pour obtenir :

$$|\varphi(f_2) - \varphi(f_1)| \leq \frac{\alpha\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{4}{1 - 3\alpha^2}\right) \|f_2 - f_1\|_{L^2(0,T;V^*)}$$

où l'hypothèse $\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ assure la positivité du majorant. \square

4. Dérivées directionnelles de la valeur optimale

Nous montrons que la fonction valeur optimale φ est directionnellement différentiable en zéro. Dans un premier temps, l'existence d'une application qui associe un contrôle optimal à une perturbation est établie en appliquant le théorème des fonctions implicites au système d'optimalité. Nous montrons ensuite la régularité de cette application.

Soit le lagrangien du problème de contrôle optimal. Pour tout (z, u, p, f) appartenant à $W(0, T) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n) \times W(0, T) \times L^2(0, T; V^*)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z, u, p, f) := & J(z, u) + \langle \dot{z} + \Delta^2 z - (u \cdot \nabla)z - f, p \rangle_{L^2(0,T;V^*) \times L^2(0,T;V)} \\ & + (z(0) - z^0, p(0)). \end{aligned}$$

Soit (\bar{z}, \bar{u}) la paire optimale et \bar{p} l'adjoint associés à la perturbation de référence nulle. Rappelons que \bar{p} est l'unique solution de l'équation adjointe (1.4). Pour alléger les notations, nous noterons $\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p}, 0)$ et

des indices permettront d'identifier les dérivations. Les conditions nécessaires d'optimalité en $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$ se traduisent par la nullité du gradient de ce lagrangien.

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}}_z \\ \bar{\mathcal{L}}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{W(0,T)} \\ 0_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Explicitement, pour tout $(\delta z, \delta u)$ appartenant à $W(0, T) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} 2((\bar{z}, \delta z)) + ((\dot{\delta}z + \Delta^2 \delta z - (\bar{u} \cdot \nabla) \delta z, \bar{p})) + (\delta z(0), \bar{p}(0)) = 0 \\ 2\langle \bar{u}, \delta u \rangle_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n), L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} + ((-\delta u \cdot \nabla) \bar{z}, \bar{p}) = 0. \end{cases}$$

4.1. Coercivité du hessien pour les directions critiques

Dans la suite, nous imposons la condition (1.2) de petitesse de l'état initial et des perturbations afin d'assurer l'unicité de la solution optimale. La démonstration de la coercivité du hessien pour les directions critiques utilise l'estimation du terme bilinéaire (4.4) et donc, implicitement, le fait que les contrôles optimaux sont bornés.

Lemme 4.1. *Soit (\bar{z}, \bar{u}) qui vérifie les conditions nécessaires du premier ordre (4.1). Sous la condition (3.6), pour tous $(\delta z, \delta u) \in W(0, T) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ vérifiant*

$$\begin{cases} \dot{\delta}z + \Delta^2 \delta z = (\bar{u} \cdot \nabla) \delta z + (\delta u \cdot \nabla) \bar{z} \quad p.p. \quad t \in [0, T] \\ \delta z(0) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

on a

$$\|\delta z\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq \frac{7}{3\sqrt{3}} \|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 \quad (4.3)$$

et

$$((\delta u \cdot \nabla) \delta z, \bar{p}) \leq \frac{1}{3} \|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 \quad (4.4)$$

où \bar{p} est l'état adjoint associé à la perturbation nulle (i.e. la solution du système (1.4)).

Démonstration. Si δz vérifie (4.2) alors c'est une solution de $(E_{0, \bar{u}, (\delta u \cdot \nabla) \bar{z}})$. En particulier δz appartient à $L^\infty(0, T; H)$ ainsi l'estimation a priori (2.3) fournit la majoration :

$$\|\delta z\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \sqrt{2} \|(\delta u \cdot \nabla) \bar{z}\|_{L^2(0,T;V^*)}.$$

D'après la condition (3.6) et l'inégalité (3.3) :

$$\|\bar{z}\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } \|\bar{p}\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

La majoration du terme bilinéaire (2.5) (cf. lemme 2.4) permet d'en déduire (4.4) puis l'on applique l'estimation a priori (2.4) pour démontrer (4.3). \square

Proposition 4.2. *Soit (\bar{z}, \bar{u}) qui vérifie les conditions nécessaires du premier ordre (4.1), pour toute perturbation $g \in L^2(0, T; V^*)$, l'équation ci-dessous admet une solution unique dans $W(0, T)$:*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + \Delta^2 y(t) = (\bar{u}(t) \cdot \nabla) y(t) + g(t) & p.p. \quad t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

De plus, avec les notations du lemme 4.1 et sous la condition (3.6), il existe une constante strictement positive ρ telle que

$$(\delta z \quad \delta u) \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{zz} & \mathcal{L}_{zu} \\ \mathcal{L}_{uz} & \mathcal{L}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix} \geq \rho (\|\delta z\|_{W(0,T)}^2 + \|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2) \quad (4.6)$$

pour tous $(\delta z, \delta u) \in W(0, T) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \dot{\delta z} + \Delta^2 \delta z = (\bar{u} \cdot \nabla) \delta z + (\delta u \cdot \nabla) \bar{z} & p.p. \quad t \in [0, T] \\ \delta z(0) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Démonstration. L'équation (4.5) admet une solution unique car elle est de la forme $(E_{0,\bar{u},g})$ (voir la proposition 2.5). Il nous reste à démontrer la condition de coercivité (4.6) pour les directions critiques, i.e. pour δu et δz qui vérifient (4.7). Notons :

$$\bar{H}(\delta z, \delta u)^2 := (\delta z \quad \delta u) \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}}_{zz} & \bar{\mathcal{L}}_{zu} \\ \bar{\mathcal{L}}_{uz} & \bar{\mathcal{L}}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \end{pmatrix}.$$

$$\bar{H}(\delta z, \delta u)^2 = 2\|\delta z\|_{L^2(0,T;V)}^2 + 2((\delta u \cdot \nabla) \delta z, \bar{p}) + 2\|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2$$

Soit γ un paramètre inférieur à deux.

$$\begin{aligned} \bar{H}(\delta z, \delta u)^2 &\geq \gamma (\|\delta z\|_{W(0,T)}^2 - \|\dot{\delta z}\|_{L^2(0,T;V^*)}^2) \\ &\quad + 2((\delta u \cdot \nabla) \delta z, \bar{p}) + 2\|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de coercivité cherchée se déduit des majorations (4.3) et (4.4).

$$\bar{H}(\delta z, \delta u)^2 \geq \gamma \|\delta z\|_{W(0,T)}^2 + \left(\frac{4}{3} - \gamma \frac{7}{3\sqrt{3}}\right) \|\delta u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2$$

En effet, choisir γ strictement inférieur à $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ permet de définir une constante strictement positive notée ρ .

$$\rho := \min\left\{\gamma, \frac{4}{3} - \gamma \frac{7}{3\sqrt{3}}\right\}$$

Par exemple :

$$\rho = \frac{4\sqrt{3}}{7 + 3\sqrt{3}} = \gamma = \frac{4}{3} - \gamma \frac{7}{3\sqrt{3}}.$$

□

4.2. Dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale en zéro

Notons $\bar{\mathcal{H}}$ l'opérateur hessien du lagrangien en $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$.

$$\bar{\mathcal{H}}(\delta z, \delta u, \delta p)^2 := \begin{pmatrix} \delta z & \delta u & \delta p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}}_{zz} & \bar{\mathcal{L}}_{zu} & \bar{\mathcal{L}}_{zp} \\ \bar{\mathcal{L}}_{uz} & \bar{\mathcal{L}}_{uu} & \bar{\mathcal{L}}_{up} \\ \bar{\mathcal{L}}_{pz} & \bar{\mathcal{L}}_{pu} & \bar{\mathcal{L}}_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta u \\ \delta p \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3. *Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 4.2, il existe un voisinage de $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$ dans $W(0, T) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^n) \times W(0, T)$ noté $\mathcal{V}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$, un voisinage de 0 dans $L^2(0, T; V^*)$ noté $\mathcal{V}(0)$ et des applications de classe C^1 :*

$$(\zeta, \chi, \pi) : \mathcal{V}(0) \rightarrow \mathcal{V}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$$

qui ont les propriétés suivantes.

- (1) *Pour tout $f \in \mathcal{V}(0)$, $(\zeta(f), \chi(f), \pi(f))$ est l'unique point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité (4.1).*
- (2) $(\zeta(0), \chi(0), \pi(0)) = (\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$.
- (3) *La dérivée directionnelle de (ζ, χ, π) dans la direction δf vérifie*

$$\bar{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \zeta'(0)(\delta f) \\ \chi'(0)(\delta f) \\ \pi'(0)(\delta f) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}}_{zf}(\bar{x}, 0)(\cdot, \delta f) \\ \bar{\mathcal{L}}_{uf}(\bar{x}, 0)(\cdot, \delta f) \\ \bar{\mathcal{L}}_{pf}(\bar{x}, 0)(\cdot, \delta f) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Compte tenu de la proposition 4.2, notamment de l'inégalité de coercivité (4.6) et d'après le lemme 2.3. de [13], $\bar{\mathcal{H}}$ admet un inverse borné. Le théorème des fonctions implicites appliqué à l'égalité (4.1) nous permet de conclure. □

Nous déduisons de ce qui précède la formule (1.3) de la proposition 1.2.

Démonstration. Soit $\delta f \in L^2(0, T; V^*)$, $(\zeta(\delta f), \chi(\delta f), \pi(\delta f))$ vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité nous avons l'égalité ci-dessous.

$$\varphi(f) = J(\zeta(f), \chi(f)) = \mathcal{L}(\zeta(f), \chi(f), \pi(f), f)$$

$$\varphi'(0; \delta f) = \bar{\mathcal{L}}_z(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_u(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_p(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_f(\delta f)$$

Par composition des dérivées l'on a :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}(\zeta(\cdot), \chi(\cdot), \pi(\cdot), f))'(0; \delta f) \\ &= \bar{\mathcal{L}}_z(\zeta'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_u(\chi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_p(\pi'(0)(\delta f)) + \bar{\mathcal{L}}_f(\delta f) = 0. \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre montrent que les trois premiers termes sont nuls. On en déduit la dérivée directionnelle de la fonction valeur optimale en 0 dans la direction δf :

$$\bar{\mathcal{L}}_f(\delta f) = -\langle \delta f, \bar{p} \rangle_{L^2(0, T; V^*) \times L^2(0, T; V)}.$$

Les dérivées directionnelles de la fonction valeur optimale φ existent dans toutes les directions $\delta f \in L^2(0, T; V^*)$ et $\varphi'(0; \cdot)$ est une forme linéaire sur $L^2(0, T; V^*)$ donc φ est différentiable au sens de Gâteaux en 0. L'application $f \mapsto (\zeta(f), \chi(f), \pi(f))$ est de classe C^1 sur un voisinage $\mathcal{V}(0_{L^2(0, T; V^*)})$ et les développements au premier ordre des solutions dans la direction δf sont :

$$\begin{aligned} \zeta(0 + \tau \delta f) &= \bar{z} + \tau \zeta'(0)(\delta f) + o(\tau) \\ \chi(0 + \tau \delta f) &= \bar{u} + \tau \chi'(0)(\delta f) + o(\tau) \\ \pi(0 + \tau \delta f) &= \bar{p} + \tau \pi'(0)(\delta f) + o(\tau) \end{aligned}$$

En développant au second ordre la valeur optimale

$$\varphi(0 + \tau \delta f) = \mathcal{L}(\zeta(0 + \tau \delta f), \chi(0 + \tau \delta f), \pi(0 + \tau \delta f), 0 + \tau \delta f)$$

l'on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(0 + \tau \delta f) &= \varphi(0) - \tau(\langle \delta f, \bar{p} \rangle) \\ &+ \tau^2(\|\zeta'(0)(\delta f)\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|\chi'(0)(\delta f)\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^n)}^2 \\ &- 2(\langle (\chi'(0)(\delta f)) \cdot \nabla \zeta'(0)(\delta f), \bar{p} \rangle) + o(\tau^2). \end{aligned}$$

L'obtention du développement de Taylor ci-dessus implique l'existence de la dérivée première de φ en 0 ainsi que la continuité de cette dérivée première. Avec la Gâteaux-différentiabilité de φ en 0 nous en déduisons la différentiabilité au sens de Fréchet de φ au voisinage de 0. \square

Remarques 4.4.

- (1) L'obtention du développement de Taylor n'entraîne pas l'existence de dérivées d'ordres supérieurs à un.
- (2) L'inégalité de coercivité de l'opérateur hessien du lagrangien (4.6) assure la positivité du coefficient de τ^2 .
- (3) Les fonctions ζ , χ et π ne sont pas connues explicitement. Cependant, d'un point de vue numérique, le coefficient de τ^2 est la valeur minimale du problème quadratique tangent à (\mathcal{P}_0) . En effet, l'équation (3) de la proposition 4.3 peut s'interpréter en tant que système d'optimalité du problème d'optimisation dont le coût est quadratique et la contrainte linéaire (voir [5], remark 4.126, p. 369). Minimiser :

$$\|h_1\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|h_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2 - 2((h_2 \cdot \nabla)h_1, \bar{p})$$

pour les directions critiques (h_1, h_2) , i.e. telles que :

$$\dot{h}_1 + \Delta^2 h_1 = (\bar{u} \cdot \nabla)h_1 + (h_2 \cdot \nabla)\bar{z} \quad p.p. \quad t \in [0, T].$$

- (4) De plus, ρ étant la constante de l'inégalité de coercivité (4.6), pour toute constante λ telle que $\lambda < \frac{1}{2}\rho$ on peut choisir les voisinages $\mathcal{V}(0_{L^2(0,T;H)})$ et $\mathcal{V}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{p})$ de telle façon que la condition de croissance quadratique ci-dessous soit vérifiée (cf. [5], theorem 4.125, p. 368). Pour tout f appartenant à $\mathcal{V}(0_{L^2(0,T;H)})$:

$$J(\zeta(f), \chi(f)) \geq J(\bar{z}, \bar{u}) + \lambda(\|\zeta(f) - \bar{z}\|_{W(0,T)}^2 + \|\chi(f) - \bar{u}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}^2).$$

Références

- [1] A. ADDOU & A. BENBRIK – « Existence and uniqueness of optimal control for a distributed-parameter bilinear system », *J. Dynam. Control Systems* **8** (2002), no. 2, p. 141–152.
- [2] V. BARBU & T. PRECUPANU – *Convexity and optimization in banach spaces*, romanian éd., Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 10, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986.
- [3] J. F. BONNANS – « Bilinear optimal control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation », *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), no. 2, p. 451–467.

- [4] ———, *Optimisation continue*, Dunod, Paris, 2006, Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI.
- [5] J. F. BONNANS & A. SHAPIRO – *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] M. E. BRADLEY, S. LENHART & J. YONG – « Bilinear optimal control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation », *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), no. 2, p. 451–467.
- [7] H. BRÉZIS – *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [8] C. BRUNI, G. DIPILLO & G. KOCH – « Bilinear systems : an appealing class of “nearly linear” systems in theory and applications », *IEEE Trans. Automatic Control* **AC-19** (1974), p. 334–348.
- [9] J.-M. CLÉRIN – *Problèmes de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles d’évolution*, Thèse, LANLG, Université d’Avignon, 2009, Disponible sur : <http://tel.archives-ouvertes.fr>.
- [10] ———, « Équations d’état bien posées en contrôle bilinéaire », *Rev. Roumaine Math. Pures et Appl.* **56** (2011), no. 2, p. 115–136 (electronic).
- [11] I. M. GEL’FAND & N. Y. VILENKIN – *Generalized functions. Vol. 4 : Applications of harmonic analysis*, Translated by Amiel Feinstein, Academic Press, New York, 1964.
- [12] R. GRIESSE & B. VEXLER – « Numerical sensitivity analysis for the quantity of interest in PDE-constrained optimization », *SIAM J. Sci. Comput.* **29** (2007), no. 1, p. 22–48 (electronic).
- [13] K. ITO & K. KUNISCH – « Augmented Lagrangian-SQP-methods in Hilbert spaces and application to control in the coefficients problems », *SIAM J. Optim.* **6** (1996), no. 1, p. 96–125.
- [14] ———, « Optimal bilinear control of an abstract Schrödinger equation », *SIAM J. Control Optim.* **46** (2007), no. 1, p. 274–287 (electronic).
- [15] A. Y. KHAPALOV – « Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term : a

J.-M. CLÉRIN

- qualitative approach », *SIAM J. Control Optim.* **41** (2003), no. 6, p. 1886–1900 (electronic).
- [16] H. MAURER & J. ZOWE – « First and second order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems », *Math. Programming* **16** (1979), no. 1, p. 98–110.
- [17] D. TRENTIN & J.-L. GUYANER – « Vibration of a master plate with attached masses using modal sampling method », *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (1994), no. 1, p. 235–245.
- [18] Y.-Y. YU – *Vibrations of elastic plates*, Springer, 1995.

JEAN-MARC CLÉRIN
Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et
Géométrie (EA 2151)
Université d'Avignon et des Pays de
Vaucluse
33 rue Louis Pasteur
84018 AVIGNON CEDEX
et
Iufm de Paris
Université Paris-Sorbonne (Paris IV)
10 rue Molitor
75016 PARIS CEDEX
FRANCE
jean-marc.clerin@paris.iufm.fr