

# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

AMMAR MOULAH ET SALSABIL NOUIRA

**Stabilisation polynomiale et analytique de l'équation des ondes sur un rectangle**

Volume 17, n° 2 (2010), p. 401-424.

[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2010\\_\\_17\\_2\\_401\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2010__17_2_401_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Stabilisation polynomiale et analytique de l'équation des ondes sur un rectangle

AMMAR MOULAH  
SALSABIL NOUIRA

## Résumé

On considère l'équation des ondes sur un rectangle avec un feedback de type Dirichlet. On se place dans le cas où la condition de contrôle géométrique n'est pas satisfaite (BLR Condition), ce qui implique qu'on n'a pas stabilité exponentielle dans l'espace d'énergie. On prouve qu'on peut trouver un sous espace de l'espace d'énergie tel qu'on a stabilité exponentielle. De plus, on montre un résultat de décroissance polynomiale pour toute donnée initiale régulière.

*Polynomial and analytic stabilization of a wave equation*

## Abstract

the wave equation on a rectangle surface with feedback, that does not satisfy the classical geometric control condition BLR. We prove an exponential stability result for some subspace of the energy space. Moreover, we give a polynomial stability result for all regular initial data.

## 1. Introduction et résultat principal

Soient  $\Omega = (0, a\pi) \times (0, b\pi)$ , avec  $a, b > 0$ ;  $\Gamma_0 = \{0\} \times (0, b\pi)$  et  $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ . On considère l'équation des ondes avec conditions aux limites dissipatives.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = \frac{\partial}{\partial \nu}(G[\partial_t u]) & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \partial_t u(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

---

*Mots-clés*: Stabilisation, équations des ondes, inégalités d'observabilité, basses et hautes fréquences, décroissance polynomiale.

*Classification math.*: 35B40, 35L05, 34H05, 34H15, 93D15.

où  $G = (-\Delta)^{-1}: H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$  et  $\nu = \nu(x)$  désigne le vecteur normal unitaire sortant.

Pour  $\underline{u} = (u^0, u^1) \in E_0 = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe une unique solution  $u$  de (1.1)

$$u \in C((0, +\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty), H^{-1}(\Omega)).$$

De plus,  $u(t)$  satisfait l'estimation de l'énergie, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$E(0) - E(t) = \int_0^t \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial[G(\partial u/\partial s)]}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma_0 ds \quad (1.2)$$

avec

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right).$$

On considère le problème conservatif associé à (1.1)

$$\begin{cases} \partial_t^2 \phi - \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(x, 0) = u^0(x), \partial_t \phi(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ammari-Tucsnak [6] et Ammari [3] ont montré l'équivalence entre le problème de stabilité exponentielle et l'inégalité d'observabilité exacte :

$$\exists T, C > 0 \text{ t.q. } \int_0^T \left\| \frac{\partial[G(\partial_t \phi)]}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 dt \geq C \|\underline{u}\|_{E_0}^2, \quad \forall \underline{u} \in E_0. \quad (1.4)$$

On note par  $S_T$  l'ensemble suivant :

$$S_T = \{ \underline{u} \in E_0 / (\phi, \partial_t \phi) \text{ satisfait (1.4)} \}.$$

Il est clair que la condition de contrôle géométrique n'est pas satisfaite (voir [7] et [9]) ce qui implique que l'espace  $S_T$  est strictement inclu dans l'espace d'énergie  $L^2 \times H^{-1}$ .

La question de contrôlabilité analytique a été bien étudiée et on peut citer tout particulièrement [1, 2, 11, 10, 13] où ils ont montré des résultats permettant d'avoir des renseignements sur l'espace des données contrôlables, soit dans le cas des géométries particulières, soit sous des hypothèses plus générales. Plus tard, [3]-[5] et [8] ont étudié la stabilisation de l'équation des ondes dans le cas des géométries particulières.

Le but de cet article est d'étudier la stabilisation analytique de l'équation des ondes, sur un rectangle, par l'intermédiaire d'un feedback de type Dirichlet.

Le plan de cet article est comme ainsi. Dans la Section 2, on détermine quelques résultats d'observabilité à hautes et à basses fréquences. Dans la Section 3 on donne quelques notions de stabilisation des systèmes d'évolution. Dans les Sections 4 et 5, on donne les preuves des résultats principaux.

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on introduit les espaces suivants :

$$X_{0,\alpha} := \left\{ \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{n,k} e^{-\alpha n} \sin\left(\frac{kx}{a}\right) \sin\left(\frac{ny}{b}\right) / (a_{n,k}) \in l^2 \right\};$$

$$X_{1,\alpha} := \left\{ \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{n,k} e^{-\alpha n} \sin\left(\frac{kx}{a}\right) \sin\left(\frac{ny}{b}\right) / \frac{a_{n,k}}{\sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}} \in l^2 \right\};$$

$$X_\alpha := X_{0,\alpha} \times X_{1,\alpha}.$$

On remarque que si  $\alpha' > \alpha$ , alors  $X_{\alpha'} \subset X_\alpha$  et que  $X_0 = E_0$ . On peut aussi remarquer que tous les éléments de  $X_\alpha$  sont prolongeables par holomorphie dans la bande complexe  $|Imy| < b\alpha$ . Inversement, si une fonction  $u(x, y) = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{kx}{a}\right) \sin\left(\frac{ny}{b}\right)$  de l'espace  $L^2(\Omega)$  est prolongeable par holomorphie dans la bande complexe  $|Imy| < b\alpha + \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$ , alors on peut prouver qu'elle est dans  $X_{0,\alpha}$ .

Pour donner une caractérisation de l'espace  $S_T$ , on introduit :

$$\alpha_S(T) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R}_+; X_\alpha \subset S_T \}.$$

On a donc le premier résultat principal :

**Théorème 1.1.** (1) *Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $C_\delta > 0$  telle que pour tout  $T > T_S = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ ,*

$$\alpha_S(T) \leq \frac{C_\delta}{bT^{1-\delta}}.$$

(2) *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $T > T_S$ ,*

$$\alpha_S(T) \geq \frac{c}{bT^2}.$$

(3) *Pour  $\alpha > \alpha_S(T)$  il existe deux constantes  $\gamma$ , et  $c > 0$  telles que pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$E(t) \leq c e^{-\gamma t} E(0), \quad \forall \underline{u} \in X_\alpha.$$

*Remarque 1.2.* La première assertion du théorème précédent implique que toute donnée initiale analytique est dans un certain  $S_T$  pour  $T$  suffisamment grand, i.e., toute donnée initiale dont les coefficients de Fourier décroissent en  $y$  comme  $e^{-\alpha n}$  est dans  $S_T$ , si  $T$  est plus grand que  $T(\alpha) = \sqrt[1-\delta]{\frac{C_\delta}{b\alpha}}$ .

Comme le système décrit par (1.1) n'est pas exponentiellement stable dans l'espace d'énergie  $E_0$ , on a alors le résultat de décroissance polynomiale, pour toute donnée initiale régulière, suivant :

**Théorème 1.3.** *Le système décrit par (1.1) est polynomialement stable dans*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) ; u|_{\partial\Omega} = \partial_\nu[G(v)] 1_{|\Gamma_0} \right\},$$

i.e. il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  on a :

$$E(t) \leq \frac{C}{1+t} \|(u^0, u^1)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^2, \forall t \geq 0.$$

## 2. Inégalités d'observabilité

Dans cette section on va donner les inégalités d'observabilité à hautes et à basses fréquences concernant les solutions du système (1.3) (qui sont de même type que ceux dans [12]) et déterminer explicitement les constantes qui interviennent dans ces inégalités en fonction de la fréquence de coupure.

On considère alors la décomposition de l'espace des données initiales suivante :

**Définition 2.1.** Soit  $\underline{u} = \left( \sum_{n,k \in \mathbb{N}^*} a_{n,k}^j \sin\left(\frac{kx}{a}\right) \sin\left(\frac{nx}{b}\right) \right)_{j=1,2}$  une donnée initiale dans  $E_0$ . On pose

$$\begin{aligned} \underline{u} \in E_0^n & \text{ si } m \neq n \Rightarrow a_{m,k}^j = 0, \\ \underline{u} \in E_0^{(1)} & \text{ si } k > \frac{a^2}{b^2}n \Rightarrow a_{n,k}^j = 0, \\ \underline{u} \in E_0^{(2)} & \text{ si } k \leq \frac{a^2}{b^2}n \Rightarrow a_{n,k}^j = 0, \\ \underline{u} \in E_0^{i,n} & \iff E_0^{(i)} \cap E_0^n ; i = (1, 2). \end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'espace  $E_0$  sous la forme :

$$\begin{cases} E_0 &= \left( \bigoplus_n E_0^{1,n} \right) \oplus \left( \bigoplus_n E_0^{2,n} \right), \\ \underline{u} &= \underline{u}^1 + \underline{u}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\underline{u}_n^1 + \underline{u}_n^2). \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} e_{n,k}^1 &= \left( \sqrt{\frac{2}{ab\pi^2}} \sin\left(\frac{k}{a}x\right) \sin\left(\frac{n}{b}y\right), 0 \right); \\ e_{n,k}^2 &= \left( 0, \sqrt{\frac{2}{ab\pi^2}} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}} \sin\left(\frac{k}{a}x\right) \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right). \end{aligned}$$

La suite  $(e_{n,k}^1, e_{n,k}^2)$  forme une base Hilbertienne de  $E_0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si on restreint les données initiales dans  $E_0^n$ , alors on a l'inégalité d'observabilité

$$\|u\|_{E_0}^2 \leq C(n, T) \left\| \frac{\partial[G(u')]}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Gamma_0 \times (0, T))}^2. \tag{2.1}$$

Comme l'hypothèse de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] n'est pas satisfaite, alors la constante  $C(n, T)$  n'est pas uniformément bornée en  $n$ . Pour ceci, on utilise la décomposition précédente : les basses fréquences pour lesquelles  $C(n, T)$  tend vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$  et les hautes fréquences pour lesquelles on a le contrôle géométrique.

**Proposition 2.2.** (*basses fréquences*). *Pour tout  $\epsilon > 0$  et  $\delta > 0$  il existe un temps  $T_1(\epsilon, \delta) \leq \frac{C_\delta}{\epsilon^{1+\delta}}$  et une constante  $C_{\epsilon, \delta}$  tels que pour tout entier non nul  $n$  et pour toute donnée initiale  $\underline{u} \in E_0^n$ , la solution du problème (1.3) vérifie*

$$\|\underline{u}^1\|_{E_0}^2 \leq C_{\epsilon, \delta} e^{2\frac{1}{5}\epsilon n} \int_0^{b\pi} \int_{-T_1(\epsilon, \delta)}^{T_1(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial G(\phi')}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy.$$

**Preuve :**

Comme le gap entre les fréquences tend vers zéro, dans le cas des basses fréquences, les inégalités de type Ingham n'auront pas lieu dans la preuve de cette proposition. L'idée donc d'après Allibert [1] est de construire une

suite des fonctions notée  $h^{k,n}$ , à support compact tels que pour tout  $j \neq k$ ,  $h^{k,n}(t)$  est orthogonale aux fonctions propres  $e^{\pm it\sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{j^2}{a^2}}}$ .

**Lemme 2.3.** *Pour tout entier impair  $q$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $T_1(q, \epsilon)$  plus petit que  $C_q \epsilon^{\frac{q+1}{1-q}}$  tels que pour tout couple  $(n, k_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on peut trouver une fonction  $h_{\epsilon,q}^{k_0,n} \in L^2$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (1)  $\text{supp}(h_{\epsilon,q}^{k_0,n}) \subset [-T_1(q, \epsilon), T_1(q, \epsilon)]$ .
- (2)  $\|h_{\epsilon,q}^{k_0,n}\|_{L^2} \leq C e^{2\frac{1}{b}\epsilon n}$ .
- (3) Si  $k \neq k_0$ ,  $\int h_{\epsilon,q}^{k_0,n}(t) e^{\pm it\sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}} dt = 0$ .
- (4) Si  $(n, k_0) \in I = \{(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / k \leq \frac{a^2}{b^2}n\}$ ,

$$\left| \int h_{\epsilon,q}^{k_0,n}(t) e^{\pm it\sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}} dt \right| \geq \frac{c}{(\frac{1}{b}n)^{N_q}}.$$

Les constantes dépendent uniquement de  $q$  et  $\epsilon$ . De plus, il est possible de choisir  $h_{\epsilon,q}^{k_0,n}$  paire ou impaire, qu'on la note  $h_{e\epsilon,q}^{k_0,n}$  dans le cas paire et  $h_{o\epsilon,q}^{k_0,n}$  dans le cas impaire.

Maintenant, soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\underline{u} \in E_0^n$ , on pose

$$\underline{u} = \sum_{k \leq \frac{a^2}{b^2}n} a_{n,k}^1 e_{n,k}^1 + a_{n,k}^2 e_{n,k}^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = \sum_{k \leq \frac{a^2}{b^2}n} \sqrt{\frac{2}{ab\pi}} a_{n,k}^1 \sin \frac{k}{a}x \sin \frac{n}{b}y \cos \lambda_{n,k}t \\ + \sqrt{\frac{2}{ab\pi}} \lambda_{n,k} a_{n,k}^2 \sin \frac{k}{a}x \sin \frac{n}{b}y \sin \lambda_{n,k}t. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial G(\phi')}{\partial x}(0, y, t) = \sum_{k \leq \frac{a^2}{b^2}n} \sqrt{\frac{2}{ab\pi}} \frac{k}{a} \sin \frac{n}{b}y \left( -\frac{a_{n,k}^1}{\lambda_{n,k}} \sin \lambda_{n,k}t + a_{n,k}^2 \cos \lambda_{n,k}t \right).$$

On note par  $K$  l'opérateur défini par

$$K : \quad \begin{aligned} E_0 &\rightarrow L^2(\Gamma_0) \\ \underline{u} &\rightarrow \frac{\partial[G(\phi')]}{\partial x}(0, y, t). \end{aligned}$$

Pour  $(k_0, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $k_0 \leq \frac{a^2}{b^2} n$  et  $L \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} &\int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n, k}^1 e_{n, k}^1 + a_{n, k}^2 e_{n, k}^2 \right) dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{2ab\pi}} \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \sum_{1 \leq k \leq L} a_{n, k}^1 \frac{k}{ia\lambda_{n, k}} \int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) (e^{-i\lambda_{n, k}t} - e^{i\lambda_{n, k}t}) dt \\ &\quad + a_{n, k}^2 \frac{k}{a} \int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) (e^{i\lambda_{n, k}t} + e^{-i\lambda_{n, k}t}) dt. \end{aligned}$$

Comme  $h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}$  est paire, on déduit que

$$\begin{aligned} &\int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n, k}^1 e_{n, k}^1 + a_{n, k}^2 e_{n, k}^2 \right) dt \\ &= - \sum_{1 \leq k \leq L} \sqrt{\frac{2}{ab\pi}} \frac{k}{ia\lambda_{n, k}} a_{n, k}^1 \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) e^{i\lambda_{n, k}t} dt, \end{aligned}$$

Si  $L \geq k_0$ , alors de (3) du Lemme 2.3, on obtient

$$\begin{aligned} &\int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n, k}^1 e_{n, k}^1(x, y) + a_{n, k}^2 e_{n, k}^2(x, y) \right) (t) dt \\ &= - \frac{k_0 \sqrt{\frac{2}{ab\pi}}}{ia\lambda_{n, k_0}} a_{n, k_0}^1 \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) e^{i\lambda_{n, k_0}t} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $(n, k_0) \in I$  alors d'après la propriété (4) du lemme précédent, on a

$$\left| \int h_{e_\epsilon, q}^{k_0, n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n, k}^1 e_{n, k}^1 + a_{n, k}^2 e_{n, k}^2 \right) dt \right| \geq \frac{c}{n^{N_q}} \left| \frac{a_{n, k_0}^1}{\lambda_{n, k_0}} \right| \left| \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right|.$$



Si  $L$  tend vers l'infini, on trouve

$$\left| \frac{a_{n,k_0}^1}{\lambda_{n,k_0}} \right| \left| \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right| \leq \frac{1}{c} n^{N_q} \left| \int h_{e,\epsilon,q}^{k_0,n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n,k}^1 e_{n,k}^1 + a_{n,k}^2 e_{n,k}^2 dt \right) \right|. \quad (2.2)$$

De même on montre que

$$|a_{n,k_0}^2| \left| \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right| \leq \frac{1}{c} n^{N_q} \left| \int h_{o,\epsilon,q}^{k_0,n}(t) K \left( \sum_{k \leq L} a_{n,k}^1 e_{n,k}^1 + a_{n,k}^2 e_{n,k}^2 dt \right) \right|.$$

En utilisant la propriété (2) du Lemme 2.3 ainsi que (1), on trouve

$$|a_{n,k_0}^1|^2 \leq C n^{2(N_q+1)} e^{2\frac{1}{b}\epsilon n} \int_0^{b\pi} \int_{-T_1(q,\epsilon)}^{T_1(q,\epsilon)} |K\underline{u}|^2 dt dy,$$

$$|a_{n,k_0}^2|^2 \leq C n^{2N_q} e^{2\frac{1}{b}\epsilon n} \int_0^{b\pi} \int_{-T_1(q,\epsilon)}^{T_1(q,\epsilon)} |K\underline{u}|^2 dt dy.$$

Or,

$$\|\underline{u}\|_{E_0}^2 = \sum |a_{n,k}^1|^2 + |a_{n,k}^2|^2,$$

on obtient donc

$$\|\underline{u}\|_{E_0}^2 \leq C' n^{(2N_q+1)} e^{2\frac{1}{b}\epsilon n} \int_0^{b\pi} \int_{-T_1(q,\epsilon)}^{T_1(q,\epsilon)} |K\underline{u}|^2 dt dy,$$

avec  $T_1(q, \epsilon) \leq C_q \epsilon^{\frac{1+q}{1-q}} = \frac{C_\delta}{\epsilon^{1+\delta}}$  et  $\delta \rightarrow 0^+$  quand  $q \rightarrow +\infty$ , ce qui détermine la preuve de la Proposition 2.2.  $\square$

**Lemme 2.4.** (Hautes fréquences) Pour tout  $T_2 > 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ , il existe une constante  $C_{T_2} > 0$  telle que pour tout entier  $n > 0$  et toute donnée initiale  $\underline{u}$  dans  $E_0^{2,n}$  la solution du problème (1.3) satisfait

$$\|\underline{u}\|_{E_0}^2 \leq C_{T_2} \int_0^{b\pi} \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial[G(\partial_t \phi)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy.$$

*Preuve.* Pour  $\underline{u} \in E_0^{(2)}$ ,  $\phi(x, y, t)$  s'écrit

$$\phi(x, y, t) = \sum_{k > \frac{a^2}{b^2}n} a_{n,k} \sin \frac{kx}{a} \sin \frac{ny}{b} e^{it\lambda_{n,k}}$$

avec  $\lambda_{n,k} = \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$ . Comme

$$T_2 > 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} > \frac{2\pi}{\inf_{k > \frac{a^2}{b^2}n} \left( \sqrt{\frac{(k+1)^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \right)},$$

en utilisant l'inégalité d'Ingham [16], on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{b\pi} \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial[G(\partial_t\phi)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{ab\pi}{2} \int_0^{T_2} \left| \sum_{k > \frac{a^2}{b^2}n} \frac{ik}{a} \frac{a_{n,k}}{\lambda_{n,k}} e^{i\lambda_{n,k}t} dt \right|^2 \\ &\geq C_{T_2} \sum_{k > \frac{a^2}{b^2}n} \left| \frac{a_{n,k}}{\lambda_{n,k}} \right|^2. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\int_0^{b\pi} \int_0^{T_2} \left| \frac{\partial[G(\partial_t\phi)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy \geq C_{T_2} \|u\|_{E_0}^2.$$

□

### 3. Quelques notions de stabilisation des systèmes d'évolution

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_H$ , et soit l'opérateur auto-adjoint strictement positif  $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \rightarrow H$ , et de résolvante compacte. Pour  $\alpha \geq 0$ , on introduit l'espace de Hilbert  $H_\alpha = \mathcal{D}(A_1^\alpha)$ , avec la norme  $\|z\|_\alpha = \|A_1^\alpha z\|_H$ , et on note par  $H_{-\alpha}$  l'espace dual de l'espace  $H_\alpha$ , pour  $\alpha > 0 : H_{-\alpha} = H_\alpha^*$ . On note encore par  $A_1$  l'extension (ou la restriction) sur  $H_\alpha$ , de l'opérateur  $A_1$ , on a donc

$$A_1 : H_\alpha \rightarrow H_{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

où  $A_1$  l'opérateur non borné de  $H$ .

Introduisons, maintenant l'opérateur linéaire continu  $B_1 : U \rightarrow H_{-\frac{1}{2}}$ , avec  $U$  un autre espace de Hilbert identifié à son dual.

On considère le système suivant, décrit par

$$\ddot{w}(t) + A_1 w(t) + B_1 y(t) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1, \quad t \in [0, \infty), \tag{3.2}$$

$$y(t) = B_1^* \dot{w}(t), \quad t \in [0, \infty). \tag{3.3}$$

Le système (3.2)-(3.3) est bien posé :

Pour  $(w_0, w_1) \in H_{\frac{1}{2}} \times H$ , le problème (3.2)-(3.3) admet une unique solution

$$w \in C([0, \infty); H_{\frac{1}{2}}) \cap C^1([0, \infty); H)$$

telle que  $B_1^* w(\cdot) \in H^1(0, T; U)$ . De plus,  $w$  satisfait l'estimation de l'énergie, pour tout  $t \geq 0$

$$\|(w_0, w_1)\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H}^2 - \|(w(t), \dot{w}(t))\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H}^2 = 2 \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} B_1^* w(s) \right\|_U^2 ds. \quad (3.4)$$

De (3.4) on remarque que l'application  $t \mapsto \|(w(t), \dot{w}(t))\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H}^2$  est décroissante.

On considère le problème conservatif associé à (3.2)-(3.3) :

$$\ddot{\varphi}(t) + A_1 \varphi(t) = 0, \quad (3.5)$$

$$\varphi(0) = w_0, \quad \dot{\varphi}(0) = w_1. \quad (3.6)$$

On sait bien que (3.5)-(3.6) est bien posé dans  $H_1 \times H_{\frac{1}{2}}$  et dans  $H_{\frac{1}{2}} \times H$ . On considère, maintenant l'opérateur linéaire non borné

$$\mathcal{A}_d : \mathcal{D}(\mathcal{A}_d) \rightarrow H_{\frac{1}{2}} \times H, \quad \mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_1 & -B_1 B_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

où

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_d) = \left\{ (u, v) \in H_{\frac{1}{2}} \times H, A_1 u + B_1 B_1^* v \in H, v \in H_{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Le résultat ci-dessous, voir [6], montre que sous une certaine hypothèse de régularité, la stabilité exponentielle est équivalente à une inégalité d'observabilité forte et que la stabilité polynomiale est une conséquence de l'inégalité d'observabilité faible. Plus précisément, on a :

**Théorème 3.1** (Ammari-Tucsnak [6]). *On suppose que pour  $\gamma > 0$  on a*

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda = \gamma} \left\| \lambda B_1^* (\lambda^2 I + A_1)^{-1} B_1 \right\|_{\mathcal{L}(U)} < \infty. \quad (3.8)$$

Alors les assertions suivantes, sont vérifiées :

- (1) *Il existe deux constante  $C, \delta > 0$  telles que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $(w^0, w^1) \in H_{\frac{1}{2}} \times H$ , on a*

$$\|(w(t), \dot{w}(t))\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H} \leq C e^{-\delta t} \|(w^0, w^1)\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H},$$

si et seulement si il existe  $T, C > 0$  tels que :  $\forall (w_0, w_1) \in H_1 \times H_{\frac{1}{2}}$ , on a

$$\|B_1^* \varphi'(t)\|_{L^2(0,T;U)} \geq C \|(w_0, w_1)\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H}, \quad (3.9)$$

avec  $\varphi(t)$  est la solution du système (3.5)-(3.6).

(2) S'il existe  $T, C > 0$  et  $\alpha > -\frac{1}{2}$  tels que :  $\forall (w_0, w_1) \in H_1 \times H_{\frac{1}{2}}$ , on a

$$\|B_1^* \varphi'(t)\|_{L^2(0,T;U)} \geq C \|(w_0, w_1)\|_{H_{-\alpha} \times H_{-\alpha-\frac{1}{2}}}, \quad (3.10)$$

avec  $\varphi(t)$  est la solution de (3.5)-(3.6).

Alors il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $(w^0, w^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_d)$ , on a

$$\|(w(t), \dot{w}(t))\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H} \leq \frac{C_1}{(1+t)^{\frac{1}{4\alpha+2}}} \|(w^0, w^1)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_d)}. \quad (3.11)$$

## 4. Démonstration du Théorème 1.1

### 4.1. Majoration de $\alpha_S(T)$ :

Dans cette partie on montre la première assertion du Théorème 1.1, pour ceci on a besoin du lemme suivant inspiré de [14] (voir aussi [4]), qui permet de caractériser l'espace  $S_T$ .

**Lemme 4.1.** Soit  $v \in E_0$ , alors  $v \in S_T$  si et seulement si il existe une constante  $C_v > 0$  telle que pour toute donnée initiale  $\underline{u} = (u^0, u^1) \in E_0$ , la solution  $u$  du problème (1.3) satisfait

$$|\langle \underline{u}, v \rangle_{E_0}| \geq C_v \left\| \frac{\partial[G(\partial_t u)]}{\partial \nu}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))}.$$

On choisit donc  $\delta, \epsilon > 0$  et on prend  $v \in G_\epsilon$ . On peut écrire

$$v(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\frac{\epsilon n}{b}} v^n(x, y),$$

avec  $v^n(x, y) = V^n(x) \sin(n\frac{y}{b})$  et  $(\|v^n\|_{E_0})_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ .

Soit  $T(\epsilon, \delta) = \sup (T_1(\epsilon, \delta), 2\pi\sqrt{a^2 + b^2})$ . Comme  $T_1(\epsilon, \delta) \leq \frac{C}{\epsilon^{1+\delta}}$ , pour  $\epsilon$  suffisamment petit, alors  $T(\epsilon, \delta) \leq \frac{C}{\epsilon^{1+\delta}}$ .

Pour tout  $\underline{u} \in E_0$  et  $\underline{v} = (0, v)$ , on a

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{E_0}| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \langle e^{-\frac{\epsilon n}{b}} \underline{u}^n, \underline{v}^n \rangle_{E_0} \right|.$$

Donc

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{E_0}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\frac{\epsilon n}{b}} \|\underline{u}^n\|_{E_0} \|v^n\|_{E_0}. \quad (4.1)$$

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , et  $\forall \underline{u}^n \in E_0^n$ , on a

$$\|\underline{u}\|_{E_0}^2 = \|\underline{u}^1\|_{E_0}^2 + \|\underline{u}^2\|_{E_0}^2.$$

Alors, par la Proposition 2.2 et le Lemme 2.4

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_{E_0}^2 &\leq C_{\epsilon, \delta} e^{2\frac{\epsilon n}{b}} \int_0^{b\pi} \int_{-T_1(\epsilon, \delta)}^{T_1(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial_t u)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy \\ &\quad + C_T \int_0^{b\pi} \int_0^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial_t u^2)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_{E_0}^2 &\leq C'_{\epsilon, \delta} e^{2\frac{\epsilon n}{b}} \int_0^{b\pi} \int_{-T(\epsilon, \delta)}^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial_t u)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy \\ &\quad + C_T \int_0^{b\pi} \int_0^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(u')]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy \\ &\quad + \int_0^{b\pi} \int_0^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(u^1)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_{E_0}^2 &\leq C''_{\epsilon, \delta} e^{2\frac{\epsilon n}{b}} \int_0^{b\pi} \int_{-T(\epsilon, \delta)}^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(u')]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy + \\ &\quad C_T \int_0^{b\pi} \int_0^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial_t u)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy + C' \|\underline{u}^1\|_{E_0}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la Proposition 2.2 entraîne que

$$\|\underline{u}\|_{E_0}^2 \leq C''_{\epsilon, \delta} e^{2\frac{\epsilon n}{b}} \int_0^{b\pi} \int_{-T(\epsilon, \delta)}^{T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(u')]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy.$$

Si on remplace cette inégalité dans (4.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 |\langle \underline{u}, v \rangle_{E_0}| &\leq \\
 C''_{\epsilon, \delta} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} &\sqrt{\int_0^{b\pi} \int_0^{2T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial u^n / \partial_t)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy} \left\| V^n(x) \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right\|_{E_0} \\
 &\leq C''_{\epsilon, \delta} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^{2T(\epsilon, \delta)} \left| \frac{\partial[G(\partial u^n / \partial_t)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dt dy} \\
 &\quad \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| V^n(x) \sin\left(\frac{n}{b}y\right) \right\|_{E_0}^2} \\
 &\leq C''_{\epsilon, \delta} C_v \left\| \frac{\partial[G(u^n)]}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_0 \times (0, 2T(\epsilon, \delta)))}.
 \end{aligned}$$

#### 4.2. Minoration de $\alpha_S(T)$ :

Dans cette section, on reprend la démonstration du Théorème 1.2 dans [1] avec des modifications techniques liées à la géométrie du domaine. Pour ceci, on utilise le fait que l'espace des données stabilisables  $S_T$  est contenu dans l'espace des données contrôlables qu'on notera  $F_T$ . Donc, on va caractériser les espaces  $X_\alpha$  et  $F_T$  par ses images par l'opérateur  $B$  introduit par Lebeau dans [13],

$$Bf(x, y) := \int e^{i\left(\frac{x}{a} \cdot \xi_1 + \frac{y}{b} \xi_2\right)} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|} d\xi$$

avec  $|\xi| = \sqrt{\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2}}$ .

On cherche alors l'espace  $F_T$  des données initiales  $(u_1(x), \partial_t u_1) /_{t=0}$  pour lesquelles il existe une fonction  $g \in L^2(\Gamma_0)$  telle que la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 = 0, & \Omega \times (0, +\infty), \\ u = g \chi_{\Gamma_0}, \\ (u_1, \partial_t u_1) /_{t=0} = \underline{u}_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

satisfait

$$(u_1, \partial_t u_1) /_{t=T} = 0$$

Avant d'utiliser l'opérateur  $B$ , on prolonge les solutions obtenues sur  $\mathbb{R}^2$  suivant les directions  $x, y$ .

Soit  $u_1$  la solution du problème précédent, on prolonge cette solution par antisymétrie en  $x \in [0, 2a\pi]$  et en  $y \in [0, 2b\pi]$  en posant

$$u_2(a\pi + x, y, t) = -u_2(a\pi - x, y, t), \quad u_2(x, b\pi + y, t) = -u_2(x, b\pi - y, t).$$

On note par  $g$  le prolongement antisymétrique sur  $[0, 2b\pi]$ . On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 = 0, & (0, 2a\pi) \times (0, 2b\pi) \times (0, +\infty), \\ u/x=0 = g(y, t), \quad u_2/x=2a\pi = -g(y, t), \\ (u_2, \partial_t u_2)/t=T = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Enfin, on peut prendre l'extension périodique de  $u_2$  en  $x \in \mathbb{R}$ , notée  $Pu$ .  $Pu$  satisfait alors :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = (2g\delta'_{x=0}) * (\sum \delta_{x=2ak\pi}), \text{ avec } g \text{ à support dans } [0, T] \\ (v, \partial_t v)/t>T = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Notons  $\mathcal{F}_T$  l'espace engendré par  $(v, \partial_t v)|_{t=0}$  où  $g$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$  à support dans  $[0, T]$  et  $2b\pi$ -périodique.

Tout élément de  $F_T$  est un couple de fonctions qu'on les prolonge par antisymétrie et par périodicité comme ci-dessus. Ces fonctions rendues antisymétriques et périodiques sont contenues dans l'espace  $\mathcal{F}_T$ . Alors  $F_T \subset \mathcal{F}_T$  et  $PF_T \subset \mathcal{F}_T$ .

Notons que pour  $\beta > 0$  les séries de Fourier des fonctions dans  $X_\beta$  sont formellement les mêmes pour les fonctions prolongées par antisymétrie et par périodicité. On obtient donc

$$\alpha_S(T) \geq \alpha_C(T) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R}_+ ; X_\alpha \subset F_T \}.$$

On définit le domaine  $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathbb{C}^2$  (indépendant de la partie réelle de ses variables), par :

$$(x, y) \in \mathcal{E}_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -b\alpha < \text{Im}y < b\alpha \text{ et } |\text{Im}x| \leq 1 \\ b\alpha < \text{Im}y < b\alpha + 1 \text{ et } (\text{Im}y - b\alpha)^2 + |\text{Im}x|^2 < 1 \\ b - 1\alpha < \text{Im}y < -b\alpha \text{ et } (\text{Im}y + b\alpha)^2 + |\text{Im}x|^2 < 1. \end{cases}$$

On note  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \in \mathcal{R}\mathcal{E}_\alpha$  si  $(ix, iy) \in \mathcal{E}_\alpha$ .

On énonce, maintenant les deux lemmes jouant un rôle crucial dans la preuve de la minoration de l'analyticité  $\alpha_S(T)$ .

**Lemme 4.2.** *Pour tout nombre réel  $\alpha$  et tout couple  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{R}^2$  il existe une fonction  $v$  dans  $X_{0,\alpha}$  telle que  $Bv \in \mathcal{E}_\alpha$  et*

Bv n'a pas de prolongement holomorphe en  $(x_0, y_0 + i(b\alpha + 1))$ .

**Lemme 4.3.** *Pour tout  $T > 0$ , il existe un ouvert  $\Omega_T$  de  $\mathbb{C}^2$  connexe et contenant  $\mathcal{E}_0$  sur lequel toute fonction de  $Bf$  se prolonge en une fonction holomorphe.*

*Pour  $\epsilon \in ]0, 1[$ , ce domaine contient les points  $(a\pi, y_1 - i\epsilon)$  avec :*

$$y_1 = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 - T^2 + a^2 \pi^2 + \sqrt{(T^2 - 1 - a^2 \pi^2)^2 + 4T^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

De ces deux lemmes, on déduit la minoration de  $\alpha_S(T)$ .

En effet, soit  $\epsilon > 0$ . Posons  $\beta := \frac{1}{b}(\text{Im } y_1 - 1 - \epsilon)$ . Soit  $v$  la fonction de  $X_{0,\beta}$  donnée par le Lemme 4.2 pour  $x_0 = a\pi$  et  $y_0 = 0$ . Cette fonction n'a pas de prolongement holomorphe en  $(a\pi, y_1 - i\epsilon)$ . Or, le Lemme 4.3 nous assure que toute fonction de  $Bf$  se prolonge en ce point pour  $0 < \epsilon < 1$ . Donc  $(v, 0) \notin F_T$ . Par suite  $X_\beta \not\subset F_T$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_S(T) &\geq \frac{\sqrt{2}}{2b} \left[ 1 - T^2 + a^2 \pi^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{T^4 + 2(1 - a^2 \pi^2)T^2 + (1 + a^2 \pi^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{b} \approx \frac{a^2 \pi^2}{2bT^2}. \end{aligned}$$

#### 4.2.1. Démonstration du Lemme 4.2

Pour la démonstration de ce lemme on a besoin de quelques résultats techniques qu'on va les donner avec leurs démonstrations.

Pour  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , soit  $\phi_\alpha(n, k) := \frac{n}{b}y_0 + \frac{k}{a}x_0 - \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}} - \alpha n$ .

**Lemme 4.4.** *Pour tout réel  $\alpha > 0$ , pour tout  $\beta < 1$ , pour chaque  $0 < \alpha < \alpha'$ , et pour tout couple  $(x_0, y_0) \in \mathcal{RE}_{b\alpha'}$  tq  $|x_0| \leq \beta$ , il existe une constante  $C_{\alpha-\alpha', \beta} > 0$  telle que*

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^{*2}, \phi_\alpha(n, k) \leq -C_{\alpha-\alpha', \beta} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}.$$



En effet,

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(n, k) &= \frac{n}{b}y_0 + \frac{k}{a}x_0 - \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}} - \alpha n \\ &= \left| \frac{\frac{n}{b}}{\frac{k}{a}} \right| \cdot \left[ \vec{e}_{n,k} \cdot \begin{pmatrix} y_0 - b\alpha \\ x_0 \end{pmatrix} - 1 \right].\end{aligned}$$

Or,  $(x_0, y_0) \in \mathcal{RE}_{b\alpha'}$  et  $|x_0| < 1$ . Donc, si on écrit

$$C'_{\alpha-\alpha',\beta} = \sup \left\{ (y - b\alpha, x) \cdot \vec{e}_{n,k}; (x, y) \in \mathcal{RE}_{b\alpha'}, \right. \\ \left. |x| < \beta, \vec{e}_{n,k} \in \mathbb{S} \cap \{n > 0\} \right\},$$

on obtient

$$C'_{\alpha-\alpha',\beta} < 1.$$

Alors

$$\phi_\alpha(n, k) \leq -C_{\alpha-\alpha',\beta} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}},$$

où  $C_{\alpha-\alpha',\beta} = 1 - C'_{\alpha-\alpha',\beta}$ .

**Lemme 4.5.**  $\forall j \in \{0, 1\}, \forall \alpha > 0,$

$$B(X_{j,\alpha}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_{b\alpha}).$$

**Démonstration.** Pour

$$f(x, y) = \sum_{n,k>0} a_{n,k} e^{in\frac{y}{b} + ik\frac{x}{a} - \alpha n} \in X_{j,\alpha},$$

on a

$$Bf(x_r + ix_i, y_r + iy_i) = \sum_{n,k>0} a_{n,k} e^{in\frac{y_r}{b} + ik\frac{x_r}{a} - k\frac{x_i}{a} - n\frac{y_i}{b} - \alpha n - \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}}.$$

Or,  $e^{-k\frac{x_i}{a} - n\frac{y_i}{b} - \alpha n - \sqrt{\frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}} < e^{\phi_\alpha(n,k)}$ . Donc le lemme précédent indique que  $Bf$  est définie par une série exponentiellement décroissante qui permet de voir le prolongement de  $Bf$  et qui définit une fonction analytique.

On a donc démontré que pour toute fonction  $v \in X_\alpha$ ,  $Bv \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_{b\alpha})^2$ .

Pour démontrer le Lemme 4.2, il nous reste donc à construire une fonction qui n'est pas holomorphe en  $(x_0, y_0 + i(b\alpha + 1))$ , donnée par le lemme suivant :

**Lemme 4.6.** *Pour tout réel  $\alpha > 0$  et pour tout couple  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , il existe une fonction  $v \in X_{0,\alpha}$  tq*

*$Bv$  n'a pas de prolongement holomorphe en  $(x_0, y_0 + i(b\alpha + 1))$ .*

**Démonstration.** Soit  $v \in S'(\mathbb{R}^2)$ , définie par

$$v := \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|nk|} e^{-\alpha|n|} e^{i\frac{k}{a}(x-x_0)} e^{i\frac{n}{b}(y-y_0)}.$$

$$v \in X_{0,\alpha}.$$

Calculons l'expression de  $Bv$  sur  $\mathcal{E}_{b\alpha}$  (qui existe d'après le Lemme 4.5).

$$\begin{aligned} Bv(x_r + ix_i, y_r + iy_i) \\ = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|nk|} e^{i\frac{k}{a}(x_r-x_0)+i\frac{n}{b}(y_r-y_0)-k\frac{x_i}{a}-n\frac{y_i}{b}-\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{a^2}}-\alpha|n|}. \end{aligned}$$

Donc, en temps que fonction holomorphe sur  $\mathcal{E}_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} f := \frac{\partial^3}{\partial x^3} Bv = -\frac{1}{a^3} \sum_{n,k>0} \frac{k^3}{nk} \cos\left(\frac{k}{a}(x_r-x_0) + ik\frac{x_i}{a}\right) \\ \cdot \sin\left(\frac{n}{b}(y_r-y_0) + in\frac{y_i}{b}\right) e^{-\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{a^2}}-\alpha n}. \end{aligned}$$

On veut montrer que  $f$  n'est pas prolongeable par holomorphicité au voisinage de  $(x_0, y_0 + i(b\alpha + 1))$ . Il suffit donc de prouver l'existence d'une suite  $(x^n, y^n)$  tendant vers  $(x_0, y_0 + i(b\alpha + 1))$  et telle que  $|f(x^n, y^n)| \rightarrow \infty$ .

Soit  $(x_0^\nu, y_0^\nu) = (x_0, y_0 + i(b\alpha + 1 - \nu))$ . Pour  $\nu$  assez petit,  $(x_0^\nu, y_0^\nu) \in \mathcal{E}_\alpha$ , donc  $f$  y est définie.

$$if = \frac{1}{a^3} \sum_{n,k>0} \frac{k^3}{nk} \cosh\left(k\frac{x_i^\nu}{a}\right) \sinh\left(n\frac{y_i^\nu}{b}\right) e^{-\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{a^2}}-\alpha n}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} if(x_0^\nu, y_0^\nu) &\geq \frac{1}{a^3} \sum_{n,k>0} \frac{k^2}{n} \sinh\left((b\alpha + 1 - \nu)\frac{n}{b}\right) e^{-\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{a^2}}-\alpha n} \\ if(x_0^\nu, y_0^\nu) &\geq \frac{1}{a^3} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sinh\left((b\alpha + 1 - \nu)\frac{n}{b}\right) e^{-\frac{n}{b}+\frac{1}{a}-\alpha n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} if(x'_0, y'_0) = +\infty.$$

Ce qui montre le lemme.

#### 4.2.2. Démonstration du Lemme 4.3

L'équation des ondes étant réversible en temps, on peut donc définir l'espace  $\mathcal{F}_T$  dans ce sens : Soient  $g$  dans  $L^2([0, b\pi] \times \mathbb{R}_t)$  à support dans  $[0, T]$  et soit  $v$  solution de  $(\partial_t^2 - \Delta)v = (2g\delta'_{x=0}) * \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \delta_{2a\pi k}$  avec  $(v, \partial_t v)|_{t=0} = 0$ .

Notons  $\Phi(g) = (v, \partial_t v)|_{t=T}$ . On a donc  $\mathcal{F}_T = Im \Phi$ .

On sait que la solution de l'équation  $(\partial_t^2 - \Delta)E = \delta$  est donnée par

$$E(t, x) = \frac{1}{4ab\pi^2} \int_0^{2a\pi} \int_0^{2b\pi} e^{i\frac{x}{a} \cdot \eta_1 + i\frac{y}{b} \cdot \eta_2} \chi_{t>0} \frac{\sin t \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}} d\eta.$$

Donc par convolution, on obtient

$$\Phi(g)(x, y) = \left( \begin{array}{l} \iint \frac{\sin(T-s) \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}} e^{i(x-x')\frac{\eta_1}{a} + i(y-y')\frac{\eta_2}{b}} g(x', y', s) dx' dy' ds d\eta \\ \iint \cos(T-s) \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}} e^{i(x-x')\frac{\eta_1}{a} + i(y-y')\eta_2 b} g(x', y', s) dx' dy' ds d\eta. \end{array} \right).$$

Comme  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  et  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ , avec un changement de variable on trouve

$$B\Phi(g)(x, y) = \left( \begin{array}{l} \iint_0^{2T} C(s) e^{i(x-x')\frac{\eta_1}{a} + i(y-y')\frac{\eta_2}{b} - \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}} h_1(x', y', s) dx' dy' ds d\eta \\ \iint_0^{2T} C(s) e^{i(x-x')\frac{\eta_1}{a} + i(y-y')\frac{\eta_2}{b} - \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}} h_2(x', y', s) dx' dy' ds d\eta \end{array} \right) \quad (4.5)$$

avec

$$C(s) = \frac{e^{i(T-s)\sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}}}{2i\sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}},$$

$$h_1(x', y', s) = h_2(x', y', s) = g(x', y', s), \quad \text{si } 0 \leq s \leq T,$$

et

$$h_1(x', y', s) = -h_2(x', y', s) = g(x', y', 2T - s), \quad \text{si } T \leq s \leq 2T.$$

$B\Phi(g)(x, y)$  est l'image de  $g$  par l'opérateur intégral de Fourier avec phase complexe. Comme cet opérateur est explicite, il est intéressant de déterminer l'espace dans lequel  $B\Phi(g)$  est holomorphe. On commence par étudier l'holomorphie de ce noyau, ceci revient à étudier une certaine enveloppe. Enfin, comme domaine  $\Omega$  où on a l'holomorphie de  $B\Phi(g)$ , on prendra l'intersection de deux enveloppes.

**Lemme 4.7.** (*Holomorphie du noyau*). *La fonction*

$$f_t(z) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{iz \cdot \eta + (it-1)|\eta|} d\eta,$$

où  $z \cdot \eta = z_1 \cdot \frac{\eta_1}{a} + z_2 \cdot \frac{\eta_2}{b}$  et  $|\eta| = \sqrt{\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2}}$ , peut être prolongeable en une fonction holomorphe au voisinage de tout point du domaine

$$\mathbb{C}^2 \setminus \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1^2 + z_2^2 = (t+i)^2 \right\}.$$

On va maintenant convoler le noyau. Tout d'abord, on considère la fonction

$$\iint f_{T-s}(x - x', y - y') g(y', s) \chi_{[0, 2T]} \delta_{x'=0} ds dx' dy'.$$

Cherchons en quel point  $(x, y)$  dans  $\mathbb{C}^2$ , cette fonction soit holomorphe.

Notons  $x = x_r + ix_i$ ;  $y = y_r + iy_i$ . D'après le Lemme 4.7, il s'agit de savoir s'il existe  $(y', s)$  dans  $\mathbb{R} \times [0, 2T]$  tel que  $(T - s + i)^2 = (y - y')^2 + x^2$ , pour un point  $(x, y)$ . L'invariance par translation de  $y_r$  est évidente, cela revient à savoir si pour  $y_i, x_r$ , et  $x_i$  donnés, il existe  $s \in [0, T]$  et  $y_r \in \mathbb{R}$  tels que

$$(s + i)^2 = (y_r + iy_i)^2 + (x_r + ix_i)^2,$$

c'est à dire

$$\begin{cases} (s^2 - 1) &= y_r^2 - y_i^2 + (x_r^2 - x_i^2), \\ s &= y_i y_r + x_i x_r. \end{cases} \quad (4.6)$$

Cela nous décrira une enveloppe à l'intérieur de laquelle notre fonction est continuellement holomorphe comme somme des fonctions holomorphes. Cet ensemble contient  $\mathcal{E}_0$ , donc l'enveloppe ne rentre jamais à l'intérieur de celui-ci.

Pour  $(x_r, x_i)$  avec  $|x_i| < 1$ ,  $y_i^0(x_i, x_r)$  est défini par :

$$y_i^0(x_i, x_r) =$$

inf  $\{|y_i| \text{ tel que (4.6) possède une solution, avec } s \in [-T, T], y_r \in \mathbb{R}\}$ .

On a

$$y_i^0(x_i, x_r) \geq \sqrt{1 - |x_i|^2} > 0. \tag{4.7}$$

• Pour  $1 > |x_i| \geq \frac{|x_r|}{T}$ , (4.6) possède la solution  $(y_r, x_r) = s(y_i, x_i)$  avec  $s$  satisfait  $x_r = sx_i$  et  $y_i = \sqrt{1 - |x_i|^2}$ . Par conséquent

$$1 > |x_i| \geq \frac{|x_r|}{T} \Rightarrow y_i^0(x_i, x_r) = \sqrt{1 - |x_i|^2}.$$

• Pour  $|x_i| < \frac{|x_r|}{T}$ , en éliminant  $y_r$  de (4.6), on obtient

$$y_i^4 + \left(s^2 - 1 + (x_i^2 - x_r^2)\right) y_i^2 - (s - x_i x_r)^2 = 0. \tag{4.8}$$

Puisqu'on a  $|x_i| < 1$ , alors (4.8) admet une unique solution strictement positive  $y_i(x_i, x_r, s)$ , analytique en  $s \in \mathbb{R}$ . Donc (4.7) implique :

$$y_i^0(x_i, x_r) = \min_{s \in [-T, T]} y_i(x_i, x_r, s).$$

L'équation  $\frac{\partial}{\partial s} y_i(x_i, x_r, s) = 0$  et l'équation (4.8) entraînent que  $s(1 - y_i^2) = x_r x_i$  donc  $|x_r x_i| \leq |s| |x_i|^2$  (d'après (4.7)), d'où  $|s| > T$  pour  $|x_i| \neq 0$  (car  $|x_i| < \frac{|x_r|}{T}$ ).

Si  $x_i = 0$  alors  $y_i^2 = 1$  n'est pas une solution de (4.8) ( car  $|x_r| > 0$ ) et

$$y_i(0, x_r, 0) = \sqrt{1 + x_r^2} > 1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} y_i(0, x_r, s),$$

alors  $s = 0$  est un maximum. On a donc

$$|x_i| < \min\left(1, \frac{|x_r|}{T}\right),$$

ce qui implique

$$y_i^0(x_i, x_r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 - T^2 + (x_i^2 - x_r^2) + \sqrt{(1 - T^2 + (x_i^2 - x_r^2))^2 + 4(T - x_i x_r)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

Si l'on pose  $\Omega_T(x_r) = \{(x_i, y_i) / |x_i| < 1, |y_i| < y_i^0(x_i, x_r)\}$ , la fonction

$$\int \int f_{T-s}(y - y', x - x') \chi_{\{0 \leq s \leq 2T\}}(g(y', s)) * \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \delta_{z'=2a\pi k} \right) ds dx' dy'.$$

est holomorphe dans  $\Omega_T$  définie par

$$\Omega_T = \left\{ (x_r + ix_i, y_r + iy_i) \in \mathbb{C}^2 / (x_i, y_i) \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^*} \Omega_T(x_r + 2ak\pi) \right\}.$$

Les fonctions  $B\Phi g(x, y)$  définies par (4.5) sont holomorphes dans  $\Omega_T$ . Or, pour tout  $\epsilon \in (0, 1)$ ,  $\Omega_T$  contient un voisinage de l'ensemble

$$\{x = a\pi, y \in i[0, y_i^0(0, a\pi) - \epsilon]\}.$$

Ce qui achève la démonstration.

### 4.3. Preuve de la 3<sup>ème</sup> assertion du Théorème 1.1

Pour tout  $\alpha > \alpha_S(T)$ , on a  $X_\alpha \subset S_T$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que la solution  $\phi$  du problème (1.3) vérifie

$$\int_0^T \int_0^{b\pi} \left| \frac{\partial[G(\partial\phi/\partial t)]}{\partial x} \right| dy dt \geq C(T)E(0), \quad \forall (u^0, u^1) \in X_\alpha.$$

Comme l'hypothèse (3.8) est vérifiée d'après [3] alors le Théorème 3.1 et l'inégalité précédente nous implique l'existence des constantes  $C, \gamma > 0$  telles que

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} E(0), \quad \forall (u^0, u^1) \in X_\alpha.$$

### 5. Preuve du Théorème 1.3

Pour  $\underline{u} \in E_0$ ,  $\phi(x, y, t)$  s'écrit

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^*} a_{n,k} \sin \frac{kx}{a} \sin \frac{ny}{b} e^{it\lambda_{n,k}}$$

avec

$$\lambda_{n,k} = \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Pour  $T > 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ , en utilisant l'orthogonalité de la suite  $\sin(\frac{n}{b}y)$  dans  $[0, b\pi]$ , on obtient

$$\int_0^T \int_0^{b\pi} \left| \frac{\partial[G(\partial_t\phi)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dy dt = \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{ab\pi}{2} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{ik}{a} \frac{a_{n,k}}{\lambda_{n,k}} e^{i\lambda_{n,k}t} dt \right|^2,$$

En appliquant le [Théorème 2.1] de [15], avec  $d = 2$ ,  $k_1 = n$ ,  $k_2 = k$ ,  $p_k = i\frac{k}{a}$ , on obtient l'existence d'une constante  $C_1 > 0$  vérifiant

$$\int_0^T \int_0^{b\pi} \left| \frac{\partial[G(\partial_t\phi)]}{\partial x}(0, y, t) \right|^2 dy dt \geq C_1 \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^*} \left| \frac{a_{n,k}}{\lambda_{n,k}} \right|^2 \sim C_1 \|\underline{u}\|_{H^{-1}(\Omega) \times [L^2(\Omega)]'}^2,$$

où  $[L^2(\Omega)]'$  est l'espace dual de  $L^2(\Omega)$ , la dualité est prise par rapport à  $H^{-1}(\Omega)$ .

Ce qui montre le résultat du Théorème 1.3, en appliquant le Théorème 3.1 pour  $\alpha = 0$ .

### Références

- [1] B. ALLIBERT – « Analytic controlability of the wave equation over a cylinder », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*. **4** (1999), p. 177–207.
- [2] B. ALLIBERT & S. MICU – « Controllability of analytic functions for a wave equation coupled with a beam », *Revista Matemática Iberoamericana* **15** (1999), p. 547–592.
- [3] K. AMMARI – « Dirichlet boundary stabilization of the wave equation », *Asymptotic Analysis* **30** (2002), p. 117–130.

- [4] K. AMMARI & S. NICAISE – « Polynomial and analytic stabilization of a wave equation coupled with a Euler–Bernoulli beam », *Math. Appl. Sci* **5** (2009), p. 556–576.
- [5] K. AMMARI & A. SAÏDI – « Pointwise stabilization of a hybrid system and optimal location of actuator », *Appl. Math. Optim.* **56** (2007), p. 105–130.
- [6] K. AMMARI & M. TUCSNAK – « Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **6** (2001), p. 361–386.
- [7] C. BARDOS, G. LEBEAU & J. RAUCH – « Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of the waves from the boundary », *SIAM J. Control Optim.* **30** (1992), p. 1024–1065.
- [8] N. BELGHITH & A. MOULAH – « Interior and analytic stabilization of the wave equation over a cylinder », Soumis.
- [9] N. BURQ & P. GÉRARD – « Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes », *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), p. 749–752.
- [10] A. HARAUX – « Contrôlabilité exacte d’une membrane rectangulaire au moyen d’une fonctionnelle analytique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **306** (1988), p. 125–128.
- [11] ———, « A generalized internal control for the wave equation in a rectangle », *J. Math. Anal. Appl.* **154** (1990), p. 190–216.
- [12] S. JAFFARD & S. MICU – « Estimates of the constants in generalized Ingham’s inequality and applications to the control of the wave equation », *Asymptot. Anal.* **28** (2001), p. 181–214.
- [13] G. LEBEAU – « Fonctions harmoniques et spectre singulier », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **13** (1980), p. 269–291.
- [14] G. LEBEAU – « Control for hyperbolic equations », in *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint-Jean-de-Monts, 1992)*, École Polytech., Palaiseau, 1992, p. 24.
- [15] M. MEHRENBERGER – « An Ingham type proof for the boundary observability of n-d wave equation », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **347** (2009), p. 63–68.
- [16] A. ZYGMUND – *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968.



A. MOULAHY et S. NOUIRA

AMMAR MOULAHY  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences de Monastir  
5019 Monastir Tunisie  
ammam.moulahi@fsm.rnu.tn

SALSABIL NOUIRA  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences de Monastir  
5019 Monastir Tunisie  
selsebilla1@yahoo.fr