

# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

AMNA DABAA

**Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations de Schrödinger-Poisson sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$**

Volume 17, n° 1 (2010), p. 199-232.

<[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2010\\_\\_17\\_1\\_199\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2010__17_1_199_0)>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations de Schrödinger-Poisson sur un domaine borné de $\mathbb{R}^3$

AMNA DABAA

## Résumé

Nous étudions le comportement pour les grands temps de l'équation de Schrödinger-Poisson (NLSP) avec un terme de force extérieure supplémentaire et un terme de dissipation d'ordre zéro, la variable d'espace  $x$  étant dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Nous démontrons que ce comportement est décrit par un attracteur global de dimension de Hausdorff finie pour la topologie forte de  $H_0^1(\Omega)$ .

## 1. Introduction

Nous étudions le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini des solutions des équations de Schrödinger-Poisson (NLSP) avec non linéarité cubique en présence d'un terme de force et d'un terme de dissipation, la variable d'espace  $x$  étant dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Ce modèle intervient en mécanique quantique pour les très petits dispositifs semi-conducteurs (nous pensons ici aux nanostructures) où la structure quantique doit être prise en compte (cf [10], [7], [11], [8]).

Nous démontrons que ce comportement est décrit par un attracteur qui attire toutes les trajectoires dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus on montre que notre attracteur est de dimension de Hausdorff finie dans  $H_0^1(\Omega)$ .

L'équation de Schrödinger-Poisson, appelée aussi équation de Hartree, présentée avec amortissement et force extérieure,

$$\begin{cases} u_t + \gamma u + i\Delta u + iu\phi = f, \\ \pm\Delta\phi = |u|^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

---

*Mots-clés* : Équations de Schrödinger, Attracteurs.

*Classification math.* : 35B41, 35Q55.

avec des conditions aux limites  $\phi = u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . L'équation  $\pm\Delta\phi = |u|^2$  avec le signe  $-$ , i.e  $-\Delta\phi = |u|^2$  correspond au cas focalisant, avec le signe  $+$  correspond au cas défocalisant.

La force extérieure  $f$  est supposée dans  $L^2(\Omega)$  et  $\gamma > 0$  est le paramètre d'amortissement.

L'inconnue  $u(t, x)$  est une fonction à valeurs complexes; dans la suite  $u(t) = u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$ .

Par l'injection de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ , le potentiel  $\phi$  vérifie  $\Delta\phi \in L^3(\Omega)$  et par conséquent  $\phi \in W^{2,3}(\Omega)$ .

On définit la condition de Cauchy associée à cette équation par

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal

**Théorème 1.1.** *Les systèmes dynamiques sur  $H_0^1(\Omega)$  définis par (1.1) respectivement dans le cas focalisant ou défocalisant possèdent un attracteur global compact qui est de dimension finie dans  $H_0^1(\Omega)$ .*

Notre article est alors organisé comme suit.

La section 2 est consacrée à démontrer que  $u_0 \longrightarrow u(t)$  définit bien un semi-groupe, i.e. à montrer l'existence d'une solution globale en temps et l'unicité de la solution par rapport à la donnée initiale (cf [3], [9], [6] ).

Au passage, nous prouvons la dissipativité du dit semi-groupe, i.e. l'existence d'un borné absorbant (cf [4], [9] ).

Dans la section 3, nous démontrons l'existence d'un attracteur global  $\mathcal{A}$  pour (NLSP) dans  $H_0^1(\Omega)$  (cf [4], [2] ).

Dans la section 4, nous démontrons que cet attracteur est de dimension de Hausdorff finie dans  $H_0^1(\Omega)$  (cf [5], [12] ).

## 2. Définir un semi-groupe

### 2.1. Problème de Cauchy

Nous étudions le problème de Cauchy associé à l'équation (1.1), avec  $x$  dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $u_0$  donnée dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $T \geq 0$ , on définit  $E = \mathbf{C}([0, T]; H_0^1(\Omega))$  muni de la norme

$$\|u\|_E = \sup_{[0, T]} \|u(t)\|_{H_0^1}.$$

Pour  $f \in L^2(\Omega)$ , on peut écrire l'équation (1.1) sous la forme suivante

$$u_t + (\gamma + i\Delta)u = f - iu\phi. \quad (2.1)$$

En intégrant l'équation (2.1) sur  $[0, t]$ , nous obtenons la formulation "mild" de l'équation

$$u(t) = e^{-tK}u_0 - i \int_0^t e^{-(t-s)K} F(u(s)) ds, \quad (2.2)$$

tel que  $K = (\gamma + i\Delta)$ . En posant  $U(t) = e^{-tK}$  et  $F(u(s)) = f - iu(s)\phi(s)$ , on peut écrire l'équation (1.1) sous la forme suivante

$$u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)F(u(s)) ds. \quad (2.3)$$

On pose

$$\psi(u(t)) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-s)F(u(s)) ds. \quad (2.4)$$

D'une part le groupe libre  $e^{-tK}$  est contractant sur  $H_0^1(\Omega)$  (de norme  $e^{-\gamma t}$ ), d'autre part  $u \mapsto F(u)$  est une application localement lipschitzienne sur  $H_0^1(\Omega)$  (ce point sera démontré en fin de cette section). Par conséquent, on peut faire un point fixe dans  $E$  et construire une solution "mild" (qui est alors une solution faible classique).

**Proposition 2.1.** *Pour  $u_0$  donné dans  $H_0^1(\Omega)$ , avec  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ , il existe une solution locale  $u \in \mathbf{C}([0, T]; H_0^1(\Omega))$  où  $T$  une fonction décroissante de  $\|u_0\|_{H_0^1}$ , et le semi-groupe  $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$  est continu sur  $H_0^1(\Omega)$ .*

La démonstration de la Proposition 2.1 est analogue à celle du Théorème 7.4.1 dans [3].

Pour être complet nous énonçons et démontrons que la non linéarité est une application localement lipschitzienne.

**Lemme 2.2.** *Soit  $u \mapsto \phi$ ,  $\phi$  vérifie l'équation suivante*

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi = |u|^2 \\ \phi = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Alors on a bien, si  $\|u\|_{H_0^1} \leq R$ ,

$$\|\phi\|_{H_0^1} \leq cR^2.$$

*Démonstration.* En utilisant l'injection de Sobolev  $H_0^1 \hookrightarrow L^4$ ; et l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 &= \int |u|^2\phi \\ &\leq \|\phi\|_{L^2}\|u\|_{L^4}^2 \\ &\leq c\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_{L^2} &\leq c\|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq cR^2. \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.3.** Soit  $u \mapsto \phi_u$ ;  $v \mapsto \phi_v$ , deux fonctions qui vérifient les équations suivantes

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi_u = |u|^2 \\ \phi_u = 0 \end{cases} \quad \partial\Omega, \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \pm\Delta\phi_v = |v|^2 \\ \phi_v = 0 \end{cases} \quad \partial\Omega. \quad (2.7)$$

Alors on a bien

$$\|\phi_u - \phi_v\|_{L^\infty} \leq cR\|u - v\|_{H_0^1}.$$

*Démonstration.* En utilisant les injections de Sobolev  $W^{2,3} \hookrightarrow L^\infty$ , et  $H_0^1 \hookrightarrow L^6$ , on a

$$\begin{aligned} \|\phi_u - \phi_v\|_{L^\infty} &\leq c\|\phi_u - \phi_v\|_{W^{2,3}} \\ &\leq c\|\Delta(\phi_u - \phi_v)\|_{L^3} \\ &\leq c\||u|^2 - |v|^2\|_{L^3} \\ &\leq c\|u - v\|_{L^6}\|u + v\|_{L^6} \\ &\leq cR\|u - v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

□

En dimension 3, le problème est que  $H_0^1(\Omega)$  n'est pas une algèbre. Il faut montrer que  $u \mapsto \phi_u$  est localement lipschitzienne sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Soient  $u, v$  sont dans  $H_0^1(\Omega)$ , tel que  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ ,  $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ .

Alors on a  $u, v \in L^6(\Omega)$ , ainsi  $|u|^2, |v|^2 \in L^3(\Omega)$ , et par suite  $\phi_u, \phi_v \in W^{2,3}(\Omega)$ .

**Lemme 2.4.** *La fonction  $u \mapsto u\phi$  où  $\phi$  définie par  $\pm\Delta\phi = |u|^2$  est localement lipschitzienne sur les bornés de  $H_0^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'injection de Sobolev  $H_0^1 \hookrightarrow L^6$ , on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 \|\phi_u u - \phi_v v\|_{H_0^1} &= \|\phi_u u - \phi_u v + \phi_u v - \phi_v v\|_{H_0^1} \\
 &= \|\phi_u(u - v) + v(\phi_u - \phi_v)\|_{H_0^1} \\
 &\leq \|\phi_u(u - v)\|_{H_0^1} + \|v(\phi_u - \phi_v)\|_{H_0^1} \\
 &\leq \|\nabla(\phi_u(u - v))\|_{L^2} + \|\nabla(v(\phi_u - \phi_v))\|_{L^2} \\
 &\leq \|\phi_u \nabla(u - v)\|_{L^2} + \|\nabla\phi_u(u - v)\|_{L^2} + \\
 &\quad \|v \nabla(\phi_u - \phi_v)\|_{L^2} + \|\nabla v(\phi_u - \phi_v)\|_{L^2} \\
 &\leq \|\phi_u\|_{L^\infty} \|u - v\|_{H_0^1} + \|\nabla\phi_u\|_{L^3} \|u - v\|_{L^6} \\
 &\quad + \|v\|_{L^6} \|\nabla(\phi_u - \phi_v)\|_{L^3} + \|v\|_{H_0^1} \|\phi_u - \phi_v\|_{L^\infty} \\
 &\leq c \|\phi_u\|_{W^{2,3}} \|u - v\|_{H_0^1} + c \|\Delta\phi_u\|_{L^3} \|u - v\|_{H_0^1} \\
 &\quad + c \|v\|_{H_0^1} \|\Delta[\phi_u - \phi_v]\|_{L^3} + cR \|v\|_{H_0^1} \|u - v\|_{H_0^1} \\
 &\leq c \|u\|_{H_0^1}^2 \|u - v\|_{H_0^1} + cR \|v\|_{H_0^1} \|u - v\|_{H_0^1} \\
 &\leq CR^2 \|u - v\|_{H_0^1}.
 \end{aligned}$$

□

## 2.2. Dissipativité du semi-groupe

Nous commençons par établir l'existence d'un borné absorbant dans  $L^2(\Omega)$ .

**Lemme 2.5.** *Soit  $u$  une solution de (1.1). Alors*

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq e^{-\gamma t} \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}).$$

*Démonstration.* On multiplie la première équation du système (1.1) par  $\bar{u}$ , et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \gamma \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\gamma} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2\gamma} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2\gamma} \|f\|_{L^2}^2 + \gamma \|u\|_{L^2}^2 \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &\leq \frac{1}{2\gamma} \|f\|_{L^2}^2 - \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq e^{-\gamma t} \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (2.8)$$

□

Nous établissons maintenant une égalité d'énergie

**Lemme 2.6.** *Soit  $u$  une solution de (1.1). Si*

$$\mathbf{J}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + 2\text{Im} \int f\bar{u},$$

et

$$\mathbf{F}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \text{Im} \int f\bar{u}.$$

Alors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) + 2\gamma \mathbf{F}(u) = 0.$$

*Démonstration.* On multiplie la première équation du système (1.1) par  $i(\overline{u_t + \gamma u})$ , et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \gamma \|\nabla u\|_{L^2}^2 \mp \gamma \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \mp \\ \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 - \frac{d}{dt} \text{Im} \int f\bar{u} - \gamma \text{Im} \int f\bar{u} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u} \right) \\ + 2\gamma \left( \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + Im \int f\bar{u} \right) = 0. \end{aligned}$$

On pose

$$\mathbf{J}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u},$$

et

$$\mathbf{F}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + Im \int f\bar{u}.$$

Finalement

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) + 2\gamma \mathbf{F}(u) = 0.$$

□

Nous distinguons maintenant les cas focalisant et défocalisant

**Cas focalisant**  $\pm = -$ . Les fonctionnelles impliquées dans l'égalité d'énergie s'écrivent alors.

$$\mathbf{J}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u}.$$

$$\mathbf{F}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + Im \int f\bar{u}.$$

**Proposition 2.7.** *Dans le cas focalisant la solution est globale.*

*Démonstration.* On va établir une relation entre  $\mathbf{J}(u)$  et  $\mathbf{F}(u)$ ,

$$\mathbf{J}(u) - \mathbf{F}(u) \leq \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}.$$

En multipliant par  $2\gamma$ , on obtient

$$2\gamma \mathbf{J}(u) - 2\gamma \mathbf{F}(u) \leq \gamma \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \gamma \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \right),$$

donc on a

$$-2\gamma \mathbf{F}(u) \leq -2\gamma \mathbf{J}(u) + \gamma \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \gamma \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \right),$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) \leq -2\gamma \mathbf{J}(u) + \gamma \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \gamma \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.9)$$



Il faut estimer  $\nabla\phi, \nabla\phi_0$  en norme  $L^2$ , afin de contrôler le membre de droite de (2.9).

On a

$$\Delta\phi = -|u|^2,$$

$$\|\Delta\phi\|_{L^1} = \|u\|_{L^2}^2 \leq L, \text{ où } L = \max\left(\|u_0\|_{L^2}^2, \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\gamma^2}\right).$$

Par l'injection de Sobolev

$$W^{1,1} \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}},$$

on a

$$\|\nabla\phi\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq c\|u\|_{L^2}^2 \leq cL;$$

et par l'injection de Sobolev

$$W^{1,\frac{3}{2}} \hookrightarrow L^3,$$

on a

$$\|\phi\|_{L^3} \leq c\|u\|_{L^2}^2 \leq cL;$$

d'où

$$\int \phi\Delta\phi = \pm \int \phi|u|^2,$$

$$\int |\nabla\phi|^2 = \mp \int \phi|u|^2;$$

ainsi

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 &\leq c\|\phi\|_{L^3}\|u\|_{L^3}^2 \\ &\leq cL\|u\|_{L^3}^2 \\ &\leq cL\|u\|_{L^2}\|u\|_{L^6} \\ &\leq cL^{\frac{3}{2}}\|u\|_{L^6} \\ &\leq cL^{\frac{3}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(u) &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u} \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{cL^{\frac{3}{2}}}{2}\|\nabla u\|_{L^2} + 2Im \int f\bar{u}; \end{aligned}$$

par l'inégalité de Young, on a

$$\frac{cL^{\frac{3}{2}}}{2} \|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{c^2 L^3}{4},$$

on en déduit que

$$\mathbf{J}(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{c^2 L^3}{4} + 2Im \int f \bar{u}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) + 2\gamma \mathbf{J}(u) &\leq \gamma \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \gamma (\|f\|_{L^2}^2 + L) \\ &\leq \gamma cL^{\frac{3}{2}} \|\nabla u\|_{L^2} + \gamma (\|f\|_{L^2}^2 + L) \\ &\leq \gamma \mathbf{J}(u) + M_3(L). \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) + \gamma \mathbf{J}(u) \leq M_3(L).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbf{J}(u) \leq \mathbf{J}(u_0) e^{-\gamma t} + \frac{M_3(L)}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (2.10)$$

*Remarque 2.8.*

$$J(u_0) = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \phi_0\|_{L^2}^2 + 2Im \int f \bar{u}_0 \leq \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + 2\|f\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2}.$$

D'après cette remarque on en déduit que  $\mathbf{J}(u)$  est borné. De plus

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \mathbf{J}(u) + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{8} L^3 + \|f\|_{L^2}^2 + L.$$

On déduit que

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq 2\mathbf{J}(u) + \frac{c^2}{4} L^3 + 2\|f\|_{L^2}^2 + 2L.$$

Ce qui donne la solution est globale. □

**Cas défocalisant**  $\pm = +$ . Dans ce cas les fonctionnelles impliquées dans l'égalité d'énergie s'écrivent alors.

$$\mathbf{J}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u}.$$

$$\mathbf{F}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + Im \int f\bar{u}.$$

**Proposition 2.9.** *Dans le cas défocalisant la solution est globale.*

*Démonstration.* On a

$$\mathbf{F}(u) \geq \mathbf{J}(u) - Im \int f\bar{u}$$

en multipliant par  $-2\gamma$ , on obtient

$$-2\gamma\mathbf{F}(u) \leq -2\gamma\mathbf{J}(u) + 2\gamma Im \int f\bar{u}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{F}(u) = 0. \quad (2.11)$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) \leq \gamma \left( \|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.12)$$

En utilisant l'équation (2.8) on déduit de (2.12)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}(u) + 2\gamma\mathbf{J}(u) \leq \gamma \left( \|f\|_{L^2}^2 + L \right) = M_4(L).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbf{J}(u) \leq \mathbf{J}(u_0)e^{-2\gamma t} + \frac{M_4(L)}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}). \quad (2.13)$$

D'après l'estimation de  $\nabla\phi$ ,  $\nabla\phi_0$  en norme  $L^2$  qui est identique au cas focalisant, on trouve que  $\mathbf{J}(u)$  est borné. De plus

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq M(f, \gamma).$$

Ce qui donne la solution est globale. □

### 2.3. Existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}_0$ dans $H_0^1(\Omega)$

Nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition 2.10.** *Il existe un sous ensemble borné  $\mathcal{B}_0$  satisfaisant*

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0, \quad t \geq 0,$$

*et tel que, pour tout ensemble borné  $\mathcal{B}$  de  $H_0^1(\Omega)$ , il existe  $t_0(\mathcal{B}) > 0$  tel que*

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0, \quad t \geq t_0(\mathcal{B}).$$

*Démonstration.* On a vérifié dans les Propositions 2.7 et 2.9 que

$$\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq e^{-2\gamma t} \mathbf{J}(u_0) + N(L),$$

tel que  $N(L)$  une constante qui dépend de  $\gamma, f$  et qui change d'un cas à l'autre.

Donc

$$\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \tilde{N}(\gamma, f) \quad \forall t \geq t_0,$$

où

$$t_0 = \frac{1}{\gamma} \log \frac{\mathbf{J}(u_0)}{N(L)}.$$

□

*Remarque 2.11.* Il est alors classique d'obtenir un contrôle pour  $u_t$  en norme  $H^{-1}$  en se reportant à l'équation. Ce contrôle s'écrit pour  $t \geq t_0$ , on a

$$\|u_t\|_{H^{-1}}^2 \leq \tilde{N}'(\gamma, f).$$

### 3. Existence de l'attracteur $\mathcal{A}$

On commence par donner la définition d'un attracteur (cf [12]).

**Définition 3.1.** On appelle un attracteur global du système dynamique  $(S(t))_{t \geq 0}$ , un ensemble  $\mathcal{A}$  de  $H_0^1$  qui vérifie les propriétés suivantes

- (1)  $\mathcal{A}$  est compact dans  $H_0^1$ ,
- (2)  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$  (propriété d'invariance),
- (3) Pour tout borné  $\mathcal{B}$  de  $H_0^1$ ,

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup_{b \in \mathcal{B}} \inf_{a \in \mathcal{A}} \|S(t)b - a\|_{H_0^1} \rightarrow 0,$$

quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

On va vérifier tout d'abord la continuité faible de  $S(t)$ .

**Lemme 3.2.** *Le semi-groupe  $S(t)$  est continu sur les bornés de  $H_0^1(\Omega)$  pour la topologie forte de  $L^2(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  deux solutions de l'équation (1.1) avec  $u_0, v_0$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , telles que  $u(t) = S(t)u_0$ ,  $v(t) = S(t)v_0$ .

On veut montrer que si

$$u_0 \longrightarrow v_0 \text{ dans } L^2 \quad \text{alors } u(t) = S(t)u_0 \longrightarrow v(t) = S(t)v_0 \text{ dans } L^2.$$

En utilisant la formulation intégrale on obtient

$$\begin{aligned} & \|u(t) - v(t)\|_{L^2} \\ & \leq \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{L^2} + \int_0^t \|U(t-s)[u(s)\phi_u(s) - v(s)\phi_v(s)]\|_{L^2} ds \\ & \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} + \underbrace{\int_0^t \|u(s)\phi_u(s) - v(s)\phi_v(s)\|_{L^2} ds}_{A(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant les injections continues  $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ ,  $W^{2,1} \hookrightarrow L^3$ , et  $H_0^1 \hookrightarrow L^6$ , il vient alors

$$\begin{aligned} A(t) & \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|\phi_u(s)\|_{L^\infty} ds + \\ & \quad \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \|\phi_u(s) - \phi_v(s)\|_{L^3} ds \\ & \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|\Delta^{-1}(|u(s)|^2)\|_{L^\infty} ds + \\ & \quad \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \|\Delta^{-1}[|u(s)|^2 - |v(s)|^2]\|_{L^3} ds \\ & \leq c \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|\Delta^{-1}(|u(s)|^2)\|_{H^2} ds + \\ & \quad c \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \|\Delta^{-1}[|u(s)|^2 - |v(s)|^2]\|_{W^{2,1}} ds \\ & \leq c \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \| |u(s)|^2 \|_{L^2} ds + \\ & \quad c \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \| |u(s)|^2 - |v(s)|^2 \|_{L^1} ds; \end{aligned}$$

d'une part

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \| |u(s)|^2 - |v(s)|^2 \|_{L^1} ds \\
 \leq \int_0^t \|v(s)\|_{L^6} \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|u(s) + v(s)\|_{L^2} ds \\
 \leq cR \int_0^t \|v(s)\|_{H_0^1} \|u(s) - v(s)\|_{L^2} ds \\
 \leq cR^2 \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} ds.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \| |u(s)|^2 \|_{L^2} ds &\leq c \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{L^4}^2 ds \\
 &\leq c \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{H_0^1}^2 ds \\
 &\leq cR^2 \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} ds.
 \end{aligned}$$

On obtient

$$A(t) \leq cR^2 \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} ds.$$

Il en résulte

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} + cR^2 \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} ds.$$

On pose  $Q(t) = \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2} ds$ , alors elle vérifie

$$\frac{d}{dt} Q(t) \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} + cR^2 Q(t),$$

il vient alors

$$\frac{d}{dt} [Q(t)e^{-cR^2 t}] \leq e^{-cR^2 t} \|u_0 - v_0\|_{L^2},$$

en intégrant sur  $[0, t]$ , on a

$$Q(t)e^{-cR^2 t} - \underbrace{Q(0)}_{=0} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} \left[ \frac{e^{-cR^2 t} - 1}{-cR^2} \right],$$

puis

$$Q(t)e^{-cR^2t} \leq \frac{\|u_0 - v_0\|_{L^2}}{cR^2}(1 - e^{-cR^2t}),$$

et par suite

$$Q(t) \leq \frac{\|u_0 - v_0\|_{L^2}}{cR^2}(e^{cR^2t} - 1).$$

On déduit

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} (1 + K(e^{cR^2t} - 1)).$$

D'où le résultat voulu.  $\square$

**Proposition 3.3.** *Le semi-groupe  $S(t)$  est faiblement continu sur  $H_0^1$ .*

*Démonstration.* Soit  $u_n$  une suite dans  $H_0^1$  telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1.$$

En utilisant l'injection compacte

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad n = 3,$$

on obtient qu'il existe une sous-suite  $u_{n'}$  telle que

$$u_{n'} \rightarrow u, \text{ fortement dans } L^2(\Omega).$$

D'après la continuité forte de  $S(t)$  sur  $L^2$  obtenue au Lemme 3.2, on obtient

$$S(t)u_{n'} \rightarrow S(t)u \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (3.1)$$

Comme  $u_{n'}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , et d'après la continuité forte de  $S(t)$  sur  $H_0^1(\Omega)$

$$S(t)u_{n'} \text{ est borné dans } H_0^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

D'où  $S(t)u_{n'}$  a une unique valeur d'adhérence dans  $H_0^1$  faible, donc

$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup v \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

En utilisant l'injection compacte

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ si } n = 3.$$

On obtient

$$S(t)u_{n'} \rightarrow v \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (3.2)$$

De (3.1), (3.2), et par l'unicité de la limite, on obtient

$$v = S(t)u,$$

et par suite

$$S(t)u_{n'} \rightharpoonup S(t)u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

□

On rappelle ensuite la définition d'un ensemble  $\omega$  - limite.

**Définition 3.4.** Ensemble  $\omega$ -limite

$$\begin{aligned} \omega(E) &= \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)X} \\ &= \{a \in E; \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ et } b_n \in X; S(t_n)b_n \rightarrow a\}, \end{aligned}$$

avec  $E$  est un espace de Banach,  $X$  est une partie de  $E$ .

**Proposition 3.5.** On considère l'ensemble

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_0}$$

où l'adhérence est prise par rapport à la topologie faible de  $H_0^1$ ,  $\omega(\mathcal{B}_0)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\omega(\mathcal{B}_0)$  est un ensemble non vide, fermé et compact pour la topologie faible de  $H_0^1$ ,
- (2)  $\omega(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0$ ,
- (3)  $S(t)\omega(\mathcal{B}_0) = \omega(\mathcal{B}_0) \quad \forall t \geq 0$ .
- (4) Pour tout borné  $\mathcal{B}$  de  $H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \omega(\mathcal{B}_0)) = 0.$$

*Démonstration.* (1)  $\omega(\mathcal{B}_0) \neq \emptyset$ , et il est clair que  $\omega(\mathcal{B}_0)$  est une intersection décroissantes d'ensembles fermés et compacts pour la topologie faible de  $H_0^1$ , donc c'est un fermé compact faible.

(2) Comme

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s \geq t_0(\mathcal{B}_0)} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_0}$$

et puisque  $\mathcal{B}_0$  est un borné absorbant de  $H_0^1$  alors,

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0,$$



ce qui donne

$$\overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_0} \subset \overline{\mathcal{B}_0} = \mathcal{B}_0,$$

et par suite

$$\bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_0} \subset \mathcal{B}_0,$$

il vient alors

$$\omega(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0.$$

(3) Soit  $a \in S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$ , donc il s'écrit comme suit

$$a = S(t)b, \quad b \in \omega(\mathcal{B}_0); \quad (3.3)$$

par définition d'un ensemble  $\omega$ -limite

$$\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty, \quad b_n \in \mathcal{B}_0,$$

tel que  $S(t_n)b_n \rightharpoonup b$  faiblement dans  $H_0^1$ .

D'après la continuité faible de  $S(t)$  sur  $H_0^1$  on déduit que

$$S(t_n + t)b_n = S(t)S(t_n)b_n \rightharpoonup S(t)b \quad \text{faiblement dans } H_0^1.$$

En utilisant (3.3), on déduit que

$$S(t_n + t)b_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } \omega(\mathcal{B}_0),$$

ce qui donne  $a \in \omega(\mathcal{B}_0)$ ; on obtient par conséquent

$$S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0). \quad (3.4)$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, on prend  $\tilde{b} \in \omega(\mathcal{B}_0)$ , donc par définition d'un ensemble  $\omega$ -limite, on trouve que

$$\exists t_n \rightarrow +\infty, \quad \text{et } \tilde{b}_n \in \mathcal{B}_0$$

tel que

$$S(t_n)\tilde{b}_n \rightharpoonup \tilde{b} \quad \text{faiblement dans } H_0^1. \quad (3.5)$$

On note  $\mathcal{B}_1 = (\tilde{b}_n)_{n \geq 0}$ ;  $\mathcal{B}_1$  un borné de  $H_0^1(\Omega)$ , alors

$$\exists T_1(\mathcal{B}_1); \quad S(t)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \quad \forall t \geq T_1(\mathcal{B}_1),$$

et pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $t_n - t > T_1(\mathcal{B}_1) \quad \forall n \geq n_0$ .

Il est clair que

$$S(t_n - t)\tilde{b}_n \in \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_0}.$$

Il vient alors

$$S(t_n - t)\tilde{b}_n \rightharpoonup a \in \omega(\mathcal{B}_0) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

D'après la continuité faible de  $S(t)$  sur  $H_0^1(\Omega)$ , on obtient

$$S(t_n)\tilde{b}_n \rightharpoonup S(t)a \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

D'après (3.5), (3.6), et par l'unicité de la limite, on déduit que

$$S(t)a = \tilde{b}, \quad a \in \omega(\mathcal{B}_0).$$

Finalement

$$\omega(\mathcal{B}_0) \subset S(t)\omega(\mathcal{B}_0). \quad (3.7)$$

De (3.4), (3.7), on obtient

$$\omega(\mathcal{B}_0) = S(t)\omega(\mathcal{B}_0).$$

- (4) On va montrer cette propriété par l'absurde comme suit ;  
on suppose qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ , et ;  $\mathcal{B}_1$  un borné de  $H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}_1, \omega(\mathcal{B}_0)) \geq \delta > 0.$$

On déduit qu'il existe  $b_n \in \mathcal{B}_1$ , tel que

$$\text{dist}(S(t)b_n, \omega(\mathcal{B}_0)) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \quad (3.8)$$

$(b_n)_n$  est une suite bornée de  $\mathcal{B}_1$ , alors il existe  $T_1(\mathcal{B}_1)$ ,  $n_0 \leq n$  tel que

$$S(t_n)b_n \in \mathcal{B}_0 \quad \forall t \geq T_1(\mathcal{B}_1).$$

D'autre part,  $\mathcal{B}_0$  est compact faible de  $H_0^1(\Omega)$ , alors

$$S(t_n)b_n \rightharpoonup b \in \mathcal{B}_0,$$

puisque

$$S(t_n)b_n = S(t_n - t_0) \underbrace{S(t_0)b_n}_{\in \mathcal{B}_0},$$

donc

$$S(t_n - t_0)S(t_0)b_n \in \omega(\mathcal{B}_0).$$

Si on fait tendre  $t_n$  vers  $+\infty$  on trouvera que

$$S(t_n - t_0)S(t_0)b_n \rightharpoonup a \in \omega(\mathcal{B}_0),$$

ce qui nous donne

$$\text{dist}(S(t)b_n, \omega(\mathcal{B}_0)) = 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse (3.8). □

A ce stade, nous pouvons énoncer

**Proposition 3.6.** *L'ensemble  $\mathcal{A}_\omega = \omega(\mathcal{B}_0)$  est un attracteur faible pour NLSP dans  $H_0^1(\Omega)$ .*

Tout d'abord on va donner la définition d'un attracteur faible.

**Définition 3.7.** On appelle un attracteur faible  $\mathcal{A}_\omega$  du système dynamique  $S(t)$ , est un ensemble de  $H_0^1(\Omega)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\mathcal{A}_\omega$  est borné, donc compact pour la topologie faible de  $H_0^1(\Omega)$ ,
- (2)  $S(t)\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega$  pour  $t > 0$  (invariance),
- (3) Pour tout borné  $\mathcal{B}$  de  $H_0^1$ ,

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}_\omega) = \sup_{b \in \mathcal{B}} \inf_{a \in \mathcal{A}_\omega} \text{dist}_{H_0^1 \text{ faible}}(S(t)b, a) \rightarrow 0,$$

quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Les trois propriétés ont été déjà démontrées dans la Proposition 3.5. Finalement

$$\mathcal{A}_\omega = \omega(\mathcal{B}_0)$$

est un attracteur faible pour NLSP dans  $H_0^1(\Omega)$ . □

**Théorème 3.8.** *L'attracteur faible est un attracteur fort.*

*Démonstration.* On multiplie l'équation (1.1) par  $i(\overline{u_t + \gamma u})$ , et en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}(u) + 2\gamma \mathbf{J}(u) = \mathbf{F}(u), \tag{3.9}$$

où  $\mathbf{J}, \mathbf{F}$  sont définies par

$$\mathbf{J}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + 2Im \int f\bar{u}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{F}(u) = 2\gamma \operatorname{Im} \int f\bar{u} \mp \gamma \|\nabla\phi\|_{L^2}^2. \quad (3.11)$$

En intégrant (3.9) entre 0 et  $t$ , on obtient

$$\mathbf{J}(u(t)) = e^{-2\gamma t} \mathbf{J}(u_0) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)} \mathbf{F}(u(s)) ds.$$

On pose  $u(t) = S(t)u_0$ , il vient

$$\mathbf{J}(S(t)u_0) = e^{-2\gamma t} \mathbf{J}(u_0) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)} \mathbf{F}(S(s)u_0) ds. \quad (3.12)$$

Observons tout d'abord que si  $u_n \rightharpoonup u$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors  $\mathbf{F}(u_n) \rightarrow \mathbf{F}(u)$  dans  $\Omega$ , car l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte. De même  $\mathbf{J}(u) - \|\nabla u\|_{L^2}^2$  est une application continue sur  $H_0^1(\Omega)$  muni de la topologie faible.

Vérifions tout d'abord qu'en fait  $\mathcal{A}_w$  attire les bornés pour la topologie forte de  $H_0^1(\Omega)$ . Nous allons engager une démonstration par l'absurde pour démontrer la troisième assertion dans la définition d'un attracteur : en supposant qu'il existe  $\delta > 0$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_n \in \mathcal{B}_0$ ;

$$\forall a \in \mathcal{A}_w; \|S(t)b_n - a\|_{H_0^1} \geq \delta > 0.$$

Par définition d'un attracteur faible, on sait qu'il existe  $a \in \mathcal{A}_w$  tel que

$$S(t_n)b_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (3.13)$$

On veut montrer que

$$S(t_n)b_n \rightarrow a \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Soit  $t = T > 0$  et  $u_0 = S(t_n - T)b_n$ , en remplaçant  $t$  par  $T$  et  $u_0$  par  $S(t_n - T)b_n$  dans l'équation (3.12), il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(S(T)S(t_n - T)b_n) = \\ e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(t_n - T)b_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s)S(t_n - T)b_n) ds, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{J}(S(t_n)b_n) = e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(t_n - T)b_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s+t_n - T)b_n) ds.$$

Si on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on a  $S(t_n)b_n \rightharpoonup a$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ , en utilisant la continuité de  $S(t)$  sur  $H_0^1(\Omega)$  faible, on a

$$S(s+t_n - T)b_n = S(s-T)S(t_n)b_n \rightharpoonup S(s-T)a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Par convergence dominée, en utilisant la continuité de  $\mathbf{F}$  sur  $H_0^1(\Omega)$  faible, on montre alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s+t_n-T)b_n) ds = \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds$$

et en utilisant aussi que  $S(t_n-T)b_n \in \mathcal{B}_0$ , donc pour  $n$  assez grand il existe  $K$  tel que  $\mathbf{J}(S(t_n-T)b_n) \leq K$ .

On obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{J}(S(t_n)b_n) \leq K e^{-2\gamma T} + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds. \quad (3.14)$$

D'après l'équation (3.12), en faisant un changement de variables comme suit :

$u_0 = S(-T)a$ ,  $t = T$ , on obtient

$$\mathbf{J}(S(T)S(-T)a) = e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(-T)a) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s)S(-T)a) ds,$$

donc

$$\mathbf{J}(a) = e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(-T)a) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds,$$

ainsi

$$\int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds = \mathbf{J}(a) - e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(-T)a) \leq \mathbf{J}(a). \quad (3.15)$$

En utilisant (3.14) et (3.15), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup (\mathbf{J}(S(t_n)b_n)) \leq K e^{-2\gamma T} + \mathbf{J}(a),$$

on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ , il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup (\mathbf{J}S(t_n)b_n) \leq \mathbf{J}(a).$$

On a utilisé ici que  $S(-T)a \in \mathcal{A}_\omega$ . Comme  $\mathbf{J}(u) - \|\nabla u\|_{L^2}^2$  est une application continue sur  $H_0^1(\Omega)$  muni de la topologie faible, il vient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \|S(t_n)b_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|a\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.16)$$

De (3.13) et (3.16), on obtient

$$S(t_n)b_n \rightarrow a \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

ce qui contredit l'hypothèse avant (3.13).  $\square$

Il reste à montrer la compacité (forte) de  $\mathcal{A}_\omega$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Nous savons que  $\mathcal{A}_\omega$  est compact pour la topologie faible. Soit donc une suite  $a_n$  à valeurs dans  $\mathcal{A}_\omega$  qui converge faiblement vers  $a$  autre élément de l'attracteur i.e.

$$a_n \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (3.17)$$

On veut montrer que

$$a_n \rightarrow a \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Soit  $t = T > 0$  et  $u_0 = S(-T)a_n$ , en remplaçant  $t$  par  $T$  et  $u_0$  par  $S(-T)a_n$  dans l'équation (3.12), il vient

$$\mathbf{J}(S(T)S(-T)a_n) = e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(-T)a_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s)S(-T)a_n) ds,$$

donc

$$\mathbf{J}(a_n) = e^{-2\gamma T} \mathbf{J}(S(-T)a_n) + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a_n) ds.$$

Si on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on a  $a_n \rightharpoonup a$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ , en utilisant la continuité de  $S(t)$  sur  $H_0^1(\Omega)$  faible, on a

$$S(s-T)a_n \rightharpoonup S(s-T)a \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Par convergence dominée, en utilisant la continuité de  $\mathbf{F}$  sur  $H_0^1(\Omega)$  faible, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a_n) ds = \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds$$

en utilisant aussi que  $a_n \in \mathcal{A}_\omega$ , donc pour  $n$  assez grand il existe  $K$  tel que  $\mathbf{J}(S(-T)a_n) \leq K$ .

On obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq K e^{-2\gamma T} + \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} \mathbf{F}(S(s-T)a) ds. \quad (3.18)$$

En utilisant (3.15) et (3.18), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq K e^{-2\gamma T} + \mathbf{J}(a)$$

on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ , il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{J}(a_n) \leq \mathbf{J}(a).$$

On déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \|a_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|a\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.19)$$

De (3.17) et (3.19), on obtient

$$a_n \rightarrow a \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

On a ainsi vérifié que  $\mathcal{A}_\omega$  étant en fait un attracteur fort dans  $H_0^1(\Omega)$ . Ceci termine la démonstration du théorème. □

#### 4. Dimension de l'attracteur.

Dans cette section on va prouver que  $\mathcal{A}$  est de dimension de Hausdorff finie. Nous démontrons en première partie que le semi-groupe  $S(t)$  est différentiable sur les bornés de  $H_0^1$ , en seconde partie nous prouvons pour  $m$  assez grand que ce semi-groupe contracte les  $m$  volumes. Et par conséquent nous montrons que la dimension de  $\mathcal{A}$  est finie.

##### 4.1. La différentiabilité du semi-groupe

On suppose que la deuxième équation du système (1.1) se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \phi &= \pm E(\rho) \text{ si et seulement si} \\ \begin{cases} \Delta\phi = \pm\rho & \Omega \\ \phi = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Soit  $u(t) = S(t)u_0$  solution de (1.1) sur  $H_0^1$ . On se propose de démontrer que  $v(t) = DS(t)u_0.h$  est une solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} v_t + \gamma v + i\Delta v \pm 2iE(Re(\bar{u}v))u \pm iE(|u|^2)v = 0, \\ v(0) = h \\ v = 0 \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

**Proposition 4.1.** *Le problème de Cauchy associé à (4.2) est localement bien posé dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus pour  $T > 0$  on a*

$$\|v(t)\|_{H_0^1}^2 \leq C(T)\|h\|_{H_0^1}^2. \tag{4.3}$$

*Démonstration.* Comme nous travaillons sur des intervalles de temps fini, nous pouvons supposer  $\gamma = 0$  (quitte à remplacer  $v$  par  $ve^{\gamma t}$ ). Il est clair que le problème de Cauchy associé à (4.2) est localement bien posé dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Pour démontrer l'égalité (4.3), on multiplie l'équation (4.2) par  $\Delta\bar{v}$ , et on intègre sur  $\Omega$  en prenant la partie réelle de cette quantité, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{H_0^1}^2 = \pm \text{Im} \int E(|u|^2)v\Delta\bar{v} \pm 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{u}v))u\Delta\bar{v}. \quad (4.4)$$

On intègre le premier terme du membre de droite de (4.4) par parties, il vient alors

$$\begin{aligned} \pm \text{Im} \int E(|u|^2)v\Delta\bar{v} &= \mp \text{Im} \int v\nabla\bar{v}E(\nabla(|u|^2)) \\ &\leq \left| \int v\nabla\bar{v}E(\nabla(|u|^2)) \right| \\ &\leq c\|v\|_{L^6}\|\nabla v\|_{L^2}\|\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)\|_{L^3}. \end{aligned}$$

D'une part

$$\|v\|_{L^6} \leq c\|v\|_{H_0^1} \quad \text{par injection de Sobolev.}$$

D'autre part

comme  $H_0^1 \hookrightarrow L^q \forall q \in [2, 6]$ , on obtient,

$$\begin{aligned} \|\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)\|_{L^3} &\leq c\|\Delta^{-1}\nabla(|u|^2)\|_{H_0^1} \\ &\leq c\| |u|^2 \|_{L^2} \\ &\leq c\|u\|_{L^4}^2 \\ &\leq c\|u\|_{H_0^1}^2 \\ &\leq cR^2. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\pm \text{Im} \int E(|u|^2)v\Delta\bar{v} \leq K^*\|v\|_{H_0^1}^2 \quad \text{où } K^* = c \left( \sup_{[0,T]} \|u\|_{H_0^1} \right).$$

L'autre terme dans le membre de droite de (4.4) s'écrit comme suit (après intégration par parties)

$$\begin{aligned} \pm 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{u}v))u\Delta\bar{v} &= \mp 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{u}\nabla v))u\nabla\bar{v} \\ \mp 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{v}\nabla u))u\nabla\bar{v} &\mp 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{u}v))\nabla u\nabla\bar{v}. \end{aligned} \quad (4.5)$$



Le premier terme dans (4.5) se traite comme suit

$$\begin{aligned} \mp 2Im \int E(Re(\bar{u}\nabla v))u\nabla\bar{v} &\leq \left| 2Im \int E(Re(\bar{u}\nabla v))u\nabla\bar{v} \right| \\ &\leq c\|u\|_{L^6}\|\nabla v\|_{L^2}\|E(Re(\bar{u}\nabla v))\|_{L^3} \end{aligned}$$

en procédant comme dans le calcul précédant, il vient alors

$$\begin{aligned} \mp 2Im \int E(Re(\bar{u}\nabla v))u\nabla\bar{v} &\leq c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}\|\nabla E(Re(\bar{u}\nabla v))\|_{L^2} \\ &\leq c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}\|uv\|_{L^2} \\ &\leq K^*\|v\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

De la même manière on peut majorer les deux autres termes dans (4.5).  
D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{H_0^1}^2 \leq K^* \|v\|_{H_0^1}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|v\|_{H_0^1}^2 \leq e^{2K^*t} \|h\|_{H_0^1}^2. \quad (4.6)$$

□

Pour démontrer la différentiabilité de  $S(t)$  il faut démontrer la chose suivante

**Proposition 4.2.**

$$\text{Soit } \begin{cases} \tilde{u}(t) = S(t)(u_0 + h), \\ u(t) = S(t)u_0, \\ v(t) = DS(t)u_0.h. \end{cases} \quad (4.7)$$

Alors pour  $T > 0$  il existe  $K'(t)$  et  $\delta > 0$  tel que

$$\|S(t)(u_0 + h) - S(t)u_0 - DS(t)u_0.h\|_{H_0^1} \leq K'(T) \|h\|_{H_0^1}^{1+\delta}. \quad (4.8)$$

*Démonstration.* Soit  $w(t) = \tilde{u}(t) - u(t) - v(t)$ , solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} w_t + i\Delta w \pm i[(u + v + w)E(|u + v + w|^2) \mp uE(|u|^2) \\ \mp 2uE[Re(\bar{u}v)] \mp vE(|u|^2)] = 0, \\ w(0) = 0 \\ w = 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous avons supposé que  $\gamma = 0$  ( quitte à remplacer  $w(t)$  par  $w(t)e^{\gamma t}$ ).  
L'équation (4.9) se réécrit aussi en

$$\begin{aligned} w_t + i\Delta w \pm i(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2) \pm 2ivE(Re(\bar{u}v)) \\ \pm iwE(|u+v+w|^2) \pm iuE(|v|^2) \pm ivE(|v|^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec la condition initiale  $w(0) = 0$ , et la condition aux limites  $w = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Car

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(Re(\bar{u}v)).$$

On va contrôler  $w$  en norme  $H_0^1$ . On multiplie l'équation (4.10) par  $\Delta\bar{w}$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_0^1}^2 &= \pm Im \int \Delta\bar{w}(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2) \\ &\pm 2Im \int \Delta\bar{w}vE(Re(\bar{u}v)) \pm Im \int w\Delta\bar{w}E(|u+v+w|^2) \\ &\pm Im \int \Delta\bar{w}uE(|v|^2) \pm Im \int \Delta\bar{w}vE(|v|^2). \end{aligned}$$

En intégrant l'équation précédente par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_0^1}^2 &= \underbrace{\mp Im \int \nabla\bar{w}\nabla[(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)]}_a \\ &\underbrace{\mp 2Im \int \nabla\bar{w}\nabla[vE(Re(\bar{u}v))]}_b \underbrace{\mp Im \int \nabla\bar{w}\nabla[wE(|u+v+w|^2)]}_c \\ &\underbrace{\mp Im \int \nabla\bar{w}\nabla[uE(|v|^2)]}_d \underbrace{\mp Im \int \nabla\bar{w}\nabla[vE(|v|^2)]}_e. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On contrôle le premier terme dans le membre de droite de l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
 |a| &\leq \left| \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [(u+v)E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)] \right| \\
 &\leq \int |\nabla \bar{w}| |\nabla(u+v)| |E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)| \\
 &\quad + \int |\nabla \bar{w}| |u+v| |\nabla E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)| \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla(u+v)\|_{L^2} \|E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)\|_{L^\infty} \\
 &\quad + c \|\nabla w\|_{L^2} \|u+v\|_{L^6} \|\nabla E(|u+v+w|^2 - |u+v|^2)\|_{L^3} \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla(u+v)\|_{L^2} \| |u+v+w|^2 - |u+v|^2 \|_{L^2} \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla(u+v)\|_{L^2} \|\bar{w}(2u+2v+w)\|_{L^2} \\
 &\leq K \|w\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned}$$

Où  $K$  est une constante qui dépend de  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_0^1}$ .

Dans la suite  $K$  désigne une telle constante qui peut changer de valeur de ligne en ligne.

Maintenant on contrôle le second terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
 |b| &\leq \left| 2 \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [vE(\operatorname{Re}(\bar{u}v))] \right| \\
 &\leq 2 \int |\nabla \bar{w}| |\nabla v| |E(\operatorname{Re}(\bar{u}v))| + 2 \int |\nabla \bar{w}| |v| |\nabla E(\operatorname{Re}(\bar{u}v))| \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \|E(\operatorname{Re}(\bar{u}v))\|_{L^\infty} \\
 &\quad + c \|\nabla w\|_{L^2} \|v\|_{L^6} \|\nabla(\operatorname{Re}(\bar{u}v))\|_{L^3}.
 \end{aligned}$$

Il vient donc comme  $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ , on obtient

$$\|E(\operatorname{Re}(\bar{u}v))\|_{L^\infty} \leq c \|\bar{u}v\|_{L^2} \leq c \|v\|_{H_0^1}.$$

Par ailleurs

$$\|\nabla(\operatorname{Re}(\bar{u}v))\|_{L^3} \leq c \|\bar{u}v\|_{L^2} \leq c \|v\|_{H_0^1}.$$

Finalement ce second terme se contrôle en

$$\begin{aligned}
 \left| 2 \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [vE(\operatorname{Re}(\bar{u}v))] \right| &\leq K \|w\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}^2 \\
 &\leq \frac{\gamma}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 + K \|v\|_{H_0^1}^4.
 \end{aligned}$$

Et par suite on estime le troisième terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
 |c| &\leq \left| \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [w E(|u+v+w|^2)] \right| \\
 &\leq \int |\nabla \bar{w}| |\nabla w| |E(|u+v+w|^2)| + \int |\nabla \bar{w}| |w| |\nabla E(|u+v+w|^2)| \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} [\|\nabla w\|_{L^2} \|E(|u+v+w|^2)\|_{L^\infty} \\
 &\quad + \|w\|_{L^6} \|E(|u+v+w|^2)\|_{L^3}] \\
 &\leq c \|w\|_{H_0^1}^2 \| |u+v+w|^2 \|_{L^2} \\
 &\leq c \|w\|_{H_0^1}^2 \| |u+v+w|^2 \|_{L^4} \\
 &\leq K \|w\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned}$$

Et puis on estime le quatrième terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11) comme suit

$$\begin{aligned}
 |d| &\leq \left| \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [u E(|v|^2)] \right| \\
 &\leq \int |\nabla \bar{w}| |\nabla u| |E(|v|^2)| + \int |\nabla \bar{w}| |u| |\nabla E(|v|^2)| \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} [\|\nabla u\|_{L^2} \|E(|v|^2)\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^6} \|\nabla E(|v|^2)\|_{L^3}] \\
 &\leq K^* \|w\|_{H_0^1} \| |v|^2 \|_{L^2} \\
 &\leq K \|w\|_{H_0^1}^2 + K' \|v\|_{H_0^1}^4.
 \end{aligned}$$

Enfin on estime le dernier terme dans le membre de droite dans l'équation (4.11)

$$\begin{aligned}
 |e| &\leq \left| \operatorname{Im} \int \nabla \bar{w} \nabla [vE(|v|^2)] \right| \\
 &\leq \int |\nabla \bar{w}| |\nabla v| |E(|v|^2)| + \int |\nabla \bar{w}| |v| |\nabla E(|v|^2)| \\
 &\leq c \|\nabla w\|_{L^2} [\|\nabla v\|_{L^2} \|E(|v|^2)\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^6} \|\nabla E(|v|^2)\|_{L^3}] \\
 &\leq K^* \|w\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}^3 \\
 &\leq K \|w\|_{H_0^1}^2 + K' \|v\|_{H_0^1}^6.
 \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{H_0^1}^2 \leq K_1 \|w\|_{H_0^1}^2 + K_2 \|v\|_{H_0^1}^4 + K_3 \|v\|_{H_0^1}^6,$$

où  $K_1, K_2, K_3$  sont des constantes qui dépendent de  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_0^1}$ .

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq \tilde{C} e^{kt} [\|v\|_{H_0^1}^4 + \|v\|_{H_0^1}^6]. \quad (4.12)$$

D'où la démonstration de la Proposition 4.2 est complète.  $\square$

## 4.2. Contraction du volume

On va montrer le théorème suivant

**Théorème 4.3.** *Si la force  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$  alors l'attracteur  $\mathcal{A}$  est de dimension de Hausdorff finie dans  $H_0^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* On va montrer que les opérateurs  $DS(t)u_0 \cdot h$  contractent les  $m$  volumes dans  $H_0^1$ . Soient  $h_1, \dots, h_m$  sont  $m$  éléments dans  $H_0^1$ , on définit le déterminant de Gram  $G_m$  comme suit

$$G_m = \operatorname{Gram}(v_1, \dots, v_m) = \det_{1 \leq i, j \leq m} (v_i(t), v_j(t)), \quad v_i(t) = (DS(t)u_0)h_i.$$

On note que les vecteurs  $v_1, \dots, v_m$  sont solutions de l'équation suivante

$$\begin{cases} v_{it} + \gamma v_i + i\Delta v_i + 2iE(\operatorname{Re}(\bar{u}v_i))u + iE(|u|^2)v_i = 0, \\ v_i(0) = h_i, \end{cases} \quad (4.13)$$

avec des conditions aux limites

$$\phi = v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On va montrer pour  $m$  assez grand, le déterminant de Gram décroît exponentiellement quand  $t \rightarrow +\infty$ .

On considère  $v(t) = DS(t)u_0.h$  solution de l'équation (4.13) on multiplie par  $\Delta\bar{v}$ , et en prenant la partie réelle alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{G}(v) - \gamma \mathbf{G}(v) = \text{Im} \int E(|u|^2)v \Delta\bar{v} + 2\text{Im} \int E(\text{Re}(\bar{u}v)u \Delta\bar{v}), \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{G}(v) = \|v\|_{H_0^1}^2$ .

On définit le produit scalaire associé à  $\mathbf{G}$

$$\beta(v, w) = \frac{\mathbf{G}(v+w) - \mathbf{G}(v-w)}{4}.$$

On introduit le déterminant de Gram

$$G_m(t) = \det_{1 \leq i, j \leq m} (\beta(v_i(t), v_j(t))).$$

**Proposition 4.4.** *Pour  $u_0$  dans  $\mathcal{A}$  et  $m$  assez grand, les vecteurs  $v_i(t) = (DS(t)u_0)h_i$  satisfont que  $G_m$  décroît exponentiellement.*

*Démonstration.* Tout d'abord on dérive le déterminant de Gram

$$\begin{aligned} \frac{dG_m}{dt} &= \frac{d}{dt} [\det(C_1(t), \dots, C_m(t))] \\ &= \sum_{k=1}^m \det\left(C_1(t), \dots, \frac{dC_k(t)}{dt}, \dots, C_m(t)\right), \end{aligned}$$

tel que  $C_i(t)$  sont des vecteurs colonnes

$$C_k(t) = \begin{pmatrix} \beta(v_1(t), v_k(t)) \\ \vdots \\ \beta(v_i(t), v_k(t)) \\ \vdots \\ \beta(v_m(t), v_k(t)) \end{pmatrix}.$$

On note  $Z(v)$  le membre de droite de (4.14), on suppose que

$$\nu(v, v) = Z(v),$$

avec

$$\nu(v, w) = \frac{Z(v+w) - Z(v-w)}{4}.$$

En appliquant le lemme classique suivant

**Lemme 4.5.** *Il existe  $S$  matrice symétrique  $m \times m$  qui dépend de  $t$  et  $m$  tel que*

$$\nu(v, w) = \beta(Sv, w).$$

*Démonstration.* Voir [1]. □

La fonction  $\beta$  satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned}
 \frac{d\beta(v_i(t), v_k(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{G}(v_i(t) + v_k(t)) - \mathbf{G}(v_i(t) - v_k(t))}{4} \\
 &= 2 \frac{Z(v_i(t) + v_k(t)) - Z(v_i(t) - v_k(t))}{4} \\
 &\quad - 2\gamma \frac{\mathbf{G}(v_i(t) + v_k(t)) - \mathbf{G}(v_i(t) - v_k(t))}{4} \\
 &= 2\nu(v_i(t), v_k(t)) - 2\gamma\beta(v_i(t), v_k(t)) \\
 &= 2\beta(Sv_i(t), v_k(t)) - 2\gamma\beta(v_i(t), v_k(t)) \\
 &= 2\beta \left( \sum_{j=1}^m (s_{ij}v_i(t), v_k(t)) \right) - 2\gamma\beta(v_i(t), v_k(t)) \\
 &= -2\gamma C_k(t) + 2 \sum_{j=1}^m s_{kj} C_k(t).
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = -2\gamma C_k(t) + 2 \sum_{j=1}^m s_{kj} C_k(t).$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dG_m(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^m \det \left( C_1(t), \dots, \frac{dC_k(t)}{dt}, \dots, C_m(t) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left( -2\gamma G_m + 2 \sum_{j=1}^m s_{kj} \det [\dots, C_{k-1}(t), C_j(t), C_{k+1}(t), \dots] \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left( -2\gamma G_m + 2 \sum_{k=1}^m s_{kk} G_m \right).
 \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\frac{dG_m}{dt} + 2(\gamma m - Tr S)G_m = 0.$$

Pour montrer la décroissance de  $G_m$ , on va estimer  $TrS$  en utilisant la formule min max, alors

$$TrS \leq \sup \left( \sum_{j=1}^m \frac{Z(v_j)}{\mathbf{G}(v_j)} \right).$$

On sait que  $\mathbf{G}(v_j) = \|v\|_{H_0^1}^2$ ,  $Z(v_j)$  s'écrit comme la somme de deux termes dans l'équation (4.14). On intègre l'équation (4.14) par parties, il vient alors

$$\begin{aligned} Im \int E(|u|^2)v\Delta\bar{v} &= -Im \int v\nabla\bar{v}E(\nabla(|u|^2)) \\ &\leq \left| \int v\nabla\bar{v}E(\nabla(|u|^2)) \right| \\ &\leq c\|v\|_{L^3}\|\nabla v\|_{L^2}\|\Delta^{-1}(\nabla)|u|^2\|_{L^6} \\ &\leq cR^2\|v\|_{L^3}\|v\|_{H_0^1}; \end{aligned}$$

en utilisant l'injection continue  $H^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^3$ , on obtient

$$\|v\|_{L^3} \leq c\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}},$$

et d'après l'inégalité d'interpolation, on a

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^1}^{\frac{1}{2}};$$

on en déduit que

$$Im \int E(|u|^2)v\Delta\bar{v} \leq cR^2\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}.$$

Majorons maintenant le deuxième terme dans  $Z$

$$\begin{aligned} 2Im \int E(Re(\bar{u}v))u\Delta\bar{v} &= \\ &- 2Im \int \nabla[E(Re(\bar{u}v))]u\nabla\bar{v} - 2Im \int E(Re(\bar{u}v))\nabla u\nabla\bar{v}. \end{aligned}$$



D'une part

$$\begin{aligned}
 -2Im \int \nabla[E(Re(\bar{u}v))]u\nabla\bar{v} &\leq 2Im \int |\nabla[E(Re(\bar{u}v))]| |u| |\nabla\bar{v}| \\
 &\leq \|v\|_{H_0^1} \|u\|_{L^3} \|\nabla[E(Re(\bar{u}v))]\|_{L^6} \\
 &\leq cR \|v\|_{H_0^1} \|uv\|_{L^2} \\
 &\leq cR^2 \|v\|_{H_0^1} \|v\|_{L^3} \\
 &\leq cR^2 \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 -2Im \int E(Re(\bar{u}v))\nabla u\nabla\bar{v} &\leq 2Im \int |E(Re(\bar{u}v))| |\nabla u| |\nabla\bar{v}| \\
 &\leq \|v\|_{H_0^1} \|u\|_{H_0^1} \|uv\|_{L^2} \\
 &\leq cR^2 \|v\|_{H_0^1} \|v\|_{L^3} \\
 &\leq cR^2 \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Weyl on a que si  $\lambda_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de  $-\Delta$ , alors

$$\lambda_j \sim C(\Omega)j^{\frac{2}{3}}.$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
 TrS &\leq \sup \left( \sum_{j=1}^m \frac{\|v_j\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}}{\|v_j\|_{H_0^1}^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &\leq C(\Omega) \sup \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j^{\frac{1}{4}}} \right) \\
 &\leq C(\Omega) \sup \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{\frac{1}{6}}} \right) \\
 &\leq C(\Omega)m^{\frac{5}{6}}.
 \end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned} \gamma m - \text{Tr}S \geq 0 &\iff \gamma m^{\frac{5}{6}} \left( m^{\frac{1}{6}} - \frac{C(\Omega)}{\gamma} \right) \geq 0 \\ &\iff m \geq \left( \frac{C(\Omega)}{\gamma} \right)^6 \iff G_m \downarrow 0. \end{aligned}$$

□

On a alors décroissance des volumes  $m$ -dimensionnels.

□

## Références

- [1] N. AKROUNE – *Comportement asymptotique de certaines équations faiblement amorties*, Thèse, Université de Cergy-Pontoise, 2000.
- [2] J. BALL – « Global attractors for damped semilinear wave equations. partial differential equations and applications », *Discrete Contin. Dyn. Syst* **10** (2004), p. 31–52.
- [3] T. CAZENAVE & A. HARAUX – *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.
- [4] J. GHIDAGLIA – « Finite dimensional behaviour for weakly damped driven schrodinger equations », *Ann.Inst. Henri Poincaré* **5** (1988), p. 365–405.
- [5] ———, « Explicit upper and lower bounds on the number of degrees of freedom for damped and driven cubic schrodinger equations », *Discrete Contin. Dyn. Syst* **23**, n°3 (1989), p. 433–443.
- [6] O. GOUBET & R. ROSA – « Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped kdv equation on the real line », *J. Differential Equations* **185** n°1 (2002), p. 25–53.
- [7] R. ILLNER, O. KAVIAN & H. LANGE – « Stationary solutions of quasi-linear schrodinger-poisson systems », *J. Differential Equations* **145** (1998), p. 1–16.
- [8] R. ILLNER, H. LANGE, B. TOOMIR & P. ZWEIFEL – « On quasi-linear schrodinger-poisson systems », *Math. Meth. Appl. Sci.* **20** (1997), p. 1223–1238.
- [9] P. LAURENÇOT – « Long-time behaviour for weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \leq 3$  », *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **2** (1995), no. 3, p. 357–369.

A. DABAA

- [10] P. A. MARKOWICH, C. RINGHOFER & C. SCHMEISER – *Semiconductor equations*, Springer, Wien, 1990.
- [11] F. NIER – « Schrodinger-poisson systems in dimension  $d \leq 3$ , the whole space case », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **123A** (1993), p. 1179–1201.
- [12] R. TEMAM – *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, second éd., Applied Mathematical Sciences, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997.

AMNA DABAA  
LAMFA, CNRS UMR 6140  
Laboratoire Amiénois de Mathématiques  
Fondamentales et Appliquées,  
Université de Picardie Jules Verne,  
Faculté de Mathématiques et  
d'Informatique,  
33, rue Saint-Leu  
80039 Amiens Cedex 1,  
France.  
amna.daaba@u-picardie.fr