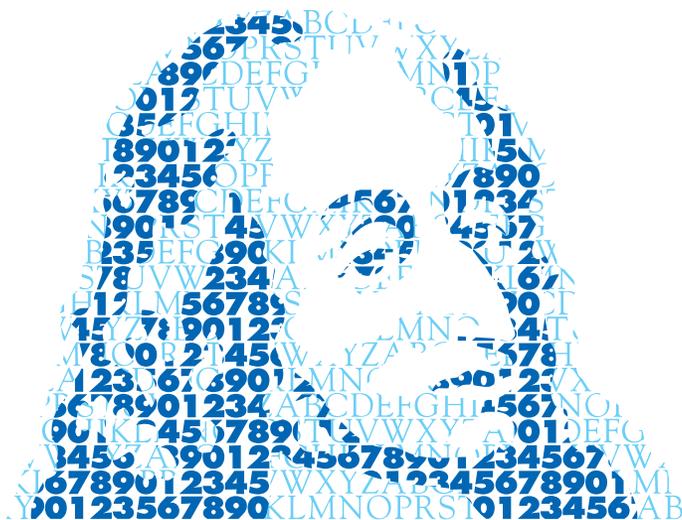


ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

ABDELMALEK AZIZI, MOHAMED AYADI,
MOULAY CHRIF ISMAILI ET MOHAMED TALBI

Sur les unités des extensions cubiques cycliques non
ramifiées sur certains sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Volume 16, n° 1 (2009), p. 71-82.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_1_71_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Sur les unités des extensions cubiques cycliques non ramifiées sur certains sous-corps de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

ABDELMALEK AZIZI
MOHAMED AYADI
MOULAY CHRIF ISMAILI
MOHAMED TALBI

Résumé

Soient k le corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ (respectivement le corps biquadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$), d un entier positif sans facteur carré, K une extension cubique cyclique non ramifiée de k , diédrale sur \mathbf{Q} totalement réelle, (respectivement diédrale sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.)

On constate qu'on a deux structures possibles pour le groupe des unités U_K de K , notées *alpha* et *delta*.

*On the units of unramified cyclic cubic extensions of some
subfields of $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$*

Abstract

Let k be a real quadratic fields of type $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ (respectively biquadratic of type $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$), d positive integer, square free, K an extension not ramified of k dihedral over \mathbf{Q} totally real, (respectively dihedral over $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.)

We notice that have two possible structures for the group of units U_K of K , denoted by *alpha* and *delta*.

1. Introduction

Soient $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel ou $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$ un corps biquadratique, où d est un entier positif sans facteur carré, U_F le groupe des unités du corps de nombres F , T_F le groupe des unités de

Mots-clés : Corps quartiques et biquadratiques, Unités, 3-nombre de Classes .

Classification math. : 11R27, 11R29, 11R37.

torsion de F et $E_F = U_F/T_F$ le groupe des unités sans torsion de F et K une extension cubique cyclique non ramifiée de k , diédrale sur \mathbf{Q} totalement réelle, ou diédrale sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Nous déterminons la structure du groupe des unités de E_K moyennant les indices $[E_K : N_K/E_K]$ et $[E_K : E_L E_{L^\sigma} E_k]$, où $L = \text{inv}(\langle \tau \rangle)$ est le corps fixé par τ , avec σ et τ les générateurs d'ordre 3 et 2 de $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ respectivement de $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{-3}))$.

Plus précisément, on montre que dans le cas où k (quadratique réel) deux structures de U_K sont possibles qu'on notera par "alpha" et "delta", et si de plus le 3-groupe de classes de k est de type (3, 3), la structure de U_K correspond au cas "delta" si et seulement si K admet une unité de Minkowski.

Ensuite, nous prolongeons ces résultats aux corps biquadratiques de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$. Plus précisément, nous montrons qu'on a l'équivalence $[U_k : N_K/U_K][U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3$ si et seulement si la racine 3^{ème} de l'unité $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ est norme d'une unité de L . Le calcul des indices $[U_k : N_K/U_K]$ et $[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k]$ joue un rôle essentiel dans la résolution du problème de capitulation des 3-classes d'idéaux de k .

2. Cas d'un corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$

Soient k une extension quadratique réelle, K une extension cubique de k non ramifiée diédrale sur \mathbf{Q} . On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Gal}(K/\mathbf{Q}) &= \langle \sigma, \tau \rangle, \quad \sigma^3 = \tau^2 = 1, \quad \sigma\tau = \tau\sigma^2, \quad L = \text{inv}(\langle \tau \rangle), \\ \text{Gal}(K/k) &= \langle \sigma \rangle, \quad \mathbf{a} = [E_K : E_k E_L E_{L^\sigma}] \text{ et } \mathbf{b} = [E_k : N_{K/k} E_k]. \end{aligned}$$

Proposition 2.1. *Chacun des cas suivants*

$$\begin{aligned} (\alpha) : & \quad \mathbf{a} = 1, \quad \mathbf{b} = 3; \\ (\beta) : & \quad \mathbf{a} = 3, \quad \mathbf{b} = 3; \\ (\gamma) : & \quad \mathbf{a} = 9, \quad \mathbf{b} = 3; \\ (\delta) : & \quad \mathbf{a} = 3, \quad \mathbf{b} = 1; \\ (\epsilon) : & \quad \mathbf{a} = 9, \quad \mathbf{b} = 1; \end{aligned}$$

correspond à une structure bien déterminée du groupe des unités sans torsion de K .

Démonstration. Voir [6] □

Remarque 2.2. K/\mathbf{Q} est diédrale totalement réelle, k aussi quadratique réel donc $[U_k : N_{K/k}U_K] = [E_k : N_{K/k}E_K]$, car $[K : k] = 3, T_K = \{\pm 1\}$ et $N_{K/k}(-1) = -1$. On a aussi

$$\begin{aligned} [E_K : E_L E_{L^\sigma} E_k] &= [U_K / \{\pm 1\} : U_L / \{\pm 1\} U_{L^\sigma} / \{\pm 1\} U_k / \{\pm 1\}] \\ &= [U_K / \{\pm 1\} : U_L U_{L^\sigma} U_k / \{\pm 1\}] \\ &= [U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] \end{aligned}$$

Lemme 2.3. *On suppose que le nombre de classes de k est divisible par 3, alors $[E_k : E_k^3] = \mathbf{ab}$.*

Démonstration. Puisque le nombre de classes de k est divisible par 3, il existe une extension non ramifiée cubique cyclique K sur k , diédrale sur \mathbf{Q} totalement réelle. D'autre part, on a :

$$[E_k : E_k^3] = [U_k : N_{K/k}U_K][N_{K/k}U_K : U_K^3],$$

donc :

$$[U_k : N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k : E_k^3]}{[N_{K/k}U_K : U_K^3]}. \quad (2.1)$$

Aussi : $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3$. En effet, \mathbf{Q} est totalement réelle, donc $U_L = \{\pm 1\}$. $\langle e_1, e_2 \rangle$, où $\{e_1, e_2\}$ est un système fondamental d'unités de L . Donc $U_L U_{L^\sigma} = \{\pm 1\}$. $\langle e_1, e_2, e_1^\sigma, e_2^\sigma \rangle$, alors si pour $i \in \{1, 2\}$, $\varepsilon = e_i e_i^\sigma \in U_L U_{L^\sigma}$, on a :

$$\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} (e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} (e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2},$$

or : $L = \text{inv}(\langle \tau \rangle)$ i.e $e_i^\tau = e_i$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} &= (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} (e_i^\tau)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} \\ &= (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{k/\mathbf{Q}}(e_i) \in \{\pm 1\}, \end{aligned}$$

d'où $N_{K/k}(\varepsilon) \in U_K^3$. Si $\varepsilon = e_1 e_2$, on a $N_{K/k}(\varepsilon) = (e_1 e_2)^{1+\sigma+\sigma^2}$. Comme $e_1 e_2 \in L$, on déduit que

$$\begin{aligned} (e_1 e_2)^{1+\tau} &= (e_1 e_2)^2 \implies ((e_1 e_2)^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} = (N_{K/k}(e_1 e_2))^2 \\ &\implies N_{K/\mathbf{Q}}(e_1 e_2) = (e_1 e_2)^{1+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{K/\mathbf{Q}}(e_1 e_2)^2, \end{aligned}$$

donc $N_{K/\mathbf{Q}}(e_1e_2)^2 = 1$. On raisonne de la même façon pour $\varepsilon = e_i$, $i \in \{1, 2\}$, et $\varepsilon = e_1^\sigma e_2^\sigma$. Comme $N_{K/k}(U_k) = U_k^3$, alors $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3$. De (2.1) on tire :

$$[U_k : N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k : E_k^3]}{[N_{K/k}U_K : N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)]}.$$

Si $N : U_K \rightarrow U_k$ est l'application norme de l'extension K/k , alors on a

$$[N(U_K) : N(U_L U_{L^\sigma} U_k)] = \frac{[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k]}{[\ker N : \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k]},$$

donc

$$[U_k : N_{K/k}U_K] = \frac{[E_k : E_k^3][\ker N : \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k]}{[U_k : U_L U_{L^\sigma} U_k]},$$

et comme $[\ker N : \ker N \cap U_L U_{L^\sigma} U_k] = 1$ (d'après [5]) on tire que

$$[U_k : N_{K/k}U_K][U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = [E_k : E_k^3]$$

c'est à dire $\mathbf{ab} = [E_k : E_k^3]$. □

Lemme 2.4. *Si K/k une extension non ramifiée, alors on a*

$$E_k \cap N_{K/k}(K^\times) = E_k.$$

Démonstration. Soient \mathcal{P} un idéal premier de k et \mathcal{B} un diviseur premier de \mathcal{P} dans K , alors $K_{\mathcal{B}}/k_{\mathcal{P}}$ est une extension non ramifiée ($K_{\mathcal{B}}, K_{\mathcal{P}}$ les localisés en β et \mathcal{P} respectivement), donc si $x \in E_k$, il existe γ unité de $K_{\mathcal{B}}$ tel que $x = N_{K_{\mathcal{B}}}(x)$ et ceci pour tout idéal \mathcal{P} premier fini de k . D'autre part, si \mathcal{P}_∞ est un premier réel infini de k non ramifié de K , \mathcal{B}_∞ un diviseur de \mathcal{P}_∞ dans K , alors les compléments de k et K relativement à \mathcal{P}_∞ et \mathcal{B}_∞ sont \mathbf{R} , il est donc naturel de dire que les symboles de Forbenius associés, aux idéaux infinis sont égaux à 1, d'où tout élément de K est norme infinie d'un élément de k et comme l'extension K/k est cyclique, alors x est norme globale dans K (voir [3]). □

Lemme 2.5. *On suppose que K/k est non ramifiée, on note par S_K le 3-groupe de classes de K , $S_K^{(\sigma)} = \{[A] \in S_K / [A]^\sigma = [A]\}$ le groupe des classes ambigues, $S_{K,fr}^{(\sigma)} = \{[A] \in S_K / A^\sigma = A\}$ le sous-groupe formé par les classes fortement ambigues, alors on a $\#S_K^{(\sigma)} = b \times \#S_{K,fr}^{(\sigma)}$.*

Démonstration. Soit l'application

$$\psi = \begin{cases} S_K^{(\sigma)} \longrightarrow U_k/N_{K/k}U_K \\ c = [A] \mapsto N_{K/k}(x)N_{K/k}U_K \end{cases}$$

où x est défini comme suit : si $c = [A] \in S_K^{(\sigma)}$, alors $c^{1-\sigma} = 1$ et $A^{\sigma-1} = (x)$ avec x un élément de K , $N_{K/k}(x)$ est une unité de E_k . L'application ψ est bien définie car si $c = [A] = [B]$ et $B^{\sigma-1} = (y)$ alors il existe $\zeta \in K^*$ tel que $A = \zeta B$, et $A^{\sigma-1} = \zeta^{\sigma-1} B^{\sigma-1} \implies (x) = \zeta^{\sigma-1}(y) \implies \exists z \in U_K$ tel que $x = z\zeta^{\sigma-1}y \implies N_{K/k}(x) = N_{K/k}(z)N_{K/k}(y)$, ce qui montre que $N_{K/k}(x)$ et $N_{K/k}(y)$ ont même classe modulo le groupe de normes des unités de K .

L'application ψ est surjective. En effet, si $\eta \in E_k$ d'après le lemme 2.4, il existe $x \in K^\times$ tel que $\eta = N_{K/k}(x)$ donc $N_{K/k}((x)) = (1)$, d'après le théorème 90 de Hilbert $(x) = C^{\sigma-1}$, où C est un idéal de K et par suite $\psi([C]) = \eta N_{K/k}U_K$. De plus on a $\ker \psi = \{c \in S_K^{(\sigma)} / \psi(c) = 1\}$, donc $c = [A] \in \ker \psi \Leftrightarrow x = N_{K/k}(\rho)$ où ρ est une unité de K , comme $A^{\sigma-1} = (z)$ et $N_{K/k}(z) = x$ alors z/ρ est une unité de norme 1, d'où $\rho/z = \beta^{1-\sigma} \Leftrightarrow \rho = z\beta^{1-\sigma}$ donc $z/\rho\beta^{1-\sigma} = 1$, comme ρ est une unité on aurait $(\beta A)^{1-\sigma} = 1$ d'où βA est ambiguë et $[\beta A] = [A] = c \in S_{K,fr}^{(\sigma)}$, et par suite $\ker \psi \subset S_{K,fr}^{(\sigma)}$. L'autre inclusion est évidente, donc d'après le premier théorème d'isomorphisme, on déduit que

$$S_K^{(\sigma)} / S_{K,fr}^{(\sigma)} \simeq \text{Im} \psi = U_k / N_{K/k}U_K$$

et $\#S_K^{(\sigma)} / S_{K,fr}^{(\sigma)} = \mathbf{b}$. □

Théorème 2.6. *On suppose que K/k est non ramifiée, et $S_k \simeq (3, 3)$, les cas (β) et (α) et (ε) ne peuvent avoir lieu. De plus, les trois affirmations sont équivalentes :*

- (1) *la structure de E_K correspond au cas (δ) .*
- (2) *le sous-groupe des classes fortement ambiguës dans K/k n'est pas trivial.*
- (3) *le corps K admet une unité de Minkowski.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3, $\mathbf{ab} = [E_k : E_k^3]$. Comme $E_k/E_k^3 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{ab} = 3$, ce qui élimine les types (β) , (α) et (ε) . On montre les implications $2) \implies 1) \Leftrightarrow 3) \text{ et } 1) \implies 2)$.

Soit \mathcal{A} un idéal de K non principal tel que $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{A}$, alors $[\mathcal{A}] \neq 1$ est ambiguë et $[\mathcal{A}] \in S_{K,fr}^{(\sigma)}$, d'autre part on a $\#S_K^{(\sigma)} = 3$, car par [2] $\#S_K^{(\sigma)} = \#S_k \times 3^{t-2+q}$ avec t le nombre des premiers de k qui se ramifient dans K et

$$q = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ est norme dans } K/k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où e est l'unité fondamentale de k , et dans notre cas, K/k est non ramifiée, donc $t = 0$ et $q = 1$ [lemme 2.5]. Puisque S_k est de type $(3, 3)$, alors $\#S_K^{(\sigma)} = 9/3 = 3$ entraîne que $S_{K,fr}^{(\sigma)} = S_K^{(\sigma)}$ et $\mathbf{b} = 1$ [lemme 2.5], d'où $\mathbf{a} = 3$ et on a le type (α) . Comme l'anneau des entiers du sous-corps réel maximal de $\mathbf{Q}(\zeta_3)$ ($\zeta_3^3 = 1$, la racine 3^{ème} de l'unité) est \mathbf{Z} et il est principal et $K/\mathbf{Q} \simeq D_3$, alors d'après [6] le type (δ) est une condition nécessaire et suffisante pour que K admette une unité de Minkowski.

Si toutes les classes ambiguës ne contiennent aucun idéal ambiguë, on aurait $S_{K,fr}^{(\sigma)}$ trivial, d'où $\#S_K^{(\sigma)} = \mathbf{b}$ [lemme 2.4] et donc $\mathbf{b} = 3$ et par suite $\mathbf{a} = 1$ c'est à dire le type (δ) . \square

Exemple 2.7. On prend $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ où $d = 4uw^3 - 27u^2$ avec u et w sont premiers entre eux, et $P(x) = x^3 - uwx - u^2$ irréductible, de plus u et w remplissent l'une des conditions suivantes :

- $3 \nmid w$.
- $3 \mid w \quad uw \not\equiv 3 \pmod{9} \quad u = w \pm 1 \pmod{9}$.
- $3 \mid w \quad uw \equiv 3 \pmod{9} \quad u \equiv w \pm 1 \pmod{27}$.

Soient θ une racine de P , $L = \mathbf{Q}(\theta)$, u et w sont choisis de manière à avoir le discriminant de L égal à d . On a $\text{ran}S_L = \text{ran}S_k - 1$, dans notre cas on a toujours S_L est cyclique. D'après [4], le corps de décomposition de P définit une extension cubique cyclique non ramifiée de k , qu'on notera K diédérale sur \mathbf{Q} (car $\text{disc}(P) = u^2d$ n'est pas un carré, et on a $h_K = ah_L^2$, où h désigne le 3-nombre de classes de F (voir [6]). En se basant sur tout cela et à l'aide du logiciel PARI nous donnons des exemples qui illustrent les deux types de structure qu'on notera par *alpha* et *delta*.

UNITÉS DES EXTENSIONS CUBIQUES DE CERTAINS SOUS-CORPS

$$u = 1$$

w	$4w^3 - 27 = d$	h_L	h_K	structure
38	219461	3	3^2	<i>alpha</i>
64	1048549	3	3^2	<i>alpha</i>
80	2047973	3	3^2	<i>alpha</i>
88	2725861	3	3^2	<i>alpha</i>
89	2819849	3	3^3	<i>delta</i>
98	3764741	3	3^3	<i>delta</i>
113	5771561	3	3^3	<i>delta</i>
121	7086217	3	3^2	<i>alpha</i>
122	7263365	9	3^4	<i>alpha</i>
146	12448517	9	3^4	<i>alpha</i>
151	13771777	3	3^3	<i>delta</i>
187	26156785	3	3^2	<i>alpha</i>
227	46788305	9	3^4	<i>alpha</i>
229	48035929	3	3^3	<i>delta</i>
244	58107109	3	3^2	<i>alpha</i>
248	61011941	3	3^2	<i>alpha</i>
265	74438473	3	3^3	<i>delta</i>
295	102689473	3	3^2	<i>alpha</i>
302	110174405	3	3^3	<i>delta</i>
305	113490473	3	3^2	<i>alpha</i>
310	119163973	3	3^3	<i>delta</i>
314	123836549	9	3^5	<i>delta</i>
322	133544965	3	3^2	<i>alpha</i>
331	145058737	3	3^2	<i>alpha</i>
340	157215973	9	3^5	<i>delta</i>
343	161414401	3	3^3	<i>delta</i>
368	199344101	3	3^2	<i>alpha</i>
380	219487973	3	3^2	<i>alpha</i>

$$u \neq 1$$

u	w	$d = 4uw^3 - 27u^2$	h_L	h_K	structure
3	74	4862445	3	3^2	<i>alpha</i>
3	143	35090241	3	3^3	<i>delta</i>
5	76	8778845	3	3^3	<i>delta</i>
5	116	31217245	3	3^2	<i>alpha</i>
5	131	44961145	3	3^3	<i>delta</i>
5	191	139356745	3	3^2	<i>alpha</i>
7	32	916181	3	3^2	<i>alpha</i>
7	82	15436981	3	3^2	<i>alpha</i>
7	86	17808245	9	3^4	<i>alpha</i>
7	122	50842421	3	3^3	<i>delta</i>
7	188	186049493	3	3^2	<i>alpha</i>
11	38	2411101	3	3^2	<i>alpha</i>
11	103	48076721	9	3^5	<i>delta</i>
11	133	103512761	3	3^2	<i>alpha</i>
11	134	105865309	3	3^2	<i>alpha</i>
11	172	223888445	3	3^2	<i>alpha</i>
13	22	549133	3	3^2	<i>alpha</i>
13	25	807937	3	3^2	<i>alpha</i>
13	44	4425005	3	3^2	<i>alpha</i>
13	58	10141261	3	3^3	<i>delta</i>
15	49	7052865	3	3^2	<i>alpha</i>

Remarque 2.8. Chaque corps de décomposition des pôlynomes suivants admet une unité de Minkowski

- 1) $P(x) = x^3 - 89x - 1$; 2) $P(x) = x^3 - 98x - 1$;
- 3) $P(x) = x^3 - 113x - 1$; 4) $P(x) = x^3 - 256x - 1$;
- 5) $P(x) = x^3 - 340x - 1$; 6) $P(x) = x^3 - 343x - 1$;

3. Cas du corps biquadratique $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$

Dans ce cas, k désigne une extension quadratique du corps $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, on suppose toujours que le 3-groupe de classes $S_k \simeq (3, 3)$. On singale que les lemmes 2.4 et 2.5 restent valables dans ce cas, et on démontre un lemme qui généralise le lemme 2.3 dans le cas où F est un corps le nombres ayant

nombre de classes premier à 3, qui est la base de notre étude dans cette section.

Lemme 3.1. *Soit F un corps de nombres, dont le nombre de classes est premier à 3, et soit k une extension quadratique de F . Si K est une extension cyclique non ramifiée de degré 3 sur k , alors K/F est galoisienne et diédrale de degré 6, et on a :*

$$[U_K : U_L U_L^\sigma U_k][U_k : N_{K/k} U_k] = \frac{[U_k : U_k^3][U_F : N_{L/F} U_L]}{[U_F : U_F^3]}$$

où L est l'une des extensions cubiques non galoisiennes de F .

Démonstration. D'après [7] K/F est une extension galoisienne et diédrale. Posons $\text{Gal}(K/F) \simeq D_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ tel que $\sigma^3 = \tau^2 = 1$, $\sigma\tau = \tau\sigma^2$
 $L = \text{inv}(\langle \tau \rangle)$. On a $[U_k : U_k^3] = [U_k : N_{K/k} U_k][N_{K/k} U_k : U_k^3]$, donc :

$$\begin{aligned} [U_k : N_{K/k} U_k] &= \frac{[U_k : U_k^3]}{[N_{K/k} U_k : U_k^3]} & (3.1) \\ &= \frac{[U_k : U_k^3]}{[N_{K/k} U_k : U_k^3 N_{L/F} U_L][U_k^3 N_{L/F} U_L : U_k^3]} . \end{aligned}$$

D'autre part, on montre que $N_{K/k}(U_L U_L^\sigma U_k) = U_k^3 N_{L/F} U_L$. En effet, soient $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ un système fondamental d'unités de U_L , et $\varepsilon \in U_L U_L^\sigma$, alors si $\varepsilon = e_i e_i^\sigma$ ($1 \leq i \leq r$) on déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} &= (e_i e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} (e_i^\sigma)^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} (e_i)^{1+\sigma+\sigma^2} \\ &\implies \varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i^2)^{1+\sigma+\sigma^2} . \end{aligned}$$

Comme $L = \text{inv}(\langle \tau \rangle)$ on déduit que

$$\begin{aligned} N_{K/k}(\varepsilon) &= (e_i^{1+\tau})^{1+\sigma+\sigma^2} = e_i^{1+\sigma+\sigma^2+\tau+\tau\sigma+\tau\sigma^2} = N_{K/F}(e_i) \\ &= N_{L/F} \circ N_{K/L}(e_i) \implies N_{K/k}(\varepsilon) = N_{L/F}(e_i^2) \in N_{L/F} U_L . \end{aligned}$$

Si $\varepsilon = e_i e_j$ ($i \neq j$) on a $\varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2} = (e_i e_j)^{1+\sigma+\sigma^2}$, or $e_i e_j \in U_L$ et donc $(e_i e_j)^{1+\tau} = (e_i e_j)^2$ entraîne que $(N_{K/k}(\varepsilon))^2 = (e_j e_i)^{1+\tau}$, on raisonne comme le cas précédent et on obtient $(N_{K/k}(\varepsilon))^2 = N_{L/F}((e_j e_i)^2) \in N_{L/F} U_L$, or $U_F/N_{L/F} U_L$ est un 3-groupe, alors $N_{K/k}(\varepsilon) \in N_{L/F} U_L$,

(même raisonnement pour le cas $\varepsilon = e_i^\sigma e_i^\sigma$). On a aussi $N_{K/k}(U_k) = U_k^3$, donc $N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k) = U_k^3 N_{L/F} U_L$. De (3.1) on tire :

$$[U_k : N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k : U_k^3]}{[N_{K/k} U_K : N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)][U_k^3 N_{L/F} U_L : U_k^3]}$$

et comme dans le lemme 2.3 on a

$$[N_{K/k} U_K : N_{K/k}(U_L U_{L^\sigma} U_k)] = [U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k],$$

alors :

$$[U_k : N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k : U_k^3]}{[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k][U_k^3 N_{L/F} U_L : U_k^3]}.$$

D'autre part,

$$[U_k^3 N_{L/F} U_L : U_k^3] = [N_{L/F} U_L : N_{L/F} U_L \cap U_k^3] = [N_{L/F} U_L : U_F^3]$$

et aussi $[U_F : U_F^3] = [U_F : N_{L/F} U_L][N_{L/F} U_L : U_F^3]$ implique que

$$[U_k^3 N_{L/F} U_L : U_k^3] = \frac{[U_F : U_F^3]}{[U_F : N_{L/F} U_L]}.$$

Finalement on a : $[U_k : N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k : U_k^3][U_F : N_{L/F} U_L]}{[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k][U_F : U_F^3]}$ et

$$[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K : N_{K/k} U_K] = \frac{[U_k : U_k^3][U_F : N_{L/F} U_L]}{[U_F : U_F^3]}.$$

□

Proposition 3.2. $[U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k][U_K : N_{K/k} U_K] = 3$ si et seulement si ζ_3 est norme d'une unité de L (la norme de l'extension L/F).

Remarque 3.3. Lorsque ζ_3 est norme d'une unité de L , où ζ_3 est racine 3^{ème} de l'unité, les cas possibles sont :

$$(\tilde{\alpha}) \quad [U_K : N_{K/k} U_K] = 3; \quad [U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = 1.$$

$$(\tilde{\delta}) \quad [U_K : N_{K/k} U_K] = 1; \quad [U_K : U_L U_{L^\sigma} U_k] = 3.$$

Ce qui caractérise deux types de structures possibles comme dans le premier cas.

Preuve de la proposition. Calculons les indices $[U_F : U_F^3]$ et $[U_k : U_k^3]$, on a $U_F = \{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\} = \{\pm 1, \pm \zeta_3, \zeta_3^2\}$, donc il est clair que $U_F^3 = \{\pm 1\}$ et $[U_F : U_F^3] = 3$. D'autre part, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{d})$ $d \neq 1$ et 3 d'après [1], si

$\varepsilon_0 = s + t\sqrt{d}$ est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, déterminer un système fondamental d'unités de k revient à savoir quand est ce que $3\varepsilon_0$ est un carré dans \mathbf{N} . Plus précisément :

- i) Si ε_0 est de norme -1 , $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k .
- ii) Si ε_0 est de norme 1 , alors $\{\sqrt{-\varepsilon_0}\}$ est un système fondamental d'unités de k si et seulement si $6(s \pm 1)$ est un carré dans \mathbf{N} , et $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k sinon.

Donc si $N(\varepsilon_0) = 1$ ou $N(\varepsilon_0) = -1$ et $6(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans \mathbf{N} , $\{\varepsilon_0\}$ est un système fondamental d'unités de k , soit $\varepsilon \in U_k$ alors $\varepsilon = \zeta(\varepsilon_0)^n$ où $\zeta \in U_F$, d'où $\varepsilon^3 = \zeta^3(\varepsilon_0^3)^n = \pm(\varepsilon_0^3)^n \implies U_k/U_k^3 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et on a $[U_k : U_k^3] = 9$. Si $N(\varepsilon_0) = -1$ et $6(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans \mathbf{N} . Soit $\varepsilon \in U_k$ alors $\varepsilon = \zeta(\sqrt{-\varepsilon_0})^n$ où $\zeta \in U_F$ d'où $\varepsilon = \zeta(\varepsilon_0)^n = \pm((\sqrt{-\varepsilon_0})^3)^n \implies [U_k : U_k^3] = 9$, donc d'après le lemme 3.1 on a $[U_K : U_L U_L^\sigma U_k][U_K : N_{K/k} U_K] = 3[U_F : N_{L/F} U_L]$, d'où si ζ_3 est norme d'une unité de L on déduit facilement que $[U_F : N_{L/F} U_L] = 1$, sinon $[U_F : N_{L/F} U_L] = 3$ donc $[U_K : U_L U_L^\sigma U_k][U_K : N_{K/k} U_K] = 3 \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in U_L$ tel que $N_{L/F}(\varepsilon) = \zeta_3$. \square

Corollaire 3.4. *Les cas possibles des deux indices $[U_K : N_{K/k} U_K]$ et $[U_K : U_L U_L^\sigma U_k]$ sont :*

- $(\tilde{\alpha})$ $[U_K : N_{K/k} U_K] = 3; [U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 1$
- $(\tilde{\beta})$ $[U_K : N_{K/k} U_K] = 3; [U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 3$
- $(\tilde{\delta})$ $[U_K : N_{K/k} U_K] = 1; [U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 3$
- $(\tilde{\varepsilon})$ $[U_K : N_{K/k} U_K] = 1; [U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 9$

ce qui caractérise complètement la structure du groupe des unités de K .

Démonstration. Les conditions du lemme 2.4 et du lemme 2.5 sont remplies, d'autre part, d'après la formule des classes ambiguës on a le nombre des classes ambiguës est 3 d'où les valeurs possibles de $[U_K : N_{K/k} U_K]$ sont 1 et 3 et comme $[U_K : N_{K/k} U_K][U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 3^m$ avec $m = 1$ ou $m = 2$, alors les cas possibles sont $(\tilde{\alpha}), (\tilde{\beta}), (\tilde{\delta})$ et $(\tilde{\varepsilon})$. \square

Exemple 3.5. Si $d = (4(3m)^3 + 1)$ $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3})$, $F_1 = \mathbf{Q}(\theta)$ où θ est une racine de $P(x) = X^3 - 9mX^2 - 1$, $L = F_1(\sqrt{-3})$ et $K = L.k$, et on a d'après [5] $h_K = ah_L^2 = 3$. D'autre part, d'après [7] la tour de Hilbert dans ce cas s'arrête au premier étage donc $h_L = 0$ et par suite $\text{rang}_3(L) = 0$, ce qui entraîne que ζ_3 n'est pas norme d'une unité

de L voir [5], et aussi $[U_K : U_L U_L^\sigma U_k] = 3$, et donc $[U_k : N_{K/k} U_K] = 3$ c'est à dire le type (β) .

Références

- [1] A. AZIZI – « Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur \mathbf{Q} . », *Ann.Sci.Math. Quebec* **23** (1999), p. 71–92.
- [2] F. GERTH, III – « Ranks of 3-class groups of non-Galois cubic fields », *Acta Arith.* **30** (1976), no. 4, p. 307–322.
- [3] G. JANUZZI – *Algebraic number fields*, Academic press newyork, baton rouge, louisiana, 1992.
- [4] Y. KISHI et K. MIYAKE – « Parametrization of the quadratic fields whose class numbers are divisible by three », *J. Number Theory* **80** (2000), no. 2, p. 209–217.
- [5] F. LEMMERMEYER – « Class groups of dihedral extensions », *Math. Nachr.* **278** (2005), p. 679–691.
- [6] N. MOSER – « Unités et nombre de classes d'une extension diédrale de \mathbf{Q} », *Société mathématique de France. Astérisque* (1975), p. 24–25.
- [7] E. YOSHIBA – « On the 3–class field tower of some biquadratic fields », *Acta Arithmetica* **107.4** (2003), p. 327–336.

ABDELMALEK AZIZI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
abdelmalekazizi@yahoo.fr

MOHAMED AYADI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
Ayadi@univ.ac.ma

MOULAY CHRIF ISMAILI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
mcismaili@yahoo.fr

MOHAMED TALBI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohamed 1
Oujda
MAROC
ksirat1971@yahoo.fr