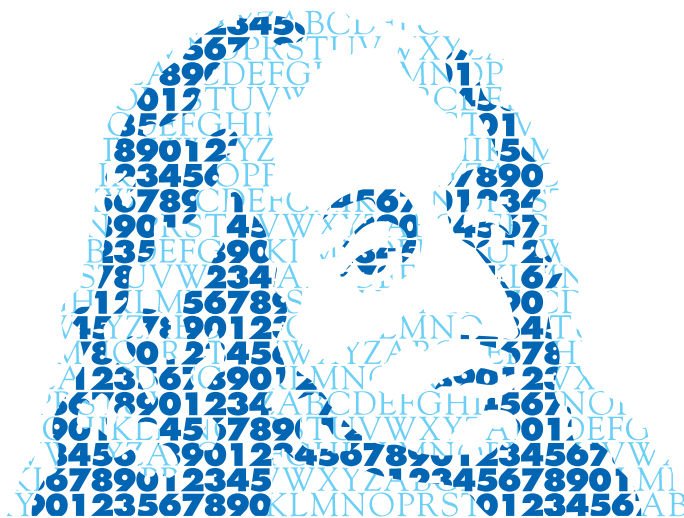


ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

DJAMEL TENIOU

Sur l'écoulement d'un fluide dans un canal avec obstacle au fond

Volume 14, n° 2 (2007), p. 255-265.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2007__14_2_255_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Sur l'écoulement d'un fluide dans un canal avec obstacle au fond

DJAMEL TENIOU

Résumé

Nous considérons dans ce travail l'écoulement d'un fluide dans un canal plat avec un obstacle au fond. Cet obstacle génère une surface libre qui n'est plus horizontale, comme c'est le cas sans obstacle. Nous montrons que, dans le cas sur critique, si l'obstacle n'est pas trop élevé, il y a une solution et une seule. Nous donnons des indications pour le cas sous critique et pour le problème numérique.

1. Introduction

L'étude de la propagation d'une onde de surface pour l'écoulement d'un fluide dans un canal plat avec un obstacle au fond a été menée par différents auteurs et de différentes manières. La littérature dans ce domaine est abondante. Mentionnons en particulier, Forbes [3], King and Bloor [5], Bouhadef [1], Boukari [4] et la bibliographie indiquée dans ces papiers.

Dans cet article, nous considérons l'écoulement d'un fluide dans un canal où nous supposons que le mouvement est bidimensionnel, uniforme et irrotationnel, que le fluide est incompressible et non visqueux et qu'il se déplace dans une direction, c'est-à-dire qu'il y a un amont et un aval. Nous considérons le problème non linéaire avec les deux situations ; le cas super critique (appelé également écoulement torrentiel) correspond au nombre de Froude $F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ supérieur à un. Dans cette situation, l'expérience nous permet de supposer que la profondeur à l'infini amont est la même qu'à l'infini aval. On note H la hauteur du canal à l'infini amont, $(U, 0)$ la vitesse uniforme du fluide à l'infini amont, et g l'accélération due à la gravité. Une méthode basée sur des espaces avec poids est proposée, cette méthode exploite les propriétés de cet écoulement, en particulier, le comportement à l'infini et l'ellipticité d'un certain problème. Elle est également basée sur le théorème des fonctions implicites. Le cas sous critique ($F < 1$) est plus compliqué car non seulement l'amplitude de l'onde en $+\infty$ ne tend pas

vers zéro, mais de plus, le problème mathématique n'est pas elliptique. Dans le traitement numérique, la situation se présente naturellement de la même manière. Le cas super critique est plus simple que le cas sous critique.

Remarque 1.1. Le nombre de Froude F représente également le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Suivant que l'énergie cinétique est plus grande ou plus petite que l'énergie potentielle, la situation est totalement différente.

Le plan de cet article est le suivant : dans la section 2, nous donnons les équations du modèle, la section 3 est dévolue au cas super critique. Cette partie a été faite en collaboration avec R. Ait-Yahia-Djouadi et D. Hernane-Boukari [2] tandis que la section 4 est réservée au cas sous critique. Enfin dans la section 5, nous évoquerons brièvement le traitement numérique. Nous présentons deux méthodes, l'une proposée par R. Ait-Yahia-Djouadi en collaboration avec M. Amara, et l'autre proposée par D. Hernane-Boukari en collaboration avec moi-même.

2. Présentation du problème

On note

$$\Omega_f^\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq f(x) < y < H + \gamma(t, x)\}$$

où $f(x)$ est une fonction régulière, et dans la pratique à support compact, qui délimite le domaine en bas et définit l'obstacle, et $H + \gamma(t, x)$ délimite le domaine en haut ; $\gamma(t, x)$ étant une inconnue du problème. La courbe $H + \gamma(t, x)$ est la surface libre.

On note Ψ la fonction courant $((u, v) = \nabla \wedge \Psi)$ qui est harmonique car le fluide est incompressible ; u et v étant les composantes horizontale et verticale de la vitesse :

$$\Delta \Psi = 0.$$

On suppose la vitesse horizontale à l'infini amont connue, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (u, v) = (U, 0)$. Par contre à l'infini aval, pour le moment, on se contente d'imposer que la vitesse et la côte sont bornées.

On suppose que la ligne de fond est une ligne de courant, ce qui implique que Ψ y est constante. Il en est de même de la surface libre. On fixe la constante du fond égale à zéro. Nous pouvons exprimer cela en termes de

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE AU DESSUS D'UN OBSTACLE

Ψ , en écrivant

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = Uy, \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(t, x) = 0).$$

Ceci donne immédiatement que $\Psi = UH$ sur la surface libre. En résumé on a :

$$\begin{cases} \Delta \Psi = 0 & \text{dans } \Omega_f^\gamma, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = Uy, \\ \Psi(x, f(x)) = 0, \\ \Psi(x, H + \gamma(t, x)) = UH, \end{cases}$$

conditions auxquelles on ajoute que la vitesse et la côte de la surface libre sont bornées.

Le fait que la surface libre soit inconnue implique la nécessité d'avoir une autre équation. Cette équation est donnée par la relation dynamique qui suppose qu'il n'y a pas de viscosité. Cela donne l'équation d'Euler pour $\mathbf{u} = (u, v)$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(p + gy).$$

On suppose la pression p constante sur la surface libre (égale à zéro). Si l'on travaille en régime stationnaire, cette relation devient sur la surface libre :

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \rho gy \right) = 0,$$

soit

$$\left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \rho gy \right) = \text{constante}.$$

Cette équation, appelée également équation de Bernoulli, s'écrit en fonction courant :

$$\left(\frac{1}{2} |\nabla \Psi|^2 - \rho gy \right) = \text{constante},$$

avec $\gamma(t, x) = \gamma(x)$. En adimensionnant avec des grandeurs caractéristiques : $x^* = \frac{x}{H}$, $y^* = \frac{y}{H}$, $\Psi^*(x^*, y^*) = \frac{\Psi(x, y)}{UH}$ et en posant $F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ (F est le nombre de Froude) on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \Psi^* = 0 & \text{dans } \Omega_{f^*}^{\gamma^*}, \\ \lim_{x^* \rightarrow -\infty} \Psi^*(x^*, y^*) = y^*, \\ \Psi^*(x^*, f(x^*)) = 0, \\ \Psi^*(x^*, 1 + \gamma(x^*)) = 1, \end{cases}$$

plus la condition de Bernoulli

$$\frac{F^2}{2} |\nabla \Psi|^2 + y = \text{constante},$$

où

$$\Omega_{f^*}^{\gamma^*} = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq f^*(x^*) < y^* < 1 + \gamma^*(x^*)\},$$

$$f^*(x^*) = \frac{1}{H} f(Hx^*), \quad \gamma^*(x^*) = \frac{1}{H} \gamma(Hx^*).$$

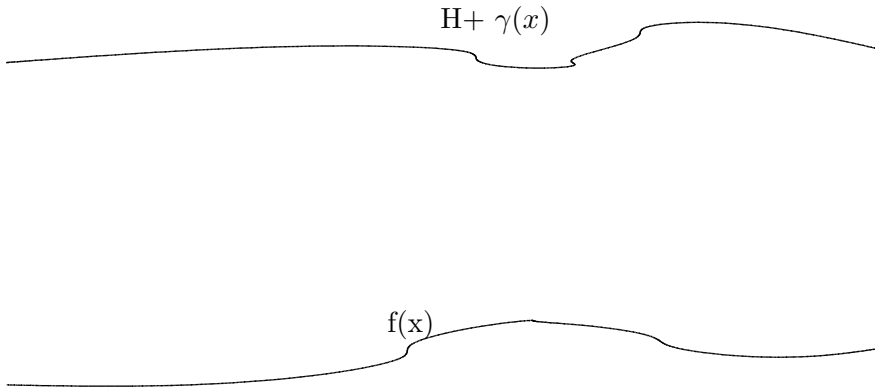
La condition à l'infini devient : $\lim_{x^* \rightarrow -\infty} \mathbf{u}^*(x^*, y^*) = (1, 0)$ où $\mathbf{u} = H\mathbf{u}^*$.

Remarque 2.1. La condition de Bernoulli à l'infini amont donne la constante égale à $1 + \frac{F^2}{2}$.

Dans la suite nous omettrons l'indice *.

3. Le cas super critique (problème continu)

Le comportement est différent suivant que F est supérieur ou inférieur à 1. Le cas F supérieur à un est ce qu'on appelle le cas super critique et il est plus simple à étudier. L'expérience montre qu'alors à l'infini aval, la surface libre se comporte comme à l'infini amont et on peut donc poser $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = y$, $(\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = 0)$.



Écoulement d'un fluide au dessus d'un obstacle

Remarque 3.1. Pour $f = 0$, nous avons une solution triviale qui est $\Psi = y$. Nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites pour montrer que pour f petit, nous avons encore une solution.

On pose donc $\Psi = y + \psi$ et ψ satisfait à :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega_f^\gamma, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x, y) = 0, \\ \psi = -f \text{ au fond,} \\ \psi = -\gamma(x) \text{ en haut (sur la surface libre),} \end{cases} \quad (3.1)$$

plus la condition de Bernoulli qui devient :

$$\frac{F^2}{2} [|\nabla\psi|^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}] = -\gamma (= \psi).$$

Remarquons que la condition de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma(x) = -\frac{F^2}{2} [|\nabla\psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1 + \gamma(x))] \equiv T(f, \gamma).$$

Le problème peut alors être reformulé comme suit : étant donné une fonction $y = f(x)$ qui représente l'obstacle, trouver une fonction $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (surface libre) telle que $T_1(f, \gamma) \equiv \gamma - T(f, \gamma) = 0$.

Pour $f = 0$ et $\gamma = 0$, $\psi = 0$ est solution du problème aux limites et ainsi $T_1(0, 0) = 0$. Pour résoudre $T_1(f, \gamma) = 0$, on utilise le théorème des fonctions implicites dans un voisinage de $(0, 0)$. Pour résoudre ce problème, il est préférable de revenir à un ouvert fixe.

Par le changement de la variable $\tilde{x} = x$ et $\tilde{y} = \frac{y-f(x)}{1+\gamma(x)-f(x)}$, l'ouvert Ω_γ^f se transforme en l'ouvert fixe

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < 1\}.$$

En posant $\psi(x, y) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{\psi}$ vérifie :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\psi} + P(f, \gamma)\tilde{\psi} = 0 \text{ dans } Q, \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -f \text{ en bas,} \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}) \text{ en haut,} \end{cases}$$

où le Laplacien est pris dans les nouvelles coordonnées et où P est un opérateur différentiel, obtenu par le changement de variable, à coefficients réguliers et dépendant de f et de γ , avec $P(0, 0) = 0$.

L'espace dans lequel est cherché γ est $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ où

$$B_\lambda^{(m,\alpha)}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\mathbb{R}); \sup_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{\lambda|x|} |D_x^k v(x)| < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\lambda,\alpha} = \sum_{k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{\lambda|x|} |D_x^k v| + \sup_{(x,x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x'} \frac{|D_x^m v(x) - D_x^m v(x')|}{|x - x'|^\alpha},$$

et l'espace où est cherchée $\tilde{\psi}$ est $B_\lambda^{(m,\alpha)}(Q)$ où

$$B_\lambda^{(m,\alpha)}(Q) = \{v \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(Q); \sup_{0 \leq k+l \leq m} \sup_{(x,y) \in \bar{Q}} e^{\lambda|x|} |D_x^k D_y^l v(x,y)| < +\infty\}$$

muni de la norme adéquate, avec $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

Théorème 3.2. *On suppose $F > 1$. Il existe λ_0 telle que pour tout α , $0 < \alpha < 1$ et pour tout λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, il existe un voisinage \mathcal{V} de zéro dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{V}$, le problème (3.1) a une unique solution ψ telle que $\tilde{\psi}$ appartienne à $B_\lambda^{(2,\alpha)}(Q)$, et il existe une application g de \mathcal{V} dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma = g(f)$.*

Ce théorème est équivalent à :

Théorème 3.3. *Soit $F > 1$. Il existe $\lambda_0 > 0$ et une boule \mathcal{B} de rayon r_0 , centrée à l'origine de $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R}) \times B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ où $\lambda \in]0, \lambda_0[$ et $0 < \alpha < 1$, il existe un voisinage \mathcal{V}_0 de zéro, dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$, et une application $g : \mathcal{V}_0 \rightarrow B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $(f, \gamma) \in \mathcal{B}$,*

$$\{T_1(f, \gamma) = 0\} \Leftrightarrow \{f \in \mathcal{V}_0, \text{ et } \gamma = g(f)\}.$$

Démonstration. Nous donnons ici l'idée de la démonstration du théorème. Rappelons d'abord que $T_1(f, \gamma) = \frac{F^2}{2} [|\nabla \psi|^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial y}] + \gamma$, ψ étant la solution dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(Q)$ du problème

$$\begin{cases} \Delta \psi + P(f, \gamma) \psi = 0 & \text{dans } \Omega_f^\gamma, \\ \psi = -f & \text{au fond,} \\ \psi = -\gamma(x) & \text{en haut (sur la surface libre).} \end{cases}$$

On considère T_1 en tant qu'opérateur de l'espace $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R}) \times B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ dans l'espace $B_\lambda^{(1,\alpha)}(\mathbb{R})$. Comme indiqué précédemment, on va utiliser le théorème des fonctions implicites. Pour voir la différentiabilité de T_1 , on

le décompose en deux : l'application qui à (f, γ) associe la solution du problème de Dirichlet, puis l'application trace. La différentiabilité de la deuxième application est évidente et la différentiabilité du premier opérateur provient des résultats classiques sur la dépendance de la solution du problème de Dirichlet par rapport aux données (en utilisant par exemple le noyau de Green pour le Laplacien, et P petit pour (f, γ) petit).

Étudions maintenant l'inversibilité de $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)$. Si l'on se donne k dans $B_\lambda^{(1,\alpha)}(\mathbb{R})$ alors, trouver h dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$, tel que $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)h = k$, revient à trouver $w_h \in B_\lambda^{(2,\alpha)}(Q)$, solution du problème

$$\begin{cases} \Delta w_h = 0 & \text{dans } Q, \\ w_h(x, 0) = 0 & \text{au fond,} \\ w_h(x, 1) = -h(x) & \text{en haut,} \end{cases}$$

auquel cas

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)h = h + F^2 \frac{\partial w_h}{\partial y},$$

et comme $w = -h$ en haut, cela revient à chercher w tel que

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } Q, \\ w(x, 0) = 0 & \text{au fond,} \\ -w(x, 1) + F^2 \frac{\partial w}{\partial y} = k & \text{en haut,} \end{cases} \quad (3.2)$$

et à poser $h(x) = -w(x, 1)$. Or pour $F > 1$, ce dernier problème est coercif sur H^1 et en calculant le noyau de cet opérateur, on constate qu'on est dans les espaces voulus. Le théorème des fonctions implicites permet donc d'assurer l'existence d'une fonction $\gamma = \gamma(f)$, au voisinage de zéro, tel que $T(f, \gamma) = 0$ équivaut à $\gamma = \gamma(f)$. \square

4. Le cas sous critique

Dans cette partie, les calculs n'ont pas été faits jusqu'au bout. Cependant ceci est juste technique et ne présente certainement pas de difficultés théoriques.

L'expérience physique montre que dans le cas où l'énergie potentielle est plus grande que l'énergie cinétique, le comportement en $+\infty$ de la surface libre est oscillatoire et donc les lignes de courant ne tendent pas vers l'horizontale ; ainsi, les espaces que l'on a considéré dans le cas super critique ne conviennent pas. Reprenons dans le cas sous critique le problème

(3.2) :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ dans } Q, \\ w(x, 0) = 0 \text{ au fond,} \\ -w(x, 1) + F^2 \frac{\partial w}{\partial y} = k \text{ en haut.} \end{cases}$$

Si nous essayons de résoudre par des calculs formels et en utilisant la transformation de Fourier, nous aboutissons à une relation de la forme

$$(F^2(\xi \coth \xi) - 1)\hat{w}(\xi, y) = R(\xi, y)$$

où $R(\xi, y)$ dépend des données, avec $A \equiv \hat{w}$ comme inconnue. Pour $F < 1$, il existe $\xi_0 \neq 0$, telle que la fonction $(F^2(\xi \coth \xi) - 1)$ s'annule à l'ordre un en $\pm \xi_0$. Ainsi

$$A(\xi, y) = \alpha(y)\delta_{x_{i_0}} + \beta(y)\delta_{-\xi_0} + \frac{R(\xi, y)}{F^2(\xi \coth \xi) - 1},$$

α et β a priori arbitraires ; mais $\frac{R(\xi, y)}{(F^2(\xi \coth \xi) - 1)}$ admet des pôles en $\pm \xi_0$, donc si nous faisons la transformée de Fourier inverse, nous obtenons

$$w(x, y) = \alpha e^{ix\xi_0} + \beta e^{-ix\xi_0} + C_1 H(x) e^{ix\xi_0} + C_2 H(x) e^{-ix\xi_0} + g(x, y),$$

avec C_1 et C_2 déterminées de manière unique, H étant la fonction de Heaviside et g une fonction "régulière" déterminée de manière unique. En choisissant $\alpha = -C_1$ et $\beta = -C_2$, nous obtenons une fonction "régulière"

$$w(x, y) = H(x)[Ae^{ix\xi_0} + Be^{-ix\xi_0}] + w_1(x, y).$$

Nous allons nous inspirer des résultats de ce calcul formel pour déterminer les espaces sur lesquels nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites. Soit ρ une fonction définie sur \mathbb{R} nulle au voisinage de zéro et égale à un pour $|x|$ grand. On introduit l'espace

$$D_\lambda^{(2, \alpha)}(Q) = \{w \in \mathcal{C}^{2, \alpha}(Q), \text{ il existe deux fonctions } A \text{ et } B \text{ tel que}$$

$$\rho(x)(w - H(x)(A \cos(ix\xi_0) - B \sin(ix\xi_0))) \in B_\lambda^{(2, \alpha)}(Q)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|w\| = \|w\|_{\mathcal{C}^{2, \alpha}(Q)} + \|\rho(x)(w - H(x)(A \cos(ix\xi_0) - B \sin(ix\xi_0)))\|_{B_\lambda^{(2, \alpha)}(Q)}.$$

Il est facile de voir que muni de cette norme, $D_\lambda^{(2, \alpha)}(Q)$ est un espace de Banach. Il faut naturellement changer également l'espace d'arrivée et considérer l'espace $D_\lambda^{(2, \alpha)}(\mathbb{R})$, défini de la même manière que $D_\lambda^{(2, \alpha)}(Q)$,

avec la norme adéquate. L'application T_1 va donc opérer de $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R}) \times D_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ dans $D_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité dans le cas sous critique.

Théorème 4.1. *Soit $F < 1$. Il existe $\lambda_0 > 0$ et une boule \mathcal{B} de rayon r_0 , centrée à l'origine de $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R}) \times D_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ où $\lambda \in]0, \lambda_0[$ et $0 < \alpha < 1$, il existe un voisinage \mathcal{V}_0 de zéro, dans $B_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$, et une application $g : \mathcal{V}_0 \rightarrow D_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que, pour tout $(f, \gamma) \in \mathcal{B}$,*

$$\{T_1(f, \gamma) = 0\} \Leftrightarrow \{f \in \mathcal{V}_0 \text{ et } \gamma = g(f)\}.$$

La différentiabilité de T_1 (dans ces nouveaux espaces) ne pose aucun problème. L'inversibilité de $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)$, rappelons-le, revient à résoudre le problème (3.2) :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } Q, \\ w(x, 0) = 0 & \text{au fond,} \\ -w(x, 1) + F^2 \frac{\partial w}{\partial y} = k & \text{en haut.} \end{cases}$$

Nous avons remarqué que ce problème n'est pas coercif sur H^1 ; cependant, nous pouvons voir qu'il l'est sur un sous espace fermé, lié à $D_\lambda^{(2,\alpha)}(\mathbb{R})$, ce qui permettra par la suite de remonter, de montrer l'inversibilité de $\frac{\partial T_1}{\partial \gamma}(0, 0)$ et d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

5. L'approximation numérique

Du point de vue des difficultés, la situation est la même que dans le cas continu. Le cas sous critique est nettement plus difficile que le cas super critique.

Le calcul numérique amène à travailler dans une bande de largeur finie et on doit donc imposer des conditions aux limites artificielles sur les bords latéraux. Il est facile dans les deux cas d'imposer une condition sur le bord latéral amont. Le bord latéral aval ne pose pas de problème sérieux dans le cas super critique, car on peut supposer que le fluide tend vers l'écoulement horizontal et donc imposer une condition de Neumann nulle sur le bord latéral amont. Par contre, dans le cas sous critique les oscillations interdisent cette condition.

Deux approches différentes sont actuellement étudiées, l'une dont les schémas numériques sont écrits et testés par R. Ait-Yahia-Djouadi, en collaboration avec M. Amara. Avec cette approche R. Ait-Yahia-Djouadi essaie d'écrire un schéma d'éléments finis pour le problème aux limites en décomposant le domaine par front, en commençant par l'amont, en avançant pas à pas, et en essayant de situer la frontière libre au mieux et de proche en proche. Cette méthode, a l'avantage de traiter en même temps les deux situations à savoir, le cas super critique et le cas sous critique. Malheureusement, des problèmes d'instabilité apparaissent, problèmes qui ne sont pas encore totalement maîtrisés.

La deuxième approche consiste à minimiser une fonctionnelle de domaine. Elle consiste à regarder l'énergie (notée $E(\Omega)$) suivante :

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy + \int_{\Omega} y dx dy,$$

et de faire une dérivation par rapport au domaine. Un schéma itératif, permet de traiter le cas non linéaire. Malheureusement, les conditions imposés aux domaines admissibles font que ces schémas ne fonctionnent que dans le cas super critique. Signalons que dans cette dernière situation, les schémas numériques fonctionnent très bien. Cette méthode a été élaborée en collaboration avec D. Hernane-Boukari.

Références

- [1] M. BOUHAFED – « Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. application à l'écoulement au dessus d'un obstacle immergé », Thèse, Université de Poitiers, U.E.R. Centre d'études aérodynamiques et thermiques, 1988.
- [2] D. BOUKARI, R. DJOUADI & D. TENIOU – « Free surface flow over an obstacle. Theoretical study of the torrential case », *Abstract and Applied Analysis* **6(7)** (2001), p. 413–429.
- [3] L. K. FORBES & L. W. SCHWARTZ – « Free surface flow over an obstruction », *J. Fluid Mech.* **114** (1982), p. 299–314.
- [4] D. HERNANE-BOUKARI – « Thèse de doctorat es-sciences, Option Mathématiques », Thèse, Faculté de Mathématiques, USTHB, Alger, 2005.
- [5] A. C. KING & I. G. BLOOR – « Free streamline flow curved topography », *Quart. Appl. Math.* **48(2)** (1990), p. 281–293.

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE AU DESSUS D'UN OBSTACLE

DJAMEL TENIOU
Faculté de Mathématiques
Laboratoire AMNEDP
USTHB, BP 32
16110 Alger
Algérie
dteniou@usthb.dz