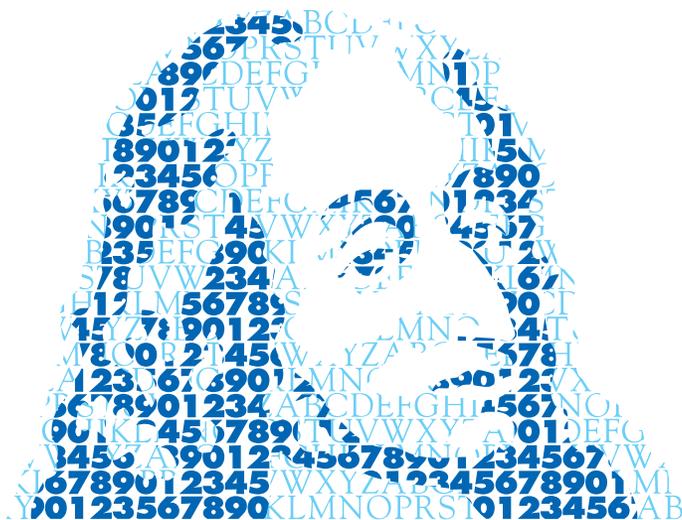


ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

YOUCEF AMIRAT ET KAMEL HAMDACHE

Sur quelques problèmes d'homogénéisation non locale et de fluides en milieu poreux: une contribution de Abdelhamid Ziani

Volume 14, n° 2 (2007), p. 149-186.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2007__14_2_149_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Sur quelques problèmes d'homogénéisation non locale et de fluides en milieu poreux: une contribution de Abdelhamid Ziani

YOUCEF AMIRAT
KAMEL HAMDACHE

Résumé

Dans cet article nous présentons quelques problèmes et résultats d'homogénéisation non locale pour certaines équations de type dégénéré. Nous considérons des équations de transport, une équation des ondes dégénérée et une équation différentielle de Riccati, et nous décrivons dans chacun des cas les effets non locaux induits par homogénéisation. Nous donnons aussi quelques résultats sur l'analyse mathématique des équations des fluides miscibles en milieu poreux.

1. Introduction

Dans cet article nous présentons quelques problèmes et résultats d'homogénéisation non locale pour des équations de type dégénéré. Nous considérons des équations de transport, une équation de type hyperbolique-parabolique dégénéré, une équation différentielle de Riccati et une équation de transport semi-linéaire, et nous décrivons dans chacun des cas les effets non locaux induits par homogénéisation. Nous présentons ensuite quelques résultats sur l'analyse mathématique des équations des fluides miscibles en milieu poreux.

Homogénéisation non locale. Dans une série d'articles ([55]–[57]) M.I. Shvidler considère les équations des transferts de masse dans un milieu poreux hétérogène ayant une distribution aléatoire des perméabilités et des porosités. Il en déduit par une analyse des fluctuations des équations effectives dans lesquelles apparaissent des termes non locaux inexistant dans les équations originales. A titre d'exemple, considérons l'écoulement de deux fluides miscibles et incompressibles. Les équations décrivant l'écoulement, lorsqu'on néglige les effets de diffusion moléculaire et de dispersion,

s'écrivent

$$\phi \partial_t c + V \cdot \nabla c = 0, \quad V = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad \nabla \cdot V = 0, \quad (1.1)$$

où c est la concentration du mélange, $\phi(x)$ et $k(x)$ sont la porosité et la perméabilité, respectivement, μ est la viscosité (qui dépend de c), p est la pression et V est la vitesse de filtration obéissant à la loi de Darcy. M.I. Shvidler [56] a montré que la moyennisation de (1.1) (dans un sens probabiliste) conduit à une équation intégral-différentielle. En dimension 1 avec $\phi = \phi_0$ constant, l'équation moyennisée s'écrit, u désignant la moyenne de c ,

$$\phi_0 \partial_t u + W \partial_x u = \frac{1}{\phi_0} \int_0^t B(t, \tau) \partial_z^2 u(\tau, z) d\tau$$

où W représente la moyenne de V , $W = -(k^*/\mu) \partial_x \langle p \rangle$, (k^* et $\langle p \rangle$ représentant respectivement la perméabilité effective et la moyenne de p) $z = x - \phi_0^{-1} W(t - \tau)$ et $B(t, \tau)$ est une vitesse de corrélation. En prenant $B(t, \tau) = B_0 \exp(-|t - \tau|/\varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0 > 0$) M.I. Shvidler déduit l'équation des ondes des télégraphistes

$$\phi_0 \partial_t u + W \partial_x u + \varepsilon_0 \left(\phi_0 \partial_t^2 u + 2W \partial_{xt}^2 u + \frac{(W^2 - B_0)}{\phi_0} \partial_x^2 u \right) = 0.$$

Notons toutefois que ce résultat est obtenu de façon formelle et son interprétation physique est encore à préciser.

Des termes non locaux apparaissent également dans les équations effectives décrivant la dispersion de contaminants dans un fluide. Partant d'une équation de diffusion-convection décrivant l'évolution de la concentration d'un contaminant dans un écoulement longitudinal, R. Smith [58] déduit formellement, à l'aide d'un développement asymptotique adapté à la moyennisation sur la section de l'écoulement, une équation effective de la forme

$$\partial_t \bar{c} + \bar{u} \partial_x \bar{c} - \bar{k} \partial_x^2 \bar{c} - \int_0^\infty \partial_\tau D \partial_x^2 \bar{c} \left(x - \int_0^\tau \tilde{u}(\tau') d\tau', t - \tau \right) d\tau = \bar{q}(x, t)$$

où \bar{c} et \bar{u} représentent les moyennes sur une section de l'écoulement de la concentration et de la vitesse, respectivement, \tilde{u} est une vitesse de transport, \bar{k} et D sont des coefficients de diffusion et \bar{q} est le terme source.

Les équations avec des termes non locaux interviennent dans la modélisation de divers problèmes de la physique. Considérons le problème de

conduction (stationnaire)

$$-\nabla \cdot (A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = f(x) \quad (1.2)$$

dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , où ε est un petit paramètre lié à la microstructure du domaine Ω et la matrice de conductivité vérifie, p.p. en $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha^\varepsilon(x)|\xi|^2 \leq A^\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \leq \beta^\varepsilon(x)|\xi|^2.$$

Lorsque les fonctions α^ε et β^ε vérifient la condition

$$0 < \alpha \leq \alpha^\varepsilon(x) \leq \beta^\varepsilon(x) \leq \beta \quad (1.3)$$

p.p. dans Ω , où α et β sont deux constantes indépendantes de ε , la méthode de la H -convergence de F. Murat et L. Tartar [48] permet de déterminer l'équation effective associée à (1.2), qui est une équation de diffusion du même type. Cependant, pour les problèmes de conduction à très faible conductivité (correspondant au cas $\alpha = 0$) ou à très forte conductivité (correspondant au cas (β^ε) non uniformément bornée) la méthode de la H -convergence n'est pas applicable. V.A. Marčenko et E.Ja. Hruslov ([45], [42]) ont étudié des problèmes de conduction dans des matériaux très fortement hétérogènes, donc ne vérifiant pas (1.3), et ont établi rigoureusement les équations effectives associées, dans lesquelles apparaissent des termes non locaux. Voir aussi un travail récent de M. Briane [29].

Il est bien connu que les modèles à mémoire courte comme c'est le cas pour les matériaux viscoélastiques (modèle de Kelvin-Voigt) conduisent par homogénéisation à des modèles à mémoire longue, voir M. Renardy, J.A. Hrusa et W.J. Nohel [52]. Le modèle suivant, étudié par J.L. Lions ([27], [44]), E. Sanchez-Palencia ([54], [53]) et H.I. Ene, M.L. Mascarenhas et J. Saint Jean Paulin [36], dans le cadre périodique,

$$\rho^\varepsilon(x)\partial_t^2 u^\varepsilon - \nabla \cdot (A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon + B^\varepsilon(x)\nabla \partial_t u^\varepsilon) = f,$$

en est un exemple. Ici, les matrices A^ε et B^ε sont supposées uniformément elliptiques et bornées, c'est-à-dire p.p. en $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq A^\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \quad \gamma|\xi|^2 \leq B^\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \leq \delta|\xi|^2,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes positives. On notera que les solutions harmoniques en temps $u^\varepsilon(t, x) = e^{i\gamma t} v^\varepsilon(x)$ vérifient l'équation

$$-\gamma^2 \rho^\varepsilon(x)v^\varepsilon - \nabla \cdot ((A^\varepsilon(x) + i\gamma B^\varepsilon(x))\nabla v^\varepsilon) = e^{-i\gamma t} f.$$

L'effet induit par homogénéisation découle donc de la caractérisation de la dépendance par rapport à γ de la matrice complexe homogénéisée $(A + \nu\gamma B)_{hom}$.

L'homogénéisation d'équations de transport avec des vitesses oscillantes, qui consiste à déterminer des équations effectives associées, sort du cadre d'application des méthodes classiques de l'homogénéisation.

L. Tartar [61] s'est intéressé à l'homogénéisation de l'équation différentielle

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(x)u^\varepsilon = f, \quad u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), \quad (1.4)$$

avec $a^\varepsilon \rightharpoonup a$ dans L^∞ faible- \star et a obtenu, en utilisant une méthode différente de celles habituellement utilisées en homogénéisation, l'équation effective

$$\partial_t u + a(x)u + \int_0^t K(t-s, x)u(s, x)ds = f, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

où $K(t, x)$ est un noyau qui ne dépend que de la mesure de Young associée à la suite (a^ε) ; il est caractérisé par les limites faibles de $(a^\varepsilon)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Une question naturelle qui prolonge le problème académique (1.4) est l'homogénéisation d'équations différentielles du second ordre comme par exemple

$$X_\varepsilon'' = \nabla_x u^\varepsilon(X_\varepsilon)$$

où u^ε est un potentiel oscillant. En introduisant la densité $f^\varepsilon(t, x, \xi)$ (pour $t \geq 0$, x et ξ dans \mathbb{R}^n) qui est constante le long des courbes caractéristiques $X_\varepsilon' = \xi_\varepsilon$, $\xi_\varepsilon' = \nabla_x u^\varepsilon(X_\varepsilon)$, on obtient l'équation de transport cinétique

$$\partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \nabla_x u^\varepsilon(x) \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon = 0.$$

Une autre question académique qui prolonge la question étudiée par L. Tartar est l'homogénéisation d'équations différentielles non linéaires comme l'équation de Riccati

$$\partial_t u_\varepsilon + a^\varepsilon(x)u_\varepsilon^2 = f, \quad u_\varepsilon(0, x) = u_0(x).$$

L'homogénéisation d'équations de transport est un véritable challenge non seulement au regard d'applications potentielles en modélisation mais aussi du point de vue des méthodes mathématiques nouvelles à développer pour l'étude de ces équations. C'est à ce programme de recherche que Abdelhamid Ziani s'est attelé durant une décennie. Le premier problème que nous avons étudié avec Hamid est l'homogénéisation d'une équation de

transport en dimension $1 + 1/2$, c'est-à-dire en supposant que la vitesse est de la forme $V^\varepsilon = (a^\varepsilon(t, y), 0)$:

$$\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(t, y) \partial_x u^\varepsilon = f, \quad u^\varepsilon(0, x, y) = u_0(x, y). \quad (1.5)$$

Cette équation intervient non seulement dans la modélisation de fluides en milieu poreux hétérogène (voir par exemple [5]) mais également en mécanique des fluides pour les écoulements dits "shear flows" (voir par exemple R.J. DiPerna et A.J. Majda [32]). Nous nous sommes ensuite intéressés à l'homogénéisation de l'équation de transport plus générale

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + A^\varepsilon(t, x) \nabla_x u^\varepsilon &= f, \quad \nabla \cdot A^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon(0, x) &= u^0(x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Écoulements de fluides miscibles en milieu poreux. Le modèle mathématique de base des écoulements de fluides miscibles en milieu poreux est constitué des équations décrivant la conservation de la masse de chaque constituant, la loi de Darcy et les lois d'état des fluides. Considérons N fluides miscibles et faiblement compressibles, obéissant aux lois d'état

$$\frac{d\rho_i}{dp} = z_i \rho_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

où ρ_i est la densité du fluide (constituant) i , z_i son coefficient de compressibilité et p est la pression. La composition du mélange est décrite par les concentrations volumiques c_i ($i=1, \dots, N$) des constituants vérifiant

$$c_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N c_i = 1. \quad (1.7)$$

En choisissant comme fonctions inconnues la pression p et les $N - 1$ premières concentrations c_1, c_2, \dots, c_{N-1} , l'écoulement est décrit, sous certaines hypothèses physiques (voir par exemple G. Chavent et J. Jaffré [30], D.W. Peaceman [51], J. Douglas et J.E. Roberts [34]) par le système

$$\begin{aligned} \phi \left(\sum_{i=1}^N z_i c_i \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u &= q^+ - q^-, \quad u = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \\ \phi \frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i u) + \phi z_i c_i \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (D(u) \nabla c_i) &+ q^- c_i = c_i^* q^+, \\ 1 \leq i \leq N - 1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

où ϕ est la porosité du milieu, k le tenseur de perméabilité, u la vitesse de Darcy, $\mu = \mu(c_1, \dots, c_{N-1})$ la viscosité du mélange, q^+ et q^- représentent

les termes d'injection et de production, respectivement, c_i^* est la concentration résiduelle du constituant i ($c_i^* \geq 0$, $\sum_{i=1}^N c_i^* = 1$), D le tenseur de dispersion hydrodynamique donné par $D = d_m \phi I + |u|(d_l E(u) + d_t(I - E(u)))$, I étant la matrice identité, $E(u) = (u_i u_j / |u|^2)$, d_m le coefficient de diffusion moléculaire, et d_l , d_t les coefficients de dispersion longitudinale et transverse, respectivement. Dans (1.8), (1.8)₁ est dite équation de la pression (parabolique) et (1.8)₂ équation de la concentration c_i . Si on tient compte des effets de la diffusion moléculaire, l'équation (1.8)₂ est parabolique, autrement elle est parabolique dégénérée, et hyperbolique si on néglige à la fois les effets de la diffusion moléculaire et de la dispersion. Dans le cas incompressible, le système (1.8) s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= q^+ - q^-, \quad u = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \\ \phi \frac{\partial c_i}{\partial t} + u \cdot \nabla c_i + c_i q^+ - \nabla \cdot (D \nabla c_i) &= c_i^* q^+, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Les équations des fluides miscibles ont été étudiées essentiellement dans le cas incompressible, voir par exemple A. Mikelić [47], P. Fabrie et M. Langlais [38], X. Feng [39]. Dans le cas compressible, plusieurs questions sont encore ouvertes.

La suite de l'article est organisée comme suit. Dans la section 2 nous considérons l'équation (1.6) dans le cas des oscillations de faible amplitude de la vitesse A^ε et nous dérivons formellement l'équation effective associée. La section 3 est consacrée à l'homogénéisation de l'équation (1.5). Nous y décrivons de façon précise l'effet non local induit par homogénéisation. La section 4 traite de l'homogénéisation par décomposition en fréquences d'une équation de transport dans \mathbb{R}^N et la section 5 de l'homogénéisation d'une équation des ondes dégénérée. Dans la section 6 nous énonçons des résultats d'homogénéisation non locale pour d'autres types d'équations aux dérivées partielles. Dans la section 7 nous considérons une équation différentielle de Riccati avec un coefficient oscillant et sans second membre et nous montrons que l'homogénéisation de cette équation induit un effet non linéaire et instantané. L'équation effective change de type. Nous donnons une application de ce résultat à la propagation des oscillations de la donnée initiale dans une équation de transport semi-linéaire. Enfin, dans les sections 8 et 9 nous donnons quelques résultats sur l'analyse mathématique des équations des fluides miscibles en milieu poreux.

2. Homogénéisation formelle de l'équation de transport (1.6)

On suppose que A^ε est indépendant de t et dépend d'un petit paramètre γ mesurant l'amplitude des oscillations de A^ε de sorte que

$$A^\varepsilon(x) = A(x) + \gamma A_1^\varepsilon(x) + \gamma^2 A_2^\varepsilon(x) + O(\gamma^2)$$

où $O(\gamma^2)$ est uniformément borné par rapport à ε et converge fortement vers 0, $A_j^\varepsilon \rightharpoonup 0$ faiblement (pour $j = 1, 2$) et A désigne la limite faible de (A^ε) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Considérons un développement asymptotique de u^ε de la forme

$$u^\varepsilon = u_0^\varepsilon + \gamma u_1^\varepsilon + \gamma^2 u_2^\varepsilon + O(\gamma^2).$$

En reportant les développements de A^ε et u^ε dans (1.6) et en égalant les termes suivant les puissances γ^j (pour $j = 0, 1, 2$) on obtient les équations

$$\begin{aligned} \partial_t u_0^\varepsilon + A \cdot \nabla u_0^\varepsilon &= 0, \\ \partial_t u_1^\varepsilon + A \cdot \nabla u_1^\varepsilon &= -A_1^\varepsilon \cdot \nabla u_0^\varepsilon, \\ \partial_t u_2^\varepsilon + A \cdot \nabla u_2^\varepsilon &= -A_1^\varepsilon \cdot \nabla u_1^\varepsilon - A_2^\varepsilon \cdot \nabla u_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.1)$$

et les conditions initiales $u_0^\varepsilon(0) = u^0$, $u_j^\varepsilon(0) = 0$ (pour $j = 1, 2$). On déduit de (2.1)₁ que u_0^ε est indépendant de ε (on écrira $u_0^\varepsilon = u_0$) puis de (2.1)₂

$$A_1^\varepsilon u_1^\varepsilon = -A_1^\varepsilon (\partial_t + A \cdot \nabla)^{-1} \nabla \cdot (A_1^\varepsilon u_0)$$

et en reportant dans (2.1)₃ il vient

$$\partial_t u_2^\varepsilon + A \cdot \nabla u_2^\varepsilon = \nabla \cdot ([A_1^\varepsilon (\partial_t + A \cdot \nabla)^{-1} A_1^\varepsilon] \cdot \nabla u_0) - \nabla \cdot (A_2^\varepsilon u_0). \quad (2.2)$$

Notons que l'on a utilisé la condition $\nabla \cdot A_j^\varepsilon = 0$. Introduisons l'opérateur

$$\Theta_{ij}^\varepsilon = A_{1i}^\varepsilon (\partial_t + A \cdot \nabla)^{-1} A_{1j}^\varepsilon$$

où A_{1j}^ε désigne la jème composante de A_1^ε . En admettant que $\Theta_{ij}^\varepsilon \rightharpoonup \Theta_{ij}$, dans un sens faible à préciser, le passage à la limite dans (2.2) fournit l'équation

$$\partial_t u_2 + A \cdot \nabla u_2 = \partial_i (\Theta_{ij} (\partial_j u_0)) - \nabla \cdot (A_2 u_0)$$

où u_2 désigne la limite faible de u_2^ε . Ainsi, en notant u la limite faible de u^ε et u_1 celle de u_1^ε , on a

$$u = u_0 + \gamma u_1 + \gamma^2 u_2 + O(\gamma^2)$$

et les equations (2.1) impliquent

$$\begin{aligned}\partial_t u_0 + A \cdot \nabla u_0 &= 0, \\ \partial_t u_1 + A \cdot \nabla u_1 &= 0, \\ \partial_t u_2 + A \cdot \nabla u_2 &= \partial_i(\Theta_{ij}(\partial_j u_0)),\end{aligned}$$

avec $u(0) = u^0$, $u_1(0) = u_2(0) = 0$. On en déduit après quelques calculs que u vérifie

$$\partial_t u + A \cdot \nabla u = \gamma^2 \partial_j(\Theta_{ij}(\partial_j u)) + O(\gamma^2).$$

Précisons le terme $\Theta_{ij}(\partial_j u)$. On a

$$\Theta_{ij}^\varepsilon(\partial_j u) = A_{1i}^\varepsilon(\partial_t + A \cdot \nabla)^{-1}(A_{1j}^\varepsilon \partial_j u).$$

Notons $X(t; x, s)$ la courbe caractéristique définie, pour s donné dans $[0, T]$ et x dans \mathbb{R}^n , par le système différentiel

$$dX/dt = A(X), \quad t \in (0, T), \quad X|_{t=s} = x.$$

Alors

$$\Theta_{ij}^\varepsilon(\partial_j u) = \int_0^t A_{1i}^\varepsilon(x) A_{1j}^\varepsilon(X(s, x, t)) \partial_j u(s, X(s, x, t)) ds,$$

d'où en passant à la limite

$$\Theta_{ij}(\partial_j u) = \int_0^t K_{ij}(s, x, t) \partial_j u(s, X(s, x, t)) ds$$

où $K_{ij}(s, x, t)$ est la limite faible du produit $A_{1i}^\varepsilon(x) A_{1j}^\varepsilon(X(s, x, t))$. Finalement l'équation homogénéisée prend la forme

$$\partial_t u + A \cdot \nabla u = \gamma^2 \int_0^t \partial_j (K_{ij}(s, t, x) \partial_j u(s, X(s, x, t))) ds + O(\gamma^2).$$

On a $A^\varepsilon - A - \gamma^2 A_2^\varepsilon + O(\gamma^2) = \gamma A_1^\varepsilon$, d'où

$$\begin{aligned}\gamma^2 A_1^\varepsilon \otimes A_1^\varepsilon(X) &= (A^\varepsilon - A) \otimes (A^\varepsilon(X) - A(X)) \\ -\gamma^2 ((A^\varepsilon - A) \otimes A_2^\varepsilon(X) &+ A_2^\varepsilon \otimes (A^\varepsilon(X) - A(X))) + O(\gamma^2),\end{aligned}$$

il s'en suit que le noyau matriciel $K(s, x, t) = (K_{ij}(s, x, t))$ est tel que

$$\gamma^2 K(s, x, t) = \kappa(s, x, t) + \gamma^2 \rho(s, x, t) + O(\gamma^2),$$

où $\kappa(s, x, t)$ et $\rho(s, x, t)$ sont, respectivement, les limites faibles des matrices κ^ε et ρ^ε définies par

$$\begin{aligned}\kappa^\varepsilon(s, x, t) &= \left((A^\varepsilon - A) \otimes (A^\varepsilon(X) - A(X)) \right)(s, x, t), \\ \rho^\varepsilon(s, x, t) &= \left((A^\varepsilon - A) \otimes A_2^\varepsilon(X) + A_2^\varepsilon \otimes (A^\varepsilon(X) - A(X)) \right)(s, x, t).\end{aligned}$$

L'équation limite satisfaite par u prend la forme

$$\begin{aligned}\partial_t u + A \cdot \nabla u \\ = \partial_j \int_0^t \left(\kappa_{ij}(s, x, t) + \gamma^2 \rho_{ij}(s, x, t) \right) \partial_j u(s, X(s, x, t)) ds + O(\gamma^2).\end{aligned}$$

Ce résultat montre que l'équation effective associée à l'équation de transport (1.6) est une équation intégro-différentielle.

Notons que les calculs formels présentés ici peuvent être rigoureusement justifiés dans les cas non dégénérés.

3. Homogénéisation d'une équation de transport dans \mathbb{R}

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) et (a^ε) une suite de $L^\infty(\mathcal{O})$ vérifiant $a_- \leq a^\varepsilon(y) \leq a_+$ p.p. dans \mathcal{O} et convergeant vers a dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible- \star . Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{O})$. Considérons l'équation de transport, avec une vitesse oscillante dans la direction transverse à celle de la propagation,

$$\begin{aligned}\partial_t u^\varepsilon + a^\varepsilon(y) \partial_x u^\varepsilon &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{O}, \\ u^\varepsilon(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

L'étude de l'homogénéisation de cette équation fait suite aux travaux de L. Tartar ([61], [60]) et L. Mascarenhas [46] sur l'homogénéisation d'équations différentielles à coefficients oscillants.

3.1. Equation effective

Avec Hamid nous avons montré que l'homogénéisation de l'équation de transport (3.1) fait apparaître à la limite un terme non local. Nous donnons ici une description de ce résultat et une idée de la démonstration.

Appliquons à l'équation (3.1) la transformation de Fourier par rapport à x , notée \mathcal{F} , puis la transformation de Laplace par rapport à t , notée \mathcal{L} . Posons

$$\begin{aligned}v^\varepsilon(p, \xi, y) &= \mathcal{L}(\mathcal{F}(u^\varepsilon(\cdot, \cdot, y)))(p, \xi), \\ v_0(\xi, y) &= \mathcal{F}(u_0(\cdot, y))(\xi),\end{aligned}$$

pour $\Re(p) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, p.p. en $y \in \mathcal{O}$. Alors v^ε est donnée par

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(p, \xi, y) &= -\frac{1}{2i\pi\xi}(z - a^\varepsilon(y))^{-1}v_0(\xi, y) \text{ si } \xi \neq 0, \\ v^\varepsilon(p, 0, y) &= \frac{v_0(0, y)}{p} \text{ si } \xi = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $z = -\frac{p}{2i\pi\xi}$. Posons $\Lambda = (a_-, a_+)$ et considérons la fonction définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$ et $y \in \mathcal{O}$ par

$$\Phi^\varepsilon(z, y) = (z - a^\varepsilon(y))^{-1}.$$

Il existe une suite extraite de (a^ε) , encore notée (a^ε) , telle que $\Phi^\varepsilon(z, \cdot) \rightharpoonup \Phi(z, \cdot)$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible- \star et on a

$$\Phi(z, y) = \int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1} \quad (3.3)$$

où $d\nu_y(\lambda)$ est la mesure de Young associée à la suite (a^ε) . Passant à la limite dans (3.2), en notant u la limite faible d'une suite extraite de (u^ε) et v la limite faible d'une suite extraite de (v^ε) , on a

$$v(p, \xi, y) = \mathcal{L}(\mathcal{F}(u(\cdot, \cdot, y)))(p, \xi) = -\frac{1}{2i\pi\xi}\Phi(z, y)v_0(\xi, y) \quad (3.4)$$

où $z = -\frac{p}{2i\pi\xi}$ et $\xi \neq 0$. Nous allons donner une autre expression de $\Phi(z, y)$. On observe que Φ^ε admet dans $\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$ le développement asymptotique, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi^\varepsilon(z, y) = \frac{1}{z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(a^\varepsilon)^k}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]$$

où $o(\frac{1}{z^n})$ est uniformément borné dans $L^\infty(\mathcal{O})$ par rapport à ε . En passant à la limite dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible- \star dans l'égalité précédente on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi(z, y) = \frac{1}{z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]$$

où $a_0 = 1$, $a_1 = a$ et pour chaque entier $k \geq 2$, a_k désigne la limite dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible- \star d'une suite extraite de $(a^\varepsilon)^k$. On en déduit le développement asymptotique

$$\frac{1}{\Phi(z, y)} = z - a - \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

où les τ_k sont entièrement déterminés et ne dépendent que des limites dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible- \star de suites extraites de $(a^\varepsilon)^l$ ($1 \leq l \leq k + 1$). En

particulier on a $\tau_1 = a_2 - a^2$, $\tau_2 = -a_3 + 2aa_2 - a^3$, etc. En utilisant (3.3) le développement asymptotique précédent s'écrit

$$\int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda) - \frac{1}{\int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k(y)}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right). \quad (3.5)$$

Considérons maintenant la fonction Ψ définie dans $(\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}) \times \mathcal{O}$ par

$$\Psi(z, y) = z - a(y) - \frac{1}{\Phi(z, y)}.$$

D'après (3.5),

$$\Psi(z, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k(y)}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

pour tout $n \geq 1$. De plus

$$\Im m(\Psi(z, y)) = \Im m(z) - \Im m\left(\frac{\overline{\Phi(z, y)}}{|\Phi(z, y)|^2}\right)$$

d'où, avec (3.3),

$$\Im m(\Psi(z, y)) = \Im m(z) \left[1 - \frac{\int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda) |z - \lambda|^{-2}}{|\int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda)|^2} \right].$$

On en déduit avec l'inégalité de Jensen que

$$\Im m(\Psi(z, y)) < 0 \text{ si } \Im m(z) > 0.$$

Ainsi, $\Psi(z, y)$ satisfaisant les deux propriétés

$$\Psi(z, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\tau_k(y)}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) \text{ pour tout } n \geq 1,$$

$$\Im m(\Psi(z, y)) < 0 \text{ si } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda} \text{ et } \Im m(z) > 0,$$

est une fonction holomorphe de type Nevanlinna-Pick (pour presque tout y fixé). Elle admet donc la représentation (voir N.I. Ahiezer et M. Krein [1], W.F. Donoghue [33]) :

Il existe une mesure positive $d\omega_y$, à support dans $\bar{\Lambda}$, telle que

$$\Psi(z, y) = \int_{\Lambda} d\omega_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1},$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$, ou encore

$$\int_{\Lambda} d\omega_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1} = \int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda) - \frac{1}{\int_{\Lambda} d\nu_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1}},$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$. Par conséquent,

$$\Phi(z, y) = \left(z - a(y) - \int_{\Lambda} d\omega_y(\lambda)(z - \lambda)^{-1} \right)^{-1},$$

d'où, avec (3.4) et en prenant $z = -\frac{p}{2i\pi\xi}$,

$$v(p, \xi, y) = \left(p + 2i\pi\xi a(y) - (2i\pi\xi)^2 \int_{\Lambda} d\omega_y(\lambda)(p + 2i\pi\xi\lambda)^{-1} \right)^{-1} v_0(\xi, y)$$

pour $\Re(p) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{O}$. En prenant la transformation de Laplace inverse puis la transformation de Fourier inverse on obtient que u est solution de l'équation effective

$$\partial_t u + a(y) \partial_x u - \int_0^t \int_{\Lambda} \partial_x^2 u(s, x - \lambda(t - s), y) d\omega_y(\lambda) ds = 0,$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{O}, \tag{3.6}$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}.$$

Nous renvoyons à [5] pour des détails et compléments; on y trouve aussi une application aux équations des fluides miscibles en milieu poreux. Voir aussi L. Tartar [62].

Le cas où la vitesse a^ε dépend aussi de t est abordé dans [5], voir aussi R. Alexandre [2], [3].

3.2. Formulation cinétique

En introduisant la variable $\lambda \in \Lambda$ représentant les oscillations de (a^ε) et la fonction auxiliaire v définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Lambda$ par

$$v(t, x, y, \lambda) = \int_0^t \partial_x u(s, x - \lambda(t - s), y) ds,$$

on voit que l'équation (3.6) s'écrit sous la forme d'un système de transport où λ joue le rôle de variable cinétique :

$$\begin{aligned} \partial_t u + a(y) \partial_x u - \int_{\Lambda} \partial_x v d\omega_y(\lambda) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{O}, \quad \lambda \in \Lambda, \\ \partial_t v + \lambda \partial_x v - \partial_x u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{O}, \quad \lambda \in \Lambda, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad v(0, x, y, \lambda) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{O}, \quad \lambda \in \Lambda. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avec Hamid nous avons montré que le problème (3.7) est bien posé. Le cadre général de l'étude est le suivant. Soit a une fonction de $L^\infty(\mathcal{O})$ vérifiant $a_- \leq a(y) \leq a_+$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$ et soit $d\omega_y$ une famille paramétrée de mesures positives, à support dans $\bar{\Lambda} = [a_-, a_+]$, dont on note $\tau(y)$ le moment d'ordre zéro. On suppose que $\tau \in L^\infty(\mathcal{O})$, $\tau(y) > 0$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$. Définissant $d\sigma_y(\lambda) = \frac{d\omega_y(\lambda)}{\tau(y)}$, on suppose que $d\mu(y, \lambda) = dy d\sigma_y(\lambda)$ est une mesure positive sur $\mathcal{O} \times \Lambda$. Considérons le système, posé dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Lambda$,

$$\begin{aligned} \partial_t u + a(y) \partial_x u - \tau(y) \int_{\Lambda} \partial_x v d\sigma_y(\lambda) &= f, \\ \partial_t v + \lambda \partial_x v - \partial_x u &= g, \end{aligned} \quad (3.8)$$

muni de la condition initiale

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad v(0, x, y, \lambda) = v_0(x, y, \lambda), \\ x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{O}, \quad \lambda \in \Lambda, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y, \lambda)$ sont les inconnues et $f = f(t, x, y)$, $g = g(t, x, y, \lambda)$, u_0 et v_0 sont données.

Introduisons les espaces de Hilbert

$$H = L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{O}), \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Lambda; dx d\mu(y, \lambda))$$

et notons A l'opérateur de domaine

$$D(A) = \{U = (u, v) \in H \times \mathcal{H}; AU \in H \times \mathcal{H}\}$$

défini pour $u \in L^2(\mathcal{O}; \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ et $v \in L^2_\mu(\mathcal{O} \times \Lambda; \mathcal{D}(\mathbb{R}))$, où

$$L^2_\mu(\mathcal{O} \times \Lambda) = L^2(\mathcal{O} \times \Lambda; d\mu),$$

par

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y) \partial_x u - \tau(y) \partial_x (\int_{\Lambda} v d\sigma_y(\lambda)) \\ -\tau(y) \partial_x u + \tau(y) \lambda \partial_x v \end{pmatrix}.$$

Le système (3.8), (3.9) s'écrit sous la forme abstraite

$$\frac{d}{dt}U + AU = BF \text{ sur } (0, T), U(0) = U_0, \quad (3.10)$$

où B est l'opérateur (de multiplication) borné dans $H \times \mathcal{H}$ défini par $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ avec $b_{12} = b_{21} = 0$, $b_{11} = 1$ et $b_{22} = \tau(y)$. On montre que l'opérateur A est maximal accréatif dans $H \times \mathcal{H}$ puis, à l'aide des théorèmes de Lumer-Phillips et Stone, voir A. Pazy [50], que A est générateur infinitésimal d'un groupe continu de contractions $S(t)$. Alors, pour tout $U_0 \in D(A)$ et tout $F \in C^1([0, T]; H \times \mathcal{H})$ il existe une unique fonction $U \in C^0([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; H \times \mathcal{H})$ vérifiant (3.10). De plus, U est donnée par

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)BF(s) ds$$

et cette formule a encore un sens pour $U_0 \in H \times \mathcal{H}$ et $F \in L^1(0, T; H \times \mathcal{H})$. Il s'en suit les résultats suivants (voir [7], [12]) :

Soit $(f, g) \in L^1(0, T; H \times \mathcal{H})$, $(u_0, v_0) \in H \times \mathcal{H}$. Alors, il existe une unique paire (u, v) dans $C^0([0, T]; H \times \mathcal{H})$ vérifiant (3.8) au sens des distributions et la condition initiale (3.9). De plus, la solution (u, v) du système (3.8), (3.9) se propage à vitesse finie. Précisément, supposons que les données initiales u_0, v_0 sont telles que les supports de $u_0(\cdot, y)$ et $v_0(\cdot, y, \lambda)$ sont inclus dans $[-r_0, r_0]$ p.p. en $(y, \lambda) \in \mathcal{O} \times \Lambda$ avec $r_0 > 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et p.p. en $(y, \lambda) \in \mathcal{O} \times \Lambda$, les supports de $u(t, \cdot, y)$ et de $v(t, \cdot, y, \lambda)$ sont contenus dans $[-r_0 - v_*(y)t, r_0 + v_*(y)t]$ où v_* est une fonction strictement positive donnée par

$$v_* = \frac{1}{2} \min\{a + a_+ + \sqrt{(a_+ - a)^2 + 4\tau}, -a - a_- + \sqrt{(a_- - a)^2 + 4\tau}\}.$$

3.3. Cas où a^ε est périodique à valeurs discrètes

Dans ce cas la mesure $d\omega_y$ est indépendante de y et est une somme finie de masses de Dirac. Précisément, étant données $(n+1)$ valeurs $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ et une subdivision $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$, on définit la fonction \tilde{a} par $\tilde{a}(y) = v_j$ si $y_j \leq y < y_{j+1}$, $j = 0, \dots, n$, que l'on prolonge par périodicité sur \mathbb{R} et on note, pour $\varepsilon > 0$, $a^\varepsilon(y) = \tilde{a}(\frac{y}{\varepsilon})$ et $a = \sum_{j=1}^n (y_{j+1} - y_j) v_j$ sa limite faible. Alors (voir [7], [12]) il existe n couples (α_j, λ_j) , $j = 1, \dots, n$, tel que $d\omega(\lambda) =$

$\tau \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{\lambda=\lambda_j}$ avec $v_0 < \lambda_1 < v_1 < \dots < v_{n-1} < \lambda_n < v_n$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ et $\tau = \sum_{0 \leq k < j \leq n} (y_{j+1} - y_j)(y_{k+1} - y_k)(v_k - v_j)^2$. Par suite, le système (3.8) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t u + a \partial_x u - \tau \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_x v_i &= 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j - \partial_x u &= 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x, y) = u_0(x, y), v_j(0, x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

pour $j = 1, \dots, n$. Pour $n = 1$, on a $\tau = y_1(1 - y_1)(v_1 - v_0)^2$, $a = y_1 v_0 + (1 - y_1)v_1$, $\lambda_1 = y_1 v_1 + (1 - y_1)v_0$, $d\omega = \tau \delta_{\lambda=\lambda_1}$ et on vérifie que u est solution de l'équation hyperbolique des télégraphistes

$$\partial_t^2 u + (v_0 + v_1) \partial_{xt}^2 u + v_0 v_1 \partial_x^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, 1).$$

Signalons ici un travail de M.I. Shvidler [56] dans lequel il propose, pour une équation de transport intervenant en dynamique des milieux poreux, une approximation par une équation hyperbolique des télégraphistes.

3.4. Approximation de la mesure $d\omega_y$

En vue de la résolution effective d'un système de type (3.7), il est nécessaire de déterminer la mesure $d\omega_y$. Le point précédent donne une réponse quand a^ε est périodique à valeurs discrètes. Nous proposons ici, dans un cadre général, une approximation de la famille paramétrée $d\omega_y$. Soit $d\nu_y$ une famille paramétrée de mesures de Young vérifiant :

- (H_1) $\text{supp } d\nu_y \subset \bar{\Lambda}$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$, où $\Lambda =]\gamma_-, \gamma_+[$;
- (H_2) pour toute fonction $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ continue, l'application $y \mapsto \langle d\nu_y, f \rangle$ est mesurable et bornée. De plus, il existe $k > 0$ tel que $|\langle d\nu_y(\lambda), f(\lambda) \rangle| \leq k \|f\|_\infty$.

Soit $d\omega_y$ la mesure associée à $d\nu_y$ par la relation

$$\langle d\omega_y(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle = \langle d\nu_y, z - \lambda \rangle - \langle d\nu_y(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle^{-1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$, p.p. en $y \in \mathcal{O}$. On introduit une approximation de $d\nu_y$ par une somme finie de masses de Dirac, à laquelle on associera une mesure approchée de $d\omega_y$ par une somme finie de masses de Dirac. Une approximation de $d\nu_y$ est proposée par E. Bonnetier et C. Conca [28] :

Pour tout entier n , il existe $2n$ fonctions mesurables θ_j, c_j , définies dans \mathcal{O} , satisfaisant les propriétés :

- $\theta_j(y) \in [0, 1]$ avec $\sum_{j=1}^n \theta_j(y) = 1$, $c_j(y) \in \bar{\Lambda}$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$,
- on a :

$$\langle d\nu_y(\lambda), \lambda^l \rangle = \sum_{j=1}^n \theta_j(y) (c_j(y))^l, \quad (3.11)$$

pour tout entier l , $0 \leq l \leq 2n - 1$, p.p. en $y \in \mathcal{O}$.

On définit alors, pour n entier positif, une mesure $d\nu_y^n$ par

$$d\nu_y^n = \sum_{j=1}^n \theta_j(y) \delta_{\lambda=c_j(y)}.$$

Alors, sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , pour toute fonction $f \in C(\bar{\Lambda}, \mathbb{R})$, on a :

$$\langle d\nu_y^n, f \rangle \longrightarrow \langle d\nu_y, f \rangle \text{ dans } L^\infty(\mathcal{O}) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

En effet, soit $\eta > 0$ arbitraire et $f \in C(\bar{\Lambda}, \mathbb{R})$. En vertu du théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme p_N de degré N tel que $\|f - p_N\|_\infty \leq \eta$. Soit alors $n > N$. Compte tenu de (3.11) et de la définition de $d\nu_y^n$ on a

$$\langle d\nu_y^n(\lambda), p_N(\lambda) \rangle = \langle d\nu_y(\lambda), p_N(\lambda) \rangle.$$

D'où

$$\langle d\nu_y^n, f \rangle - \langle d\nu_y, f \rangle = \langle d\nu_y^n, f - p_N \rangle - \langle d\nu_y, f - p_N \rangle.$$

Grâce à l'hypothèse (H_2) ,

$$|\langle d\nu_y, f - p_N \rangle| \leq k \|f - p_N\|_\infty \leq k\eta.$$

De même

$$|\langle d\nu_y^n, f - p_N \rangle| \leq \sum_{j=1}^n \theta_j(y) |(f - p_N)(c_j(y))| \leq k\eta.$$

On conclut que $\text{ess sup}_{y \in \mathcal{O}} \|d\nu_y^n - d\nu_y\|_{M(\Lambda)} \leq k\eta$, où $M(\Lambda)$ désigne l'espace des mesures de Radon sur Λ . D'où (3.12).

Soit maintenant $d\omega_y^n$ la mesure associée à $d\nu_y^n$ par la relation

$$\langle d\omega_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle = \langle d\nu_y^n, z - \lambda \rangle - \langle d\nu_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle^{-1}, \quad (3.13)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$ et p.p. en $y \in \mathcal{O}$. Ainsi, p.p. en $y \in \mathcal{O}$, la mesure $d\omega_y^n$ est discrète. Un algorithme permet de déterminer précisément les coefficients de $d\omega_y^n$ (voir [16]). De plus, on a le résultat de convergence suivant :

Pour toute fonction $f \in C(\bar{\Lambda}, \mathbb{R})$, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\langle d\omega_y^n(\cdot), f(\cdot) \rangle \longrightarrow \langle d\omega_y(\cdot), f(\cdot) \rangle \text{ dans } L^\infty(\mathcal{O}). \quad (3.14)$$

En effet, on déduit aisément de (3.12) et (3.13) que

$$\langle d\omega_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle \longrightarrow \langle d\omega_y(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ensuite, on peut supposer sans restriction que f est holomorphe. Alors le théorème de Cauchy permet d'écrire

$$\langle d\omega_y^n(\cdot), f(\cdot) \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) \langle d\omega_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle dz$$

où Γ est une courbe fermée régulière de \mathbb{C} entourant $\bar{\Lambda}$. Ce qui donne, avec (3.13),

$$\begin{aligned} \langle d\omega_y^n(\cdot), f(\cdot) \rangle &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma} f(z) \langle d\nu_y^n(\lambda), z - \lambda \rangle dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma} f(z) \langle d\nu_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle^{-1} dz \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) \langle d\nu_y^n(\lambda), \frac{1}{z - \lambda} \rangle^{-1} dz. \end{aligned}$$

On passe à la limite, quand n tend vers $+\infty$, dans le second membre de cette relation et on obtient (3.14).

4. Homogénéisation par décomposition en fréquences d'une équation de transport dans \mathbb{R}^N

Soit (A^ε) une suite de fonctions de $(L^\infty(\mathcal{O}))^n$ ($n \geq 1$) dont les coefficients A_i^ε sont tels que $\sum_{i=1}^n |A_i^\varepsilon(y)| \leq M$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$, et supposons que (A^ε) converge vers A dans $(L^\infty(\mathcal{O}))^n$ faible- \star . Considérons l'équation du premier ordre

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + A^\varepsilon(y) \cdot \nabla_x u^\varepsilon &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathcal{O}, \\ u^\varepsilon(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{O}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathcal{O})$. L'équation effective associée à (4.1) est obtenue *via* la transformation de Radon qui permet de considérer pour chaque fréquence fixée un problème unidimensionnel. Ce dernier est traité par la technique du paragraphe 3.1, le résultat est ensuite intégré par rapport à l'ensemble des fréquences.

Précisons les notations. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Radon de f est définie par

$$\mathcal{R}(f)(r, \omega) = \int_{x \cdot \omega = r} f(x) d^*x$$

où d^*x est la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $x \cdot \omega - r = 0$. La relation entre les transformées de Radon et de Fourier est donnée par

$$\hat{f}(r\omega) = \mathcal{F}_r(\mathcal{R}(f(\cdot, \omega)))$$

où le symbole $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier dans \mathbb{R}^n et \mathcal{F}_r la transformation de Fourier unidimensionnelle. La transformation duale \mathcal{R}^* de \mathcal{R} est définie pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ par

$$\mathcal{R}^*(f)(x) = \int_{S^{n-1}} g(x \cdot \omega) d\omega$$

où $d\omega$ est la mesure de Lebesgue sur S^{n-1} . Soit \mathcal{K}_n l'opérateur défini par

$$\mathcal{K}_n g(r, \omega) = \begin{cases} \partial_r^{n-1} g(r, \omega) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ i\mathcal{H}(\partial_r^{n-1} g(\cdot, \omega)(r)) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

\mathcal{H} étant la transformation de Hilbert. On a la formule d'inversion

$$f(x) = c_n (\mathcal{R}^* \mathcal{K}_n \mathcal{R}(f))(x), \quad c_n = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}},$$

et la formule de Plancherel

$$\int |f(x)|^2 dx = |c_n| \int_{S^{n-1}} d\omega \int_{\mathbb{R}} |(-\partial_r^2)^{\frac{n-1}{4}} \mathcal{R}f(r, \omega)|^2 dr.$$

En utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on prolonge l'application $\sqrt{\mathcal{K}_n} \mathcal{R}$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on montre qu'elle est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur le sous espace de $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1}; |c_n| d\omega dr)$ formé des fonctions paires. De plus, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\sqrt{\mathcal{K}_n} \mathcal{R}f \in L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$.

On peut consulter I.M. Gel'fand, M.I. Graev et N.Ya. Vilenkin [40] et S. Helgason [41] pour les propriétés de la transformation de Radon.

Supposons maintenant que la donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathcal{O})$ et est à support contenu dans $B_n(\rho)$ p.p. en $y \in \mathcal{O}$, où $B_n(\rho)$ est la boule de \mathbb{R}^n

de centre 0 et de rayon $\rho > 0$. Alors, la solution u^ε de (4.1) est telle que $\text{supp } u^\varepsilon(t, \cdot, y) \subseteq B_n(\rho + tM)$. Soit $\mathcal{R}(u^\varepsilon)$ la transformée de Radon de u^ε et \tilde{u}^ε définie par

$$\tilde{u}^\varepsilon(t, r, \omega, y) = \sqrt{\mathcal{K}_n} \mathcal{R} u^\varepsilon(t, r, \omega, y).$$

Alors \tilde{u}^ε est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u}^\varepsilon + a^\varepsilon(y, \omega) \partial_r \tilde{u}^\varepsilon &= 0, \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (y, \omega) \in \mathcal{O} \times S^{n-1}, \\ \tilde{u}^\varepsilon|_{t=0} &= \tilde{u}_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $a^\varepsilon(y, \omega) = \omega \cdot A^\varepsilon$. La suite (\tilde{u}^ε) étant uniformément bornée dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1} \times \mathcal{O}))$, alors, à l'extraction près d'une sous-suite encore notée (\tilde{u}^ε) ,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n \times \mathcal{O})) \text{ faible-}\star, \\ \tilde{u}^\varepsilon &\rightharpoonup \tilde{u} \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1} \times \mathcal{O}, dr d\omega dy)) \text{ faible-}\star. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De plus, $\tilde{u} = \sqrt{\mathcal{K}_n} \mathcal{R}(u)$. Par suite, les variables $(y, \omega) \in \mathcal{O} \times S^{n-1}$ étant transverses à la direction r , en procédant comme pour l'équation scalaire (3.1), il existe une famille de mesures positives $d\sigma_{y,\omega}(\lambda)$, associée à la suite $(a^\varepsilon(y, \omega))$, à support dans $\bar{\Lambda}$ et paramétrée par $(y, \omega) \in \mathcal{O} \times S^{n-1}$, tel que la limite \tilde{u} donnée par (4.3) est solution de

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u} + a(y, \omega) \partial_r \tilde{u} - \int_0^t \int_\Lambda \partial_r^2 \tilde{u}(s, r - \lambda(t-s), \omega, y) d\omega_{y,\omega}(\lambda) ds &= 0, \\ t > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (y, \omega) \in \mathcal{O} \times S^{n-1}, \\ \tilde{u}|_{t=0} &= \tilde{u}_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

La mesure $d\sigma_{y,\omega}(\cdot)$ est reliée à la mesure de Young $d\nu_y(\cdot)$, associée à la suite (A^ε) , par la relation

$$\langle d\sigma_{y,\omega}(\cdot), (z + \lambda)^{-1} \rangle = \langle d\nu_y(\cdot), z + \mu \cdot \omega \rangle - \{ \langle d\nu_y(\cdot), (z + \mu \cdot \omega)^{-1} \rangle \}^{-1}$$

pour tout $z \notin \Lambda$, pour tout $\omega \in S^{n-1}$ et p.p. en $y \in \mathcal{O}$. De plus, p.p. en $y \in \mathcal{O}$, l'application $\omega \in S^{n-1} \mapsto d\sigma_{y,\omega}(\cdot)$ est analytique de S^{n-1} dans l'espace des mesures de Radon sur \mathbb{R} .

On définit alors $d\Sigma(\cdot, \cdot)$ en posant, pour toute fonction f régulière définie sur $\Lambda \times S^{n-1}$,

$$\langle d\Sigma_y(\lambda, \cdot), f(\lambda, \cdot) \rangle \equiv \int_{S^{n-1}} \langle d\sigma_{y,\omega}(\lambda), f(\lambda, \omega) \rangle d\omega.$$

La formulation cinétique et les propriétés de la transformation de Radon permettent d'établir le résultat suivant (voir [10], [14]) :

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}))$ la limite faible-* de la suite (u^ε) des solutions de (4.1). Alors, à l'extraction près de sous suites, il existe une famille paramétrée de mesures positives $d\Sigma_y$, à support dans $\bar{\Lambda} \times S^{n-1}$, tel que u soit solution du système

$$\begin{aligned} \partial_t u + A(y) \cdot \nabla_x u - c_n \int_{\Lambda \times S^{n-1}} d\Sigma_y(\lambda, \omega) \partial_r (-\partial_r^2)^{n-1/4} w_*|_{r=x \cdot \omega} &= 0, \\ \partial_t w_* + \lambda \partial_r w_* - \partial_r (-\partial_r^2)^{n-1/4} \mathcal{R}(u) &= 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad w_*|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

5. Homogénéisation d'une équation de type hyperbolique-parabolique dégénéré

Soit Ω_x un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière $\partial\Omega_x$, $T > 0$, et $\Omega = \Omega_x \times \mathcal{O}$. Considérons l'équation dans $(0, T) \times \Omega$

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon(x) \partial_t^2 u^\varepsilon - \operatorname{div}_x(k^\varepsilon(x) \nabla_x u^\varepsilon) + \theta^\varepsilon(x, y) \partial_t u^\varepsilon &= f^\varepsilon(t, x, y), \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega_x} &= 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathcal{O}, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= \alpha \quad \text{dans } \Omega, \\ \sqrt{\rho^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} &= \beta \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

sous les hypothèses suivantes sur les données ρ^ε , k^ε , θ^ε , f^ε , α et β . Supposons $\rho^\varepsilon(x) = \rho(x, \frac{x}{\varepsilon})$ p.p. dans Ω_x où ρ est une fonction donnée dans $C(\bar{\Omega}_x; L_{per}^\infty(Y_n))$ vérifiant

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(x, \zeta) \leq \rho_+, \quad \forall x \in \Omega_x, \quad \text{p.p. en } \zeta \in Y_n, \\ \text{et telle que } \tilde{\rho}(x) = \int_{Y_n} \rho(x, \zeta) d\zeta \geq \rho_- > 0. \end{aligned}$$

On note ici Y_n (resp. Y_m) le cube unité de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^m). Le tenseur k^ε est symétrique et ses coefficients sont de la forme

$$k_{i,j}^\varepsilon(x) = k_{i,j}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{p.p. dans } \Omega_x, \quad i, j = 1 \text{ à } n,$$

où $k_{i,j} \in C(\bar{\Omega}_x; L_{per}^\infty(Y_n))$ et vérifie

$$k_- |\xi|^2 \leq k(x, \zeta) \xi \cdot \xi \leq k_+ |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega_x, \quad \text{p.p. en } \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

k_- and k_+ étant deux réels strictement positifs. Le coefficient d'amortissement θ^ε est donné par

$$\theta^\varepsilon(x, y) = \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}, y, \frac{y}{\varepsilon}\right) \text{ p.p. dans } \Omega$$

où $\theta \in C(\overline{\mathcal{O}}; L_{per}^\infty(Y_n \times Y_m))$ et

$$0 < \theta_- \leq \theta(\zeta, y, \eta) \leq \theta_+, \quad \forall y \in \mathcal{O}, \text{ p.p. en } (\zeta, \eta) \in Y_n \times Y_m.$$

Notons $\Lambda = (\theta_-, \theta_+)$. Le terme source f^ε est de la forme

$$f^\varepsilon(t, x, y) = c\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) f(t, x, y) \text{ p.p. dans } (0, T) \times \Omega,$$

avec

$$c \in L_{per}^\infty(Y_\varepsilon \times Y_m), f \in L^2((0, T) \times \Omega),$$

$$0 \leq c(\zeta, \eta) \leq c_+ \text{ p.p. en } (\zeta, \eta) \in Y_n \times Y_m,$$

et les données initiales sont telles que

$$\alpha \in L^2(\mathcal{O}; H_0^1(\Omega_x)), \quad \beta \in L^2(\Omega).$$

Notons que (5.1)₄ donne une condition sur $\partial_t u^\varepsilon|_{t=0}$ seulement sur l'ensemble où $\rho^\varepsilon(x) \neq 0$. Par suite, (5.1) est une équation de type hyperbolique-parabolique. Dans le cas où il n'y a pas de dépendance en la variable $y \in \mathcal{O}$, l'homogénéisation de (5.1) a été étudiée par A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou [27].

Ici, avec Hamid nous avons obtenu l'équation effective par un procédé d'homogénéisation itérée. Dans une première étape, on établit une équation décrivant un comportement asymptotique par rapport aux directions de non dégénérescence. On utilise pour cela la convergence à double échelle (voir G. Nguetseng [49], G. Allaire [4]). Notons $\tilde{k}(x)$ le tenseur homogénéisé associé à la suite $(k(x, \frac{x}{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$, et pour $y \in \mathcal{O}$ et $\eta \in Y_m$,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\eta) &= \int_{Y_\varepsilon} c(\zeta, \eta) d\zeta, \quad \tilde{\theta}(y, \eta) = \int_{Y_n} \theta(\zeta, y, \eta) d\zeta, \\ \chi(x) &= \int_{Y_n} \sqrt{\rho(x, \zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

On montre qu'il existe une unique fonction $U = U(t, x, y, \eta)$ dans l'espace $L^2((0, T) \times \mathcal{O} \times Y_m; H_0^1(\Omega_x))$ tel que (u^ε) converge, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers U , au sens de la convergence à double échelle. Pour presque tout $(y, \eta) \in \mathcal{O} \times Y_m$, la fonction $U(\cdot, \cdot, y, \eta)$ est la solution de l'équation

$$\tilde{\rho}(x) \partial_t^2 U - \operatorname{div}_x(\tilde{k}(x) \operatorname{grad}_x U) + \tilde{\theta}(y, \eta) \partial_t U = \tilde{c}(\eta) f(t, x, y),$$

pour $t \in (0, T)$, $x \in \Omega_x$, munie des conditions initiales

$$\begin{aligned} U|_{t=0} &= \alpha \text{ dans } \Omega_x, \\ \tilde{\rho}(x)\partial_t U|_{t=0} &= \chi(x)\beta \text{ dans } \Omega_x. \end{aligned}$$

La seconde étape consiste en la moyennisation par rapport à la variable η qui donne un système effectif vérifié par $u(t, x, y) = \int_{Y_m} U(t, x, y, \eta) d\eta$. Pour $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p) > 0$, posons $\Gamma_p = \{z \in \mathbb{C}; z/p \in \tilde{\Gamma}_p\}$ où $\tilde{\Gamma}_p$ est une courbe fermée contenue dans le demi-plan $\Re(z) > 0$ et contenant $\bar{\Lambda}$. Alors, en utilisant un théorème de représentation des fonctions holomorphes de type Nevanlinna-Pick (voir [1], [33]) on montre qu'il existe deux familles paramétrées de mesures positives $d\sigma_y^1$ et $d\sigma_y^2$ associées, respectivement, aux suites $(\tilde{\theta}(y, \frac{y}{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$ et $(c(y, \frac{y}{\varepsilon})\tilde{\theta}(y, \frac{y}{\varepsilon}))_{\varepsilon>0}$, à support inclus dans $\bar{\Lambda}$ et tel que, $\forall z \in \Gamma_p$, p.p. en $y \in \mathcal{O}$,

$$\int_{Y_m} (z - p\tilde{\theta}(y, \eta))^{-1} d\eta = \left(z - p\bar{\theta}(y) - p^2 \int_{\Lambda} (z - p\lambda)^{-1} d\sigma_y^1(\lambda) \right)^{-1},$$

$$\int_{Y_m} \tilde{c}(\eta)(z - p\tilde{\theta}(y, \eta))^{-1} d\eta = \bar{c} \left(z - p\bar{d}(y) - p^2 \int_{\Lambda} (z - p\lambda)^{-1} d\sigma_y^2(\lambda) \right)^{-1}.$$

Ici,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(y) &= \int_{Y_m} \tilde{\theta}(y, \eta) d\eta, \quad \bar{c}(y) = \int_{Y_m} \tilde{c}(\eta) d\eta, \\ \bar{d}(y) &= \frac{1}{\bar{c}(y)} \int_{Y_m} \tilde{c}(\eta)\tilde{\theta}(y, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Nous montrons ensuite [15] que la limite u d'une suite extraite de (u^ε) s'écrit $u = u_1 + u_2$ où u_1 et u_2 sont déterminées, respectivement, par le système (u_1 et w_1 étant les fonctions inconnues)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x)\partial_t^2 u_1 - \operatorname{div}_x(\tilde{k}(x)\operatorname{grad}_x u_1) + \bar{\theta}(y)\partial_t u_1 - \int_{\Lambda} \partial_t w_1 d\sigma_y^1(\lambda) &= 0, \\ \tilde{\rho}(x)\partial_t^2 w_1 - \operatorname{div}_x(\tilde{k}(x)\operatorname{grad}_x w_1) + \lambda\partial_t w_1 - \partial_t u_1 &= 0, \\ u_1|_{\partial\Omega_x \times \mathcal{O}} &= 0, \\ u_1|_{t=0} = \alpha, \quad \tilde{\rho}\partial_t u_1|_{t=0} &= \chi \cdot \beta, \\ w_1|_{t=0} = 0, \quad \partial_t w_1|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

et le système (u_2 et w_2 étant les fonctions inconnues)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x) \partial_t^2 u_2 - \operatorname{div}_x(\tilde{k}(x) \operatorname{grad}_x u_2) + \bar{d}(y) \partial_t u_2 - \int_{\Lambda} \partial_t w_2 d\sigma_y^2(\lambda) &= 0, \\ \tilde{\rho}(x) \partial_t^2 w_2 - \operatorname{div}_x(\tilde{k}(x) \operatorname{grad}_x w_2) + \lambda \partial_t w_2 - \partial_t u_2 &= \bar{c} f(t, x, y), \\ u_2 \Big|_{\partial\Omega_x \times \mathcal{O}} &= 0, \\ u_2 \Big|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t u_2 \Big|_{t=0} = 0, \\ w_2 \Big|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t w_2 \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

6. Homogénéisation d'une équation différentielle et application

6.1. Homogénéisation d'une équation de Riccati

Soit Ω un ensemble mesurable de \mathbb{R}^m , $T > 0$, $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ et (a_ε) une suite bornée de $L^\infty(\Omega_T)$ vérifiant $0 < \alpha \leq a_\varepsilon(t, x) \leq \beta$ p.p. dans Ω_T , convergeant vers a dans $L^\infty(\Omega_T)$ faible- \star . Considérons l'équation de Riccati

$$\partial_t u_\varepsilon + a_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon^2 = 0, \quad u_\varepsilon \Big|_{t=0} = u_0, \quad (6.1)$$

où u_0 est donnée dans $L^\infty(\Omega)$, vérifiant $0 < \alpha_0 \leq u_0(x) \leq \beta_0$ p.p. dans Ω .

L'homogénéisation de (6.1) est une première étape pour aborder l'étude de systèmes à nonlinéarité quadratique intervenant dans la modélisation de certains problèmes de la mécanique des fluides ou de la physique des plasmas, voir J.A. Krommes [43]. Dans [61], L. Tartar a considéré l'équation

$$\partial_t u_\varepsilon + a_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon^2 = f, \quad u_\varepsilon \Big|_{t=0} = 0,$$

sous l'hypothèse suivante d'oscillations de faible amplitude des coefficients a_ε :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(t, x) &= a(t, x) + \gamma b_\varepsilon(t, x), \quad 0 < \gamma \ll 1, \\ b_\varepsilon &\rightharpoonup 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible}^*. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Les développements asymptotiques formels de L. Tartar suggèrent qu'à l'ordre 2 en γ , les oscillations de la suite (a_ε) induisent des effets de mémoire non linéaires.

Ici on se propose d'analyser le comportement limite de la suite (u_ε) des solutions de (6.1). Notons $A_\varepsilon(t, x) = \int_0^t a_\varepsilon(s, x) ds$, $A(t, x) = \int_0^t a(s, x) ds$ et $d\nu_{t,x}^0$, $(t, x) \in \Omega_T$, la famille paramétrée des mesures de Young associée à la suite (A_ε) . Soit $d\sigma_{t,x}$, $(t, x) \in \Omega_T$, la famille paramétrée des mesures

positives à support (pour chaque $t \in (0, T)$) dans $[t\alpha, t\beta]$ et définies par la relation de moments

$$\left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), (z - \lambda)^{-1} \right\rangle = \left\langle d\nu_{t,x}^0(\mu), (z - \mu) \right\rangle - \left\langle d\nu_{t,x}^0(\mu), (z - \mu)^{-1} \right\rangle^{-1},$$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus [t\alpha, t\beta]$. La solution de (6.1) est donnée explicitement par

$$u_\varepsilon(t, x) = \left(1/v(x) + \int_0^t a_\varepsilon(s, x) ds \right)^{-1}.$$

En utilisant un théorème de représentation des fonctions holomorphes de type Nevanlinna-Pick (voir [1], [33]) on montre qu'il existe une suite extraite de (u_ε) qui converge dans $W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ faible- \star vers u donnée par

$$u(t, x) = \left(1/v(x) + A(t, x) - \left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), (1/v(x) + \lambda)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}. \quad (6.3)$$

En dérivant u par rapport à t , on vérifie que

$$\partial_t u + (a - \partial_t M(t, x)) u^2 = 0, \quad u(0, x) = v(x),$$

où $M(t, x) = \left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), (1/v(x) + \lambda)^{-1} \right\rangle$. Pour éliminer la dépendance par rapport à v du coefficient, on procède comme suit. On a

$$\frac{1}{v(x)} + A(t, x) = \left\langle d\nu_{t,x}(\mu), \frac{1}{\mu} \right\rangle,$$

d'où, en reportant dans (6.3),

$$\frac{1}{u(t, x)} = \left\langle d\nu_{t,x}(\mu), \frac{1}{\mu} \right\rangle - \left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), \left(\left\langle d\nu_{t,x}(\mu), \frac{1}{\mu} \right\rangle + \lambda - A(t, x) \right)^{-1} \right\rangle$$

où $d\nu_{t,x}$ est la famille paramétrée des mesures de Young associée à la suite (u_ε) . Notons, pour presque tout $(t, x) \in \Omega_T$, $\phi_{t,x}$ la fonction numérique définie pour $y \geq A(t, x)$ par

$$\phi_{t,x}(y) = y - \left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), (y + \lambda - A(t, x))^{-1} \right\rangle$$

et $A_{-1} = \left\langle d\nu_{t,x}^0(\mu), 1/\mu \right\rangle$. On vérifie que la fonction $\phi_{t,x}$ admet une fonction réciproque, notée $\phi_{t,x}^{-1}: [A_{-1}^{-1}, +\infty[\rightarrow [A, +\infty[$, et que

$$\left\langle d\nu_{t,x}(\mu), \frac{1}{\mu} \right\rangle = \phi_{t,x}^{-1} \left(\frac{1}{u(t, x)} \right),$$

$$M(t, x) = \left\langle d\sigma_{t,x}(\lambda), \frac{1}{\phi_{t,x}^{-1}(1/u(t, x)) + \lambda - A(t, x)} \right\rangle.$$

En dérivant cette dernière expression de M par rapport à t , on obtient $\partial_t M(t, x) = \Lambda_{t,x}(u(t, x))$ où $\Lambda_{t,x}$ est définie, pour presque tout $(t, x) \in \Omega_T$, par

$$\Lambda_{t,x}(y) = a(t, x) K(t, x, y)^2 + (1 + K(t, x, y)) \times \left(\langle \partial_t d\sigma_{t,x}(\lambda), H(t, x, y, \lambda) \rangle - \partial_t \phi_{t,x}^{-1}(1/y) K(t, x, y) \right) \quad (6.4)$$

avec

$$\begin{aligned} H(t, x, y, \lambda) &= \left(\phi_{t,x}^{-1}(1/y) + \lambda - A(t, x) \right)^{-1}, \\ K(t, x, y) &= \langle d\sigma_{t,x}(\lambda), H(t, x, y, \lambda)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

D'où le résultat :

La suite des solutions (u_ε) de (6.1) admet une sous suite, encore notée (u_ε) , qui converge dans $W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$ faible- \star vers une fonction u , unique solution de

$$\partial_t u + a(t, x) u^2 = \Lambda_{t,x}(u) u^2, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Ainsi l'homogénéisation de (6.1) induit un effet local en temps. Cet effet est explicité dans l'exemple 1 qui suit.

Exemple 1. Considérons une suite (a^ε) indépendante de t et périodique, $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ où a est 1-périodique prenant la valeur a_0 pour $0 < y < \theta$ et a_1 sur $\theta < y < 1$. Alors la mesure $d\sigma$ (indépendante de t et x) est donnée par $d\sigma(\lambda) = \tau_0 \delta_{\lambda=\lambda_*}$ avec $\tau_0 = \theta(1-\theta)(a_0 - a_1)^2$ et $\lambda_* = \theta a_1 + (1-\theta)a_0$. Dans ce cas, l'équation homogénéisée s'écrit

$$\partial_t u + a u^2 - \Lambda(t, u) u^2 = 0 \text{ dans } \Omega_T, \quad u|_{t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega$$

avec

$$\Lambda(z) = \frac{\tau_0}{G(z)} \left(2 - \frac{\lambda_*}{G(z)} \right)$$

où

$$G(z) = \frac{1}{2} \left(\lambda_* - \bar{a} + \frac{1}{z} + \left(\left(\lambda_* - \bar{a} + \frac{1}{z} \right)^2 + 4\tau_0 \right)^{1/2} \right)$$

et $\bar{a} = \theta a_0 + (1-\theta)a_1$.

Exemple 2. Considérons le cas (6.2) des oscillations de faible amplitude. On écrit la solution de (6.1) sous la forme $u_\varepsilon(t, x) = \sum_{k \geq 0} \gamma^k u_{\varepsilon,k}(t, x)$. On

note, pour tout $k \geq 0$, $u_{\infty,k}$ la limite faible de la suite $(u_{\varepsilon,k})$. On montre alors que $u_* = u_{\infty,0} + \gamma^2 u_{\infty,2}$ satisfait l'équation

$$\partial_t u_* + a(t, x) u_*^2 = \Lambda_{t,x}^{(\gamma)}(u_*) u_*^2 \text{ dans } \Omega_T, \quad u_*|_{t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega,$$

où

$$\Lambda_{t,x}^{(\gamma)}(u_*) = \gamma^2 \left(-a(t, x) u_*^2 \int_0^t \int_0^t B_2(s_1, s_2, x) ds_1 ds_2 + 2 u_* \int_0^t B_2(t, s_2, x) ds_2 \right) + O(\gamma^3).$$

La fonction B_2 est définie (comme la limite d'une suite extraite) par $b_\varepsilon(s_1, x) b_\varepsilon(s_2, x) \rightharpoonup B_2(s_1, s_2, x)$ dans $L^\infty((0, T) \times (0, T) \times \Omega)$ faible- \star . Nous observons ici aussi que l'homogénéisation de (6.1) induit un effet local en temps.

6.2. Comportement limite des solutions d'une équation hyperbolique semi-linéaire

Considérons l'équation hyperbolique semi-linéaire :

$$\partial_t u_\varepsilon + Q(x) \cdot \nabla u_\varepsilon + a(x) u_\varepsilon^2 = 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon(x), \quad (6.6)$$

où Q est un champ de vecteurs de $(C^1(\mathbb{R}^d))^d$ à divergence bornée, a et v_ε sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et vérifient

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta, \quad 0 < \alpha_0 \leq v_\varepsilon(x) \leq \beta_0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d,$$

et (v_ε) converge vers v dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ faible- \star . Notons $X(t; x, s)$ la courbe caractéristique définie, pour s donné dans $[0, T]$ et x dans \mathbb{R}^d , par le système différentiel

$$dX/dt = Q(X), \quad t \in (0, T), \quad X|_{t=s} = x.$$

Alors, la fonction définie par $w_\varepsilon(t, x) = u_\varepsilon(t, X(t; x, 0))$, p.p. dans $(0, T) \times \mathbb{R}^d$, est solution de l'équation de Riccati

$$\partial_t w_\varepsilon + a(X(t; x, 0)) w_\varepsilon^2 = 0, \quad w_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon(x).$$

L'étude du comportement limite de w_ε , par une technique analogue à celle du paragraphe 6.1, conduit au résultat suivant :

La suite (extraite) des solutions de (6.6) converge dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ faible- \star vers la fonction u , solution de l'équation

$$\partial_t u + Q(x) \cdot \nabla u + a(x) (1 + I(t, x)) u^2 = 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d,$$

munie de la condition initiale $u|_{t=0} = v(x)$. La fonction $I(t, x)$ est donnée par

$$I(t, x) = \frac{\left\langle d\sigma_{X(0;x,t)}(\lambda), \left(1 + \bar{A}(t, x) \lambda\right)^{-2} \right\rangle}{\left[v(X(0; x, t)) - \left\langle d\sigma_{X(0;x,t)}(\lambda), \bar{A}(t, x) \left(1 + \bar{A}(t, x) \lambda\right)^{-1} \right\rangle \right]^2}, \quad (6.7)$$

où $\bar{A}(t, x) = \int_0^t a(X(s; x, t)) ds$ et $d\sigma_x$ ($x \in \mathbb{R}^d$) désigne une famille paramétrée de mesures positives associées à la suite (v_ε) . Nous renvoyons à [18] et [20] pour les démonstrations détaillées.

Si la donnée initiale est de la forme $v^\varepsilon(x) = v(x, x/\varepsilon)$ où $v(x, \zeta)$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $v(x, \cdot)$ Y_d -périodique, Y_d étant le cube unité de \mathbb{R}^d , alors $v^\varepsilon \rightharpoonup \bar{v}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ weak- \star où $\bar{v}(x) = \int_{Y_d} v(x, \zeta) d\zeta$. D'après B. Engquist et T.Y. Hou [37], u^ε est de la forme $u^\varepsilon(t, x) = U(t, x, X(0, x, t)/\varepsilon)$ où $U(t, x, \zeta)$ est définie dans $(0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, comme la solution de

$$\partial_t U + Q(x) \cdot \nabla_x U + a(x) U^2 = 0, \quad u|_{t=0} = v(x, \zeta), \quad (x, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times Y_d.$$

L'analyse développée ci-dessus permet de compléter le résultat de B. Engquist et T.Y. Hou [37]. La fonction $\bar{u}(t, x) = \int_{Y_d} U(t, x, \zeta) d\zeta$ est solution de l'équation homogénéisée

$$\partial_t \bar{u} + Q(x) \cdot \nabla \bar{u} + a(x) (1 + I(t, x)) \bar{u}^2 = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d,$$

munie de la condition initiale $\bar{u}|_{t=0} = \bar{v}(x)$, $I(t, x)$ étant donné par (6.7).

Avec Hamid, nous avons également étudié l'homogénéisation de l'équation hyperbolique semi-linéaire avec un coefficient oscillant. Nous donnons ici deux exemples typiques.

Exemple 1. Considérons l'équation hyperbolique semi-linéaire :

$$\partial_t u^\varepsilon + Q(x) \cdot \nabla u^\varepsilon + a^\varepsilon(x) (u^\varepsilon)^2 = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = v(x),$$

où, comme ci-dessus, Q est un champ de vecteurs de $(C^1(\mathbb{R}^d))^d$ à divergence bornée et $v \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Supposons que

$$0 < \alpha \leq a^\varepsilon(x) \leq \beta, \quad 0 < \alpha_0 \leq v(x) \leq \beta_0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^d$$

et que le champ Q vérifie la condition d'ergodicité :

$$\text{meas} \{x \in \mathbb{R}^d; \exists p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, Q(x) \cdot p = 0\} = 0.$$

On suppose que $a^\varepsilon(x) = a(x, x/\varepsilon)$ où la fonction $a(x, \zeta)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et $a(x, \cdot)$ Y_d -périodique. Alors, en utilisant les mesures de Young modulées, voir Weinan E [35], et la méthode de R.J. Diperna [31] pour établir la convergence forte de la méthode de viscosité pour les lois de conservations scalaires, on montre que (u^ε) converge dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ vers la solution unique u de l'équation

$$\partial_t u + Q(x) \cdot \nabla u + \bar{a}(x) u^2 = 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \quad u|_{t=0} = v(x),$$

où $\bar{a}(x) = \int_{Y_d} a(x, \zeta) d\zeta$.

Exemple 2. Considérons maintenant un champ Q régulier, dépendant d'une variable supplémentaire $y \in \mathbb{R}^{d'}$ et vérifiant la condition

$$\text{meas} \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} ; \exists p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, Q(x, y) \cdot p = 0\} = 0.$$

On considère l'équation de transport dégénérée :

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + Q(x, y) \cdot \nabla_x u^\varepsilon + a^\varepsilon(x, y) (u^\varepsilon)^2 &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= v(x, y). \end{aligned}$$

On suppose que $a^\varepsilon(x, y) = a(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ où $a(\zeta, \eta)$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^{d+d'}$ et $Y_d \times Y_{d'}$ -périodique, et v est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$, avec les estimations uniformes

$$0 < \alpha \leq a^\varepsilon(x, y) \leq \beta, \quad 0 < \alpha_0 \leq v(x, y) \leq \beta_0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}.$$

On pose $\tilde{a}(\eta) = \int_{Y_d} a(\zeta, \eta) d\zeta$ et $\bar{a} = \int_{Y_{d'}} \tilde{a}(\eta) d\eta$. Alors, en utilisant les mesures de Young modulées et en adaptant la méthode décrite au paragraphe 6.1, on montre le résultat suivant :

La suite (extraite) des solutions (u_ε) converge dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ vers u , solution de l'équation homogénéisée

$$\partial_t u + Q(x, y) \cdot \nabla_x u + (\bar{a} - \Lambda(tu)) u^2 = 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'},$$

munie de la condition initiale $u|_{t=0} = v(x, y)$, où Λ est une fonction (indépendante de t et x) définie par une formule analogue à (6.4), (6.5).

7. Autres résultats d'homogénéisation non locale

Hamid a étudié d'autres problèmes d'homogénéisation faisant apparaître à la limite des opérateurs non locaux. Citons :

– L'étude du comportement limite d'une famille paramétrée de systèmes

de transport symétriques et la propagation d'oscillations des données initiales ; application au système de Maxwell en électromagnétisme [14].

– l'interaction d'oscillations dans une équation de transport à coefficients discontinus [16].

– L'étude du comportement limite de certains modèles de convection-diffusion à coefficients périodiques [9], [6], [13]. Plusieurs motivations physiques pour ces travaux sont dans les articles de R. Smith (voir par exemple [58], [59]) et G.I. Taylor (voir par exemple [63], [64]).

8. Écoulements miscibles et incompressibles en milieu poreux

Hamid a considéré le système (1.9), dans le cas $N = 2$, posé dans un domaine $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) de frontière régulière Γ . Le système est muni des conditions initiales et aux limites

$$u \cdot \nu |_{\Gamma_T} = 0, D\nabla c \cdot \nu |_{\Gamma_T} = 0, c |_{t=0} = c^0, \quad (8.1)$$

où $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ et ν est la normale unitaire extérieure. Ici c est la concentration de l'un des deux constituants et c^0 sa concentration initiale. Hamid, en collaboration avec Y. Amirat, a étudié le comportement limite de la pression et de la concentration, lorsque le coefficient de diffusion moléculaire $d_m \rightarrow 0$. Ce-ci correspond à des vitesses d'écoulement relativement élevées (grands nombres de Péclet) où les effets de la dispersion mécanique sont beaucoup plus importants que ceux de la diffusion moléculaire (voir J. Bear [26]). Notons $d_m = \varepsilon$ et supposons $0 < \varepsilon \ll 1$ et $d_l \geq d_t > 0$.

On fait les hypothèses suivantes. Le domaine Ω est simplement connexe et sa frontière Γ de classe $C^{1,1}$; $c^0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leq c^0(x) \leq 1$ p.p. dans Ω ; $c^* \in L^\infty(\Omega_T)$, $0 \leq c^*(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T ; $q^+, q^- \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\int_\Omega (q^+ - q^-) dx = 0$; la fonction μ est telle que μ et $1/\mu$ sont strictement convexes, $\mu \in C^2[0, 1]$, $0 < \mu_- \leq \mu(c) \leq \mu^+$, $\forall c \in (0, 1)$. Les fonctions ϕ et k sont dans $L^\infty(\Omega)$ et $W^{1,\infty}(\Omega)$ respectivement et vérifient

$$0 < \phi_* \leq \phi(x) \leq \phi_*^{-1}, \quad 0 < k_* \leq k(x) \leq k_*^{-1} \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (8.2)$$

Alors pour chaque ε fixé, il existe $(p^\varepsilon, c^\varepsilon)$, p^ε dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et c^ε dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, vérifiant

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u^\varepsilon &= q^+ - q^-, \quad u^\varepsilon = -\frac{k}{\mu(c^\varepsilon)} \nabla p^\varepsilon, \\ u^\varepsilon \cdot \nu |_{\Gamma_T} &= 0, \quad \int_{\Omega} p^\varepsilon dx = 0, \\ \phi \partial_t c^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon + c^\varepsilon q^+ - \nabla \cdot (D \nabla c^\varepsilon) &= c^* q^+, \\ D \nabla c^\varepsilon \cdot \nu |_{\Gamma_T} &= 0, \quad c |_{t=0} = c^0. \end{aligned}$$

De plus, $0 \leq c^\varepsilon(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T .

Hamid, en collaboration avec Y. Amirat, a montré qu'il existe des suites extraites de (p^ε) , (u^ε) et (c^ε) (encore notées (p^ε) , (u^ε) et (c^ε)) et des fonctions p , u , et c tel que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} p^\varepsilon &\rightarrow p \text{ fortement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ u^\varepsilon &\rightarrow u \text{ fortement dans } (L^4(\Omega_T))^d, \\ c^\varepsilon &\rightharpoonup c \text{ dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible-}\star, \\ c^\varepsilon u^\varepsilon &\rightarrow c u \text{ fortement dans } (L^2(\Omega_T))^d, \end{aligned}$$

et le couple (p, c) est une solution faible du problème limite suivant, constitué d'une équation elliptique couplée avec une équation de diffusion convection dégénérée,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= q^+ - q^-, \quad u = -\frac{k}{\mu(c)} \nabla p, \\ u \cdot \nu |_{\Gamma_T} &= 0, \quad \int_{\Omega} p dx = 0, \\ \phi \partial_t c + u \cdot \nabla c + c q^+ - \nabla \cdot (D^\circ \nabla c) &= c^* q^+, \\ D^\circ \nabla c \cdot \nu |_{\Gamma_T} &= 0, \quad c |_{t=0} = c^0, \end{aligned}$$

où $D^\circ = |u|(d_l E(u) + d_t(I - E(u)))$. De plus, $0 \leq c(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T . Le résultat est obtenu à l'aide des techniques de compacité par compensation (voir [23]).

9. Écoulements miscibles et compressibles en milieu poreux

9.1. Un résultat d'existence locale et d'unicité de solutions classiques pour un système parabolique-hyperbolique

Hamid a étudié le système (1.8) sans terme de diffusion moléculaire ni de dispersion. Le système couple une équation parabolique et un système hyperbolique $(N - 1) \times (N - 1)$ semi-linéaire du 1er ordre

$$\begin{aligned} \phi \left(\sum_{i=1}^{i=N} z_i c_i \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u &= q^+ - q^-, \quad u = -\frac{k}{\mu(c_1, c_1, \dots, c_{N-1})} \nabla p, \\ \phi \frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i u) + \phi z_i c_i \frac{\partial p}{\partial t} + q^- c_i &= c_i^* q^+, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Compte tenu de (1.7), le domaine admissible pour $c = (c_1, c_2, \dots, c_{N-1})$ est

$$\mathcal{K} = \left\{ c = (c_1, c_2, \dots, c_{N-1}); \sum_{i=1}^{N-1} c_i \leq 1, c_i \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N-1 \right\}.$$

On suppose que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$, autrement l'ordre du système hyperbolique peut être réduit. Le système (9.1) est posé dans $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) de frontière régulière Γ , et muni des conditions initiales et aux limites

$$u \cdot \nu |_{\Gamma_T} = 0, \quad p |_{t=0} = p_0, \quad c |_{t=0} = c^0, \quad (9.2)$$

où $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$, ν est la normale unitaire extérieure, et p_0 et c^0 sont la pression initiale et le vecteur des concentrations initiales. On note pour m et l entiers positifs et $0 < \alpha, \beta < 1$, par $C^{l+\alpha, m+\beta}(\overline{\Omega}_T)$ l'espace de Hölder défini par

$$\begin{aligned} C^{l+\alpha, m+\beta}(\overline{\Omega}_T) &= \{u \in C^0(\overline{\Omega}_T); D_x^\gamma u, \partial_t^k u \in C^0(\overline{\Omega}_T), \\ &\text{pour } |\gamma| \leq l, 1 \leq k \leq m, \text{ et } \|u\|_{l+\alpha, m+\beta} < \infty\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \|u\|_{l+\alpha, m+\beta} &= \sum_{|\gamma| \leq l} \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |D_x^\gamma u(x,t)| + \sum_{|\gamma|=l} H_x^\alpha(D_x^\gamma u) + \sum_{|\gamma|=l} H_t^\beta(D_x^\gamma u) \\ &+ \sum_{k=1}^m \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega}_T} |\partial_t^k u(x,t)| + H_x^\alpha(\partial_t^m u) + H_t^\beta(\partial_t^m u), \end{aligned}$$

$$H_x^\alpha(u) = \sup_{\substack{x,y \in \Omega, x \neq y \\ t \in (0,T)}} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$H_t^\beta(u) = \sup_{\substack{t,\tau \in (0,T), t \neq \tau \\ x \in \Omega}} \frac{|u(x,t) - u(x,\tau)|}{|t-\tau|^\beta},$$

avec la modification évidente lorsque $m = 0$. On note, pour tout réel $0 < \delta < 1$,

$$\mathcal{K}_\delta = \left\{ c = (c_1, c_2, \dots, c_{N-1}); \sum_{i=1}^{N-1} c_i \leq 1 - \delta, c_i \geq \delta \text{ pour } 1 \leq i \leq N - 1 \right\}.$$

Les hypothèses sont les suivantes. L'ouvert Ω est borné, simplement connexe et sa frontière Γ est de classe $C^{2+\alpha}$; la fonction μ est dans $C^\infty(\mathcal{K})$ et vérifie $0 < \mu_- \leq \mu(c) \leq \mu^+$, $\forall c \in \mathcal{K}$; les fonctions q^+ , q^- , c_i^* sont dans $C^{1+\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ ($1 \leq i \leq N - 1$); p_0 est dans $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ et vérifie la condition de compatibilité $\frac{\partial p_0}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = 0$; la fonction c^0 est dans $(C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}))^{N-1}$, et il existe $0 < \delta_0 < 1$ tel que $c^0 \in \mathcal{K}_{\delta_0}$.

Sous ces hypothèses, Hamid, en collaboration avec Y. Amirat (voir [22], [24]) a établi le résultat suivant :

Il existe un temps $T > 0$ tel que le problème (9.1), (9.2) admet une solution classique et une seule (p, c) , avec

$$p \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T), c \in \mathcal{K}_\delta \cap (C^{1+\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_T) \cap C^{\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T))^{N-1}.$$

9.2. Existence globale de solutions faibles du système (1.8)

Hamid, en collaboration avec Y. Amirat et K. Hamdache (voir [17], [19]) a obtenu des résultats d'existence globale sous l'hypothèse que la viscosité μ du mélange est constante. On suppose que l'ouvert Ω est simplement connexe, $N = 2$, $p_0 \in H^1(\Omega)$ et $c^0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq c^0(x) \leq 1$ p.p. dans Ω , et les fonctions ϕ et k sont dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifient (8.2). Alors :

(i) Si $d_m > 0$ et $d_l \geq d_t > 0$, le système (1.8), muni des conditions aux limites et initiales

$$p|_{t=0} = p_0, c|_{t=0} = c^0, u \cdot \nu|_{\Gamma_T} = 0, D\nabla c \cdot \nu|_{\Gamma_T} = 0,$$

admet une solution faible (p, c) , $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et c dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ vérifiant $0 \leq c(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T .

(ii) Si $d_m = d_l = d_t = 0$, le système (1.8) muni des conditions aux limites et initiales

$$p|_{t=0} = p_0, \quad c|_{t=0} = c^0, \quad u \cdot \nu|_{\Gamma_T} = 0,$$

admet une solution faible (p, c) , $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et c dans $L^\infty(\Omega_T)$ vérifiant $0 \leq c(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T .

Ces résultats sont obtenus en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et des arguments de compacité par compensation.

9.3. Existence globale de solutions faibles pour un système 1-D, avec un terme de dispersion et sans terme de diffusion moléculaire

Considérons le modèle 1-D dans $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ avec $\Omega = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} a(c) \partial_t p + \partial_x u &= 0, \quad u = -\frac{1}{\mu(c)} \partial_x p, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad p(x, 0) = p_0(x), \\ \partial_t c + u \partial_x c + b(c) \partial_t p - \partial_x ((d_m + d_p |u|) \partial_x c) &= 0, \\ (d_m + d_p |u|) \partial_x c(y, t) &= 0 \quad (y = 0, 1), \quad c(x, 0) = c_0(x), \end{aligned} \tag{9.3}$$

où $a(c) = z_2 + (z_1 - z_2)c$ et $b(c) = (z_1 - z_2)c(1 - c)$. Supposons : $d_m > 0$ et $d_p > 0$; $p_0 \in H^1(\Omega)$; $c^0 \in H^1(\Omega)$, $0 \leq c^0(x) \leq 1$ p.p. dans Ω .

Hamid, en collaboration avec Y. Amirat, a montré qu'il existe une solution faible globale (p, c) du problème (9.3), avec p dans $L^\infty(0, T; W^{1,1}(\Omega)) \cap W^{1,\theta}(\Omega_T)$, avec $1 < \theta < 2$, et c dans $L^\infty(\Omega_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ vérifiant $0 \leq c(x, t) \leq 1$ p.p. dans Ω_T . Le résultat est obtenu en utilisant une approximation "semi-Galerkin", la technique des solutions renormalisées d'équations paraboliques, et des arguments de compacité par compensation (voir [21]).

Le cas $d_m = 0$ est étudié dans [25]. Des questions d'homogénéisation sont considérées dans [8], [11].

Références

- [1] N. I. AHEIZER & M. KREIN – *Some questions in the theory of moments*, translated by W. Fleming and D. Prill. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 2, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

- [2] R. ALEXANDRE – « Some results in homogenization tacking memory effects », *Asymp. Anal.* **Vol. 15** (1997), p. 229–259.
- [3] ———, « Asymptotic behavior of transport equations », *Appl. Anal.* **Vol. 70, 3-4** (1999), p. 405–430.
- [4] G. ALLAIRE – « Homogenization and two-scale convergence », *SIAM J. Math. Anal.* **23(6)** (1992), p. 1482–1518.
- [5] Y. AMIRAT, K. HAMDACHE & A. ZIANI – « Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre – Application aux milieux poreux », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **6, no. 5** (1989), p. 397–417.
- [6] ———, « Comportement limite de modèles d'équations de convection-diffusion dégénérées », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **310, no. 11** (1990), p. 765–768.
- [7] ———, « Étude d'une équation de transport à mémoire », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311, no. 11** (1990), p. 685–688.
- [8] ———, « Homogénéisation d'un modèle d'écoulements miscibles en milieu poreux », *Asymptotic Analysis* **3** (1990), p. 77–89.
- [9] ———, « Homogénéisation non locale pour des équations dégénérées à coefficients périodiques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312, no. 13** (1991), p. 963–966.
- [10] ———, « Homogénéisation par décomposition en fréquences d'une équation de transport dans \mathbb{R}^n », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312, no. 1** (1991), p. 37–40.
- [11] ———, « Homogenization of a model of compressible miscible flow in porous media », *Boll. U.M.I.* **7 (5-B)** (1991), p. 463–487.
- [12] ———, « Kinetic formulation for a transport equation with memory », *Comm. in P.D.E.* **16 (8 & 9)** (1991), p. 1287–13311.
- [13] ———, « Some results on homogenization of convection-diffusion equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **114, no. 2** (1991), p. 155–178.
- [14] ———, « Homogenization of parametrized families of hyperbolic problems », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **120 A** (1992), p. 199–221.
- [15] ———, « Homogenization of degenerate wave equations with periodic coefficients », *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **24, no. 5** (1993), p. 1226–1253.

- [16] ———, « Remarques sur l'interaction d'oscillations dans une équation de transport », Tech. report, Rapport de recherche, Équipe d'Analyse Numérique Lyon Saint-Étienne, 1993.
- [17] ———, « Existence globale de solutions faibles pour un système parabolique-hyperbolique intervenant en dynamique des milieux poreux », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321**, no. 2 (1995), p. 253–258.
- [18] ———, « On homogenization of ordinary differential equations and linear transport equations », in *Homogénéisation et Méthodes de Convergence en Calcul des Variations*, Ed. G. Bouchitte, G. Buttazzo, and P. Suquet, Advances in Math. for Applied Sciences, vol. 18s, World Scientific-Singapore, 1995, p. 29–50.
- [19] ———, « Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media », *M³AS* **6**, no. 6 (1996), p. 729–747.
- [20] ———, « On homogenisation of a Riccati equation », Tech. report, Rapport interne, CMAP, École Polytechnique, 1999.
- [21] Y. AMIRAT & A. ZIANI – « Global weak solutions to a parabolic system modeling a one-dimensional compressible miscible flow in porous media », *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **220** (1998), p. 697–718.
- [22] ———, « Classical solutions of a parabolic-hyperbolic system modelling a three-dimensional compressible miscible flow in porous media », *Applicable Analysis* **72** (1–2) (1999), p. 155–168.
- [23] ———, « Asymptotic behavior of the solutions of an elliptic-parabolic system arising in flow in porous media », *Z. Anal. Anwend.* **23**, no. 2 (2004), p. 335–351.
- [24] ———, « Classical solutions for a multicomponent flow model in porous media », *Differential and Integral Equations* **17**, no. 7-8 (2004), p. 893–920.
- [25] ———, « Global weak solutions for a nonlinear degenerate parabolic system modelling a one-dimensional compressible miscible flow in porous media », *Boll. U.M.I.* **8** (7-B) (2004), p. 109–128.
- [26] J. BEAR – *Dynamics of fluids in porous media*, Elsevier, 1972.
- [27] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS & G. C. PAPANICOLAOU – *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, 1978.
- [28] E. BONNETIER & C. CONCA – « Approximation of Young measures by functions and an application to an optimal design problem for

- plates with variable thickness », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **124 A**, no. 3 (1994), p. 399–422.
- [29] M. BRIANE – « Nonlocal effects in two-dimensional conductivity », *Arch. Rat. Mech. Anal.* **182(2)** (2006), p. 255–267.
- [30] G. CHAVENT & J. JAFFRÉ – *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*, North-Holland, 1986.
- [31] R. J. DiPERNA – « Measure-valued solutions to conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **88(3)** (1985), p. 223–270.
- [32] R. J. DiPERNA & A. J. MAJDA – « Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations », *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), p. 667–689.
- [33] W. F. DONOGHUE – *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
- [34] J. DOUGLAS & J. E. ROBERTS – « Numerical methods for a model of compressible miscible displacement in porous media », *Math. Comput.* **41** (1983), p. 441–459.
- [35] W. E – « Homogenization of linear and nonlinear transport equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), no. 3, p. 301–326.
- [36] H. I. ENE, M. L. MASCARENHAS & J. SAINT JEAN PAULIN – « Fading memory effects in elastic-viscoelastic composites », *M²AN* **31(7)** (1997), p. 927–952.
- [37] B. ENGQUIST & T. Y. HOU – « Particle method approximation of oscillatory solutions to hyperbolic differential equations », *SIAM J. Numer. Anal.* **26(2)** (1989), p. 289–319.
- [38] P. FABRIE & M. LANGLAIS – « Mathematical analysis of miscible displacement in porous media », *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **23** (1992), p. 1375–1392.
- [39] X. FENG – « On existence and uniqueness results for a coupled system modeling miscible displacement in porous media », *J. Math. Anal. Appl.* **194** (1995), p. 883–910.
- [40] I. M. GEL'FAND, M. I. GRAEV & N. Y. VILENKIN – *Generalized functions* **5**, Academic Press, 1966.
- [41] S. HELGASON – *The Radon transform*, Progress in Mathematics, vol. 5, Birkhäuser Boston, Mass., 1980.
- [42] Ē. Y. HRUSLOV – « Homogenized models of composite media », in *Composite media and homogenization theory (Trieste, 1990)*, Progr.

- Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 5, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, p. 159–182.
- [43] J. A. KROMMES – *Statistical descriptions and plasmas physics*, Handbook of Plasmas Physics 2, eds A.A. Galeev and R.N. Sudan, North Holland, 1984.
- [44] J. L. LIONS – « Homogénéisation non locale », in *Proceeding of the international meeting on recent methods in nonlinear analysis*, eds E. De Giorgi, E. Magenes and U. Mosco, Bologna : Pitagora Editrice, 1979, p. 189–203.
- [45] V. A. MARČENKO & E. JA.HRUSLOV – *Boundary value-problems in domains with a fine-grained boundary*, Naukova Dumka, Kiev, 1974.
- [46] L. MASCARENHAS – « A linear homogenization problem with time dependent coefficient », *Trans. Am. Math. Soc.* **281**, **1** (1984), p. 179–195.
- [47] A. MIKELIC – « Mathematical theory of stationary miscible filtration », *J. Differential Equations* **90** (1991), p. 186–202.
- [48] F. MURAT & L. TARTAR – « H -convergence », in *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, p. 21–43.
- [49] G. NGUETSENG – « A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization », *SIAM J. Math. Anal.* **20**(3) (1989), p. 608–623.
- [50] A. PAZY – *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [51] D. W. PEACEMAN – *Fundamentals of numerical reservoir simulation*, Elsevier, 1977.
- [52] M. RENARDY, J. A. HRUSA & W. J. NOHEL – *Mathematical problems in viscoelasticity*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **35**, Longman, 1987.
- [53] E. SANCHEZ-PALENCIA – « Méthodes d’homogénéisation pour l’étude de matériaux hétérogènes : phénomène de mémoire », *Rend. Sem. Mat. Torino* **36** (1978), p. 15–25.
- [54] ———, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, 1980.

- [55] M. I. SHVIDLER – « Dispersion of a filtration stream in a medium with random inhomogeneities », *Sov. Phys. Dokl.* **20(3)** (1975), p. 171–173.
- [56] ———, « Dispersion of a filtration flow », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. i Gaza* **4** (1976), p. 65–69.
- [57] ———, « Conditional conditional averaging of the equations of flow in random composite porous media », *Transl. Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. i Gaza* **1** (1987), p. 75–81.
- [58] R. SMITH – « A delay-diffusion description for contaminant dispersion », *J. Fluid Mech.* **105**, **9** (1981), p. 469–486.
- [59] ———, « Longitudinal dispersion coefficients for varying channels », *J. Fluid Mech.* **130** (1983), p. 299–314.
- [60] L. TARTAR – « Remarks on homogenization », in *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 1, Springer, New York, 1986, p. 228–246.
- [61] ———, « Memory effects and homogenization », *Arch. Rat. Mech. Anal.* **111**, **No. 2** (1990), p. 121–133.
- [62] L. TARTAR – « Nonlocal effects induced by homogenization », in *Partial differential equations and the calculus of variations, Vol. II*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 2, Birkhäuser Boston, 1989, p. 925–938.
- [63] G. I. TAYLOR – « Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube », *Proceedings of the Royal Society of London A* **219** (1953), p. 186–203.
- [64] ———, « The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe », *Proceedings of the Royal Society of London A* **223** (1954), p. 446–468.

YOUCEF AMIRAT
 Laboratoire de Mathématiques
 UMR 6620 CNRS Université Blaise
 Pascal
 63177 Aubière cedex
 France
 Youcef.Amirat@math.univ-bpclermont.fr

KAMEL HAMDACHE
 Centre de Mathématiques Appliquées
 CNRS UMR 7641 Ecole Polytechnique
 91128 Palaiseau cedex
 France
 hamdache@cmapx.polytechnique.fr