

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

TOUSSAINT JOSEPH RABEHERIMANANA

**Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré
pour les processus de diffusions avec réflexion**

Volume 14, n° 1 (2007), p. 61-76.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2007__14_1_61_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions avec réflexion

TOUSSAINT JOSEPH RABEHERIMANANA

Résumé

Dans cet article, nous démontrons une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les diffusions avec réflexion à la frontière d'un ouvert régulier D_0 de \mathbb{R}^n semblable à la loi de Strassen [5] pour le brownien et de Baldi [2] pour les diffusions en utilisant la technique de grandes déviations.

Diffusion process with reflecting boundary

Abstract

Let D_0 a regular open set in \mathbb{R}^n . We prove in this paper a functional iterated logarithm law for D_0 -valued diffusion process with reflecting boundary conditions, extending the results of Strassen [5] and Baldi [2] when $\partial D_0 = \emptyset$, using large deviations principle.

1. Introduction

Dans cet article nous étendons, dans le cas des processus de diffusions avec réflexion, les résultats de Strassen [5] pour le brownien et de Baldi [2] pour les diffusions concernant une loi fonctionnelle du logarithme itéré. Plus précisément, nous déterminons l'ensemble-limite, pour $u \rightarrow +\infty$ de la famille $\{z_u\}$ où

$$dz_u(t) = \tilde{b}^u(z_u(t))dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}} \tilde{\sigma}^u(z_u(t))dB_t^{(u)} + \gamma(z_u(t))1_{\partial D_0}(z_u(t))dA_t^{u,x};$$
$$A_0^{u,x} = 0, z_u(0) = x \in D_0,$$

Mots-clés : Grandes déviations, diffusions avec réflexion, loi fonctionnelle du logarithme itéré.

Classification math. : 60F17 (60F10).

D_0 ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $(\gamma(x), x \in \partial D_0)$ un champ de vecteurs non tangents sur ∂D_0 , frontière de D_0 , $A_t^{u,x}$ un processus croissant continu, ne croissant que sur $\{s; z_u(s) \in \partial \bar{D}_0\}$ et vérifiant

$$A_t^{u,x} = \int_0^t 1_{\partial D_0}(z_u(s)) \gamma(z_u(s)) dA_s^{u,x}.$$

Comme dans [3] et [5], notre résultat est démontré essentiellement en utilisant les résultats de grandes déviations pour les processus de réflexion (c.f [1] et [4]). Notre méthode consiste à étendre les résultats de Baldi [2] pour un certain processus non restreint dont les coefficients sont des fonctionnelles non anticipatives. Et par la continuité de (Γ, Ξ) (voir définition (2.4)), nous en déduisons notre résultat pour le demi-espace. Le résultat pour un ouvert plus général s'obtient par localisation et recollement (c.f Anderson & Orey [1] et Doss & Priouret [4]).

Dans la section 2, nous rappelons les résultats de grandes déviations d'Anderson & Orey [1] et Doss & Priouret [4] pour les diffusions avec réflexion. Ces résultats sont utilisés dans la section 3 pour démontrer notre résultat principal, théorème 3.7.

Remerciements : *Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance au referee*

2. Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion à la frontière

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de grandes déviations pour les systèmes dynamiques avec réflexion (c.f. Anderson & Orey [1] et Doss & Priouret [4])

Soient D_0 un ouvert de \mathbb{R}^n et $(\gamma(x), x \in \partial D_0)$ un champ de vecteurs non tangents sur ∂D_0 , frontière de D_0 . On considère la solution $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$ de l'équation :

$$X_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds + \int_0^t 1_{\partial D_0}(X_s^\varepsilon) \gamma(X_s^\varepsilon) dA_s^\varepsilon \quad (2.1)$$

avec $X_t^\varepsilon \in D$ fermeture de D_0 , A_t^ε un processus croissant continu ne croissant que sur $\{s, A_s^\varepsilon \in \partial D_0\}$ et $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien

issu de 0 à valeurs dans \mathbb{R}^d , défini sur $(\Omega, F, (F_t)_{t \in [0,1]}, P)$.

Nous supposons que les applications qui à

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sigma_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d \text{ et} \\ x \in \mathbb{R}^n \rightarrow b_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2)$$

sont lipschitziennes et bornées et que b_ε (resp. σ_ε) converge uniformément vers b (resp. σ) lorsque ε tend vers 0.

2.1. Cas du demi-espace $\mathbb{R}^{n,+}$

Dans ce paragraphe, on prend pour D_0

$$\mathbb{R}^{n,+} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^n, x = (x^1, \dots, x^n) \text{ avec } x^1 > 0 \right\}$$

On considère la solution $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$ de l'équation

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon &= x + \varepsilon \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(X_s^\varepsilon) ds + e_1 \cdot A_t^\varepsilon; \\ (X_t^\varepsilon)^1 &\geq 0, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

et A_t^ε un processus croissant continu vérifiant $A_t^\varepsilon = \int_0^t 1_{(x^1=0)}(X_s^\varepsilon) dA_s^\varepsilon$

Sous les conditions (2.2), la solution $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$ de (2.3) existe et est unique. Suivant les idées d'Anderson & Orey [1], on a

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon &= \Gamma Y_t^\varepsilon \text{ et } A_t^\varepsilon = \Xi Y_t^\varepsilon, \text{ où } \Gamma \text{ et } \Xi \text{ sont définies par les formules} \\ &\text{pour chaque } \omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) \in C([0, 1], \mathbb{R}^n) \\ \Xi \omega &= \varpi^1, \Gamma \omega = (\omega^1 + \varpi^1, \omega^2, \dots, \omega^n) \text{ où } \varpi^1(t) = - \inf_{s \leq t} (\omega^1(s) \wedge 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

et Y_t^ε est solution d'un certain processus non restreint,

$$Y_t^\varepsilon = x + \varepsilon \int_0^t \sigma_{\varepsilon,s} \circ Y^\varepsilon dB_s + \int_0^t b_{\varepsilon,s} \circ Y^\varepsilon ds \quad (2.5)$$

Les entrées $\sigma_{\varepsilon,s}$ et σ_ε (resp. b_ε et $b_{\varepsilon,s}$) sont reliées par les formules

$$\sigma_{\varepsilon,s} \circ Y = \sigma_\varepsilon(\Gamma_s Y) \text{ (resp. } b_{\varepsilon,s} \circ Y = b_\varepsilon(\Gamma_s Y))$$

De plus, on a $\|\Gamma\eta - \Gamma\theta\| \leq 2 \cdot \|\eta - \theta\|$

Notons H^1 l'espace des fonctions absolument continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^d avec une dérivée de carrée sommable. C'est un espace d'Hilbert muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 \dot{f}_s \cdot \dot{g}_s ds$ Définissons une application

$$\begin{aligned} S_x : H^1 &: \rightarrow C_x([0, 1], \mathbb{R}^n) \\ f &\rightarrow g = S_x(f) \end{aligned}$$

$g = S_x(f)$ si, et seulement si, g est solution de:

$$g_t = x + \int_0^t \sigma_s \circ g \dot{f}_s ds + \int_0^t b_s \circ g ds$$

Définissons une fonctionnelle d'action sur $C_x([0, 1], \mathbb{R}^n)$ par la formule:

$$\begin{cases} I(g) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|f\|_{H^1}^2 \text{ lorsque } g = S_x(f) \right\} \\ \inf \{\emptyset\} = +\infty \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous avons alors les résultats suivants (c.f.[1] et [4])

Théorème 2.1. *Soit $a > 0$. Supposons vérifiée la condition (2.2). Alors $\forall \rho > 0, R > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0$ tel que $\forall f \in H^1$ vérifiant $\frac{1}{2} \|f\|_{H^1}^2 \leq a$; si $g = S_x(f)$, alors*

$$P(d(Y^\varepsilon, g) > \rho; d(\varepsilon B, f) < \alpha) \leq \exp - \frac{R}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 2.2. *Considérons le processus $Y^\varepsilon = (Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, 1]}$ solution de (2.5). Notons P^ε la loi de Y^ε . Alors P^ε satisfait à un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action I définie par (2.6). De plus, nous avons les estimations suivantes*

$\forall A \subset C_x([0, 1], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} - \inf \{I(g), g \in A^\circ\} &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P^\varepsilon(A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P^\varepsilon(A) \\ &\leq - \inf \{I(g), g \in \bar{A}\} \end{aligned}$$

où A° (resp. \bar{A}) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A).

Définissons les fonctionnelles d'action sur $C_{x,0}([0, 1], \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R})$ et $C_x([0, 1], \mathbb{R}^{n,+})$

$$\begin{cases} \bar{I}^+(\psi, \phi) = \inf \{I(\theta), \text{ lorsqu'il existe } \theta \in C_x([0, 1], \mathbb{R}^n) \\ \text{telle que } \psi = \Gamma\theta \text{ et } \phi = \Xi\theta\} \\ \inf \{\emptyset\} = +\infty \end{cases} \quad (2.7)$$

où Γ, Ξ et I sont définies par (2.4) et (2.6)

$$\begin{cases} I^+(\psi) = \inf \{I(\theta), \text{ lorsqu'il existe } \theta \in C_x([0, 1], \mathbb{R}^n) \text{ telle que } \psi = \Gamma\theta\} \\ \inf \{\emptyset\} = +\infty \end{cases} \quad (2.8)$$

Théorème 2.3. *1) Considérons le couple $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$ solution de (2.3). Notons \bar{Q}_ε la loi de $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$, $\bar{Q}_\varepsilon \in M_1(C_{x,0}([0, 1], \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}))$. Alors \bar{Q}_ε satisfait à un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle*

d'action \bar{I}^+ définie dans (2.7) De plus, nous avons les estimations suivantes

$$\forall A \subset C_{x,0}([0, 1], \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} -\inf \{ \bar{I}^+(\psi, \varphi), (\psi, \varphi) \in A^\circ \} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \bar{Q}_\varepsilon(A) \\ \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \bar{Q}_\varepsilon(A) \leq -\inf \{ \bar{I}^+(\psi, \varphi), (\psi, \varphi) \in \bar{A} \} \end{cases}$$

où A° (resp. \bar{A}) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A).

2) Considérons X^ε solution de (2.3).

Notons Q_ε la loi de $X^\varepsilon, Q_\varepsilon \in M_1(C_x([0, 1], \mathbb{R}^{n,+}))$, espace des mesures de probabilités sur $C_{x,0}([0, 1], \mathbb{R}^{n,+})$. Alors Q_ε satisfait à un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action définie dans (2.8) De plus, nous avons les estimations suivantes $\forall A \subset C_x([0, 1], \mathbb{R}^{n,+})$.

$$\begin{cases} -\inf \{ I^+(\psi), \psi \in A^\circ \} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln Q_\varepsilon(A) \\ \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln Q_\varepsilon(A) \leq -\inf \{ I^+(\psi), \psi \in \bar{A} \} \end{cases}$$

où A° (resp. \bar{A}) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A).

Nous renvoyons le lecteur à [1] et [4] pour une écriture explicite de I^+ et \bar{I}^+ .

2.2. Cas d'un ouvert régulier de \mathbb{R}^n

Soit D_0 un ouvert connexe régulier de \mathbb{R}^n . Notons D l'adhérence de D_0 . Supposons que D a une frontière régulière ∂D sur laquelle est défini un champ de vecteurs réguliers γ orienté vers l'intérieur D_0 . Alors il existe un couple $(X_t^\varepsilon, A_t^\varepsilon)$ de processus F_t -adapté, solution de (2.1) où les entrées vérifient (2.2).

La construction se fait par localisation (c.f. [1] et [4], i.e. on se place dans une carte locale pour réduire le problème (2.1) à un problème sur le demi-espace ou \mathbb{R}^n tout entier et on recolle ensuite).

Dans toute la suite, nous considérerons $\bigcup = \{U^0, U^1, \dots, \}$ une famille finie ou dénombrable de sous-ensembles ouverts relativement compacts de D qui recouvrent D_0 et telle qu'à chaque $U \in \bigcup$ est associé un système de coordonnées

$$\mu : \bigcup \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ qui à } x \text{ associe } \mu(x) = (\mu^1(x), \dots, \mu^n(x)).$$

Nous supposons vérifiées les conditions suivantes :

(2.9)

- i) $U^0 \subset D_0$ et le système de coordonnées correspondantes est le système de coordonnées usuelles. Si $U = U^k, k > 0$, dans ce cas U coupe ∂D et

$$U \cap \partial D = \{x \in U; \mu^1(x) = 0\}, U \cap D_0 = \{x \in U; \mu^1(x) > 0\}$$

- ii) Il existe $\rho > 0$ et pour chaque $x \in U$, il existe un entier positif $k(x)$ tel que si $y \in D$ vérifie $d(x, y) \leq \rho$ alors $y \in U^{k(x)}$.

Considérons l'équation (2.1). Si $X_t^{\varepsilon, x} \in U^k$ et si μ est le système de coordonnées associées à U^k , alors $\mu(X_t^{\varepsilon, x})$, grâce à la formule d'Ito, satisfait à une équation comme dans (2.1) avec de nouveaux coefficients $\sigma_{\varepsilon, k}, b_{\varepsilon, k}$ et un champ de vecteurs γ_k sur la frontière de $\mathbb{R}^{n,+}$.

- iii) Les entrées $\sigma_{\varepsilon, k}$ et $b_{\varepsilon, k}$ satisfont à la condition (2.2)

- iv) $\gamma_k(0, y^2, \dots, y^n) = e_1$ pour $(0, y^2, \dots, y^n) \in Im\mu$

- v) Il existe $c > 0$ tel que $\forall U^k$, la fonction coordonnée associée satisfait

$$\frac{1}{c} \cdot |\mu(x) - \mu(y)| \leq |x - y| \leq c \cdot |\mu(x) - \mu(y)|$$

Théorème 2.4. *Considérons le couple $(X^\varepsilon, A^\varepsilon)$ solution de (2.1) (resp. X^ε). Supposons que la condition (2.2) est vérifiée. Alors les assertions du théorème 2.3 sont valables.*

3. Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de réflexion

3.1. Cas du demi-espace

Nous rappelons d'abord la définition d'un système de contractions centrées en un point. Soit U un ouvert fixé de \mathbb{R}^n .

(3.1)

Définition [2]. Une famille $\Theta = (\Theta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$ de transformation bijectives continues de U vers U est appelée un système de contractions centrées en x si

- a) $\Theta_\alpha(x) = x$,

- b) si $\alpha \geq \beta$, alors on a $|\Theta_\alpha(y) - \Theta_\alpha(z)| \leq |\Theta_\beta(y) - \Theta_\beta(z)| \forall (y, z) \in U^2$

- c) $\Theta_1 = Id_U$ et $\Theta_\alpha^{-1} = \Theta_{\alpha^{-1}}$. De plus, pour tous compacts K de U et ε positif, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\alpha\beta - 1| < \delta$, alors
 $|\Theta_\alpha \circ \Theta_\beta(y) - (y)| < \varepsilon \forall y \in K$

Soient maintenant $\tilde{\sigma}$ un $n \times d$ - champ de matrices et \tilde{b} un champ de vecteurs sur U . Posons $\tilde{a} = \tilde{\sigma}^t \tilde{\sigma}$ et considérons l'opérateur différentiel du second ordre sur U

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

Posons $L(t) = \ln \ln t$ et $\phi(t) = \sqrt{t \ln \ln t}$

$$\begin{cases} \tilde{b}^\alpha(y) = \alpha(\tilde{L}\Theta_{\phi(\alpha)} \circ \Theta_{\phi(\alpha)}^{-1})(y) \\ \tilde{\sigma}^\alpha(y) = \phi(\alpha)(\nabla\Theta_{\phi(\alpha)})(\Theta_{\phi(\alpha)}^{-1}(y)) \cdot \tilde{\sigma}(\Theta_{\phi(\alpha)}^{-1}(y)), \end{cases} \quad (3.3)$$

où Θ est un système de contractions centrées en x .

Hypothèse: Nous dirons que le triplet (b, σ, Θ) satisfait (3.4)

l'hypothèse (3.4) si Θ_α est 2 fois différentiable $\forall \alpha > 0$ et il existe un $n \times d$ - champ de matrices σ et un champ de vecteurs b sur U tel que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{b}^\alpha(y) = b(y), \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{\sigma}^\alpha(y) = \sigma(y)$$

uniformément sur les sous-ensembles compacts de U . De plus si $b_\varepsilon = \tilde{b}^{1/\varepsilon}$ et $\sigma_\varepsilon = \tilde{\sigma}^{1/\varepsilon}$ alors les entrées b_ε et σ_ε satisfont à la condition (2.2).

Nous dirons que $\tilde{\sigma}$ est adapté au système de contractions Θ si $\tilde{\sigma}^\alpha = \tilde{\sigma}$ pour tout $\alpha > 0$. Dans ce cas, il suffit que l'application qui à x associe $\tilde{\sigma}(x)$ soit lipschitzienne sur tous les compacts.

Pour tout $u > 0$, $B^{(u)}$ désignera le mouvement brownien

$$B_t^{(u)} = \frac{1}{\sqrt{u}} B_{ut}.$$

Considérons la diffusion y , solution de l'équation différentielle stochastique

$$dy_t = \tilde{b}(y_t)dt + \tilde{\sigma}(y_t)dB_t; \quad y_0 = x \text{ et posons pour tout } u > 0$$

$$y_t^u = y_{ut} \text{ et } z_u(t) = \Theta_{\phi(u)}(y_t^u).$$

Par la formule d'Ito et par changement de temps z_u est solution de

$$* dz_u(t) = \tilde{b}^u(z_u(t))dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}}\tilde{\sigma}^u(z_u(t))dB_t^{(u)}; z_u(0) = x$$

Sous l'hypothèse (3.4), nous voulons trouver l'ensemble-limite de la famille $\{z_u\}$ qui satisfait * sur $\{x; x^1 > 0\}$ pour $u \rightarrow +\infty$ p.s. et qui est instantanément réfléchi selon e_1 en atteignant la frontière $\{x; x^1 = 0\}$. Alors z_u est solution de

$$dz_u(t) = \tilde{b}^u(z_u(t))dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}}\tilde{\sigma}^u(z_u(t))dB_t^{(u)} + e_1 dA_t^{u,x}; z_u(0) = x A_0^{u,x} = 0, \quad (3.5)$$

avec $A_t^{u,x}$ un processus croissant continu, ne croissant que sur

$$\{s; x^1(z_u(s)) = 0\}$$

vérifiant

$$A_t^{u,x} = \int_0^t 1_{(x^1=0)}(z_u(s))dA_s^{u,s}.$$

Sous l'hypothèse (3.4), nous pouvons appliquer les résultats de la section 2 à $(b_{1/u}, \sigma_{1/u}) = (\tilde{b}^u, \tilde{\sigma}^u)$ et nous avons :

$$(3.6)$$

$$\begin{cases} -\inf \{\bar{I}^+(\psi, \varphi), (\psi, \varphi) \in A^\circ\} \leq \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{(z_u, A^u) \in A\} \\ \leq \limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{(z_u, A^u) \in A\} \leq -\inf \{\bar{I}^+(\psi, \varphi), (\psi, \varphi) \in \bar{A}\} \\ -\inf \{I^+(\psi), \psi \in A^\circ\} \leq \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{z_u \in A\} \\ \leq \limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{z_u \in A\} \leq -\inf \{I^+(\psi), \psi \in \bar{A}\} \end{cases}$$

Théorème 3.1. a) Sous l'hypothèse 3.4' (voir la démonstration ci-dessous), la famille $\{(z_u, A^u)\}_u$ est relativement compacte; de plus $\bar{C}^+ = \{g; \bar{I}^+(g) \leq 1\}$ est l'ensemble-limite pour $u \rightarrow +\infty$ p.s..

b) Sous la même hypothèse, la famille $\{z_u\}_u$ est relativement compacte; de plus $C^+ = \{g; I^+(g) \leq 1\}$ est l'ensemble-limite pour $u \rightarrow +\infty$ p.s..

Supposons que $U = \mathbb{R}^n$, $\tilde{b} = 0$, $\tilde{\sigma} = Id$, $\Theta_\alpha(y) = \alpha^{-1}y$. Dans ce cas, $z_u(t) = \frac{1}{\sqrt{Lu}}B_t^{(u)} + e_1 A_t^{u,x}$; $A_0^{u,x} = 0$. Le théorème 3.1 est alors une extension au brownien réfléchi de la loi de Strassen [5].

Démonstration. Suivant les idées d'Anderson & Orey [1]

$$(z_u, A^u)(t) = (\Gamma_t, \Xi_t)V_u,$$

où V_u est solution de

$$dV_u(t) = \tilde{b}^u(\Gamma_t V_u)dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}}\tilde{\sigma}^u(\Gamma_t V_u)dB_t^{(u)}; V_u(0) = x \quad (3.7)$$

D'autre part, considérons (y_t, A_t) solution de

$$dy_t = \tilde{b}(y_t)dt + \tilde{\sigma}(y_t)dB_t + e_1 dA_t; y_0 = x \quad A_0 = 0 \text{ alors} \quad (3.8)$$

$(y_t, A_t) = (\Gamma_t, \Xi_t)Y$ avec

$$dY_t = \tilde{b}(\Gamma_t Y)dt + \tilde{\sigma}(\Gamma_t Y)dB_t; Y_0 = x \quad (3.9)$$

Posons

$$Y_t^u = Y_{ut}$$

Alors du fait que

$$\bar{V}_u(t) = \Theta_{\phi(u)}(Y_t^u). \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Gamma_{ut}Y)^1 = (Y_t^u)^1 - \inf_{0 \leq s \leq ut} ((Y_s)^1 \wedge 0) \\ \quad \quad \quad = (Y_t^u)^1 - \inf_{0 \leq v \leq t} ((Y_v^u)^1 \wedge 0) \\ \quad \quad \quad = (\Gamma_t Y^u)^1 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Y^u est solution de :

$$dY_t^u = u\tilde{b}(\Gamma_t Y^u)dt + \sqrt{u}\tilde{\sigma}(\Gamma_t Y^u)dB_t^{(u)}; Y_0^u = x \quad (3.12)$$

\bar{V}_u est solution de :

$$d\bar{V}_u(t) = \bar{b}^u \circ \bar{V}_u dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}}\bar{\sigma}_t^u \circ \bar{V}_u dB_t^{(u)}; \bar{V}_u(0) = x \text{ en posant}$$

$$\tilde{L}_t = \frac{1}{2} \sum \tilde{a}_{ij,t} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum \tilde{b}_{i,t} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\bar{b}_t^\alpha \circ y = \alpha(\tilde{L}_t \Theta_{\phi(\alpha)}) \circ \Theta_{\phi(\alpha)}^{-1}(y)$$

$$\bar{\sigma}_t^\alpha \circ y = \phi(\alpha)(\nabla \theta_{\phi(\alpha)}) \cdot \tilde{\sigma}_t \circ \Theta_{\phi(\alpha)}^{-1}(y)$$

Hypothèse (3.4'). En plus de l'hypothèse (3.4), nous supposons que

$$\bar{b}_t^\alpha \circ y = \tilde{b}^\alpha(\Gamma_t y)$$

$$\bar{\sigma}_t^\alpha \circ y = \tilde{\sigma}^\alpha(\Gamma_t y) \quad \forall y \in C(U)$$

Sous cette hypothèse, on a $V_u = \bar{V}_u$ p.s.(3.3) et l'hypothèse (3.4) impliquent que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \bar{b}_t^\alpha \circ y = b_t \circ y$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_t^\alpha \circ y = \sigma_t \circ y$$

uniformément sur les compacts de $C(U)$.

Nous pouvons alors appliquer les résultats du théorème 2.2 à

$$(b_{1/u,t}, \sigma_{1/u,t}) = (\tilde{b}_t^u, \tilde{\sigma}_t^u)$$

et nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} -\inf \{I(\psi), \psi \in A^\circ\} \leq \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{(V_u \in A)\} \\ \leq \limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{(V_u \in A)\} \leq -\inf \{I(\psi), \psi \in \overline{A}\} \end{array} \right.$$

Le théorème 3.1 résultera alors du théorèmes 3.2.

Théorème 3.2. *Sous l'hypothèse (3.1), la famille $\{V_u\}_u$ est relativement compacte ; de plus $C = \{g; I(g) \leq 1\}$ est l'ensemble-limite de V_u pour $u \rightarrow +\infty$ p.s..*

Démonstration. On suivra la preuve introduite dans Baldi [2]. Ce théorème résultera des 2 propositions suivantes :

Proposition 3.3. $\forall \varepsilon > 0, \exists$ p.s. un réel positif $u_0 = u_0(\omega)$ tel que $\forall u > u_0(\omega) d(V_u(\omega), C) < \varepsilon$

Proposition 3.4. *Soit $g \in C$ tel que $I(g) < 1$. Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 1$ tel que $\forall c > c_\varepsilon P \{d(V_{c^j}, g) \varepsilon \text{ infiniment souvent}\} = 1$*

Démonstration. Résulte du théorème 2.1, cf Baldi [2].

Démonstration de la proposition 3.3. Si $c > 1$, par l'inégalité du triangle

$$\begin{aligned} d(V_u, C) &\leq d(V_u, \Theta_{\varphi(u)} \circ \theta_{\varphi(c^j)}^{-1}(V_{c^j})) \\ &\quad + d(V_{c^j}, \Theta_{\varphi(u)} \circ \theta_{\varphi(c^j)}^{-1}(V_{c^j})) + d(V_{c^j}, C) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

où j est tel que $c^{j-1} \leq u \leq c^j$.

La majoration de I_2 et I_3 résultera du lemme suivant

Lemme 3.5. $\forall c > 1$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists$ p.s. un entier positif $j_0 = j_0(\omega)$ tel que $\forall j > j_0(\omega) d(V_{c^j}, C) < \varepsilon$.

Démonstration. Posons $C'_\varepsilon = \{g; d(g, C) \geq \varepsilon\}$. Par le théorème 2.2, $\exists \delta > 0$ tel que $I(C'_\varepsilon) > 1 + 2\delta$ et

$$\limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{Lu} \ln P \{ (V_u \in C'_\varepsilon) \} \leq -(1 + 2\delta), \text{ donc pour } j \text{ assez grand}$$

$$P(V_{c^j} \in C'_\varepsilon) \leq \exp \left[-(1 + \delta) \cdot L(c^j) \right] \leq \frac{\text{const}}{j^{1+\delta}}.$$

Et on applique le lemme de Borel-Cantelli pour conclure car le membre de droite est sommable.

\exists alors j_0 tel que $\forall j > j_0, I_3 < \varepsilon/3$.

$\exists j_1$ tel que $\forall j > j_1, I_2 < \varepsilon/3$ en utilisant ce lemme et le c) de la définition (3.1) du système des contractions si $c > 1$.

Il reste à démontrer que $I_1 < \varepsilon/3$ pour j assez grand et $c > 1$.

$\forall j \in \mathbb{N}$ et $c > 1$, posons

$$\begin{aligned} \chi_j &= \sup_{c^{j-1} \leq u \leq c^j} d(V_u, \theta_{\phi(u)} \circ \theta_{\phi(c^j)}^{-1}(V_{c^j})) \\ &= \sup_{c^{j-1} \leq u \leq c^j} d(\theta_{\phi(u)}(Y^u), \theta_{\phi(u)}(Y^{c^j})) \end{aligned}$$

Lemme 3.6. $\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon > 1$ tel que

si $1 < c < c_\varepsilon, P \{ \exists j_0 = j_0(\omega) \text{ tel que } \chi_j < \varepsilon \text{ dès que } j > j_0 \} = 1$

Démonstration. Nous devons prouver que

$$P \left\{ \limsup_{j \rightarrow +\infty} (\chi_j \geq \varepsilon) \right\} = 0$$

Par le lemme 3.5, $\exists K > 0$ telle que pour presque tout $\omega, \exists j_0(\omega)$ tel que $\|V_{c^j}(\omega)\| \leq K \quad \forall j > j_0(\omega)$. Il reste alors à prouver seulement que :

$$P \left\{ \limsup_{j \rightarrow \infty} (\chi_j \geq \varepsilon, \|V_{c^j}(\omega)\| \leq K) \right\} = 0$$

Comme dans [2], nous avons

$$\{ \chi_j \geq \varepsilon \mid \|V_{c^j}(\omega)\| \leq K \}$$

$$\subset \left\{ \sup_{c^{j-1} \leq u \leq c^j} \left| \Theta_{\phi(c^{j-1})} \circ \Theta_{\phi(c^j)}^{-1}(V_{c^j}(t)) - \Theta_{\phi(c^{j-1})} \circ \Theta_{\phi(c^j)}^{-1}(V_{c^j}(s)) \right| > \varepsilon ; \right. \\ \left. \|V_{c^j}(\omega)\| \leq K \right\}$$

Mais $\forall \delta > 0$ et pour j assez grand

$$\frac{\phi(c^j)}{\phi(c^{j-1})} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{\ln \ln c^j}{\ln \ln c^{j-1}}} \leq \sqrt{c} \cdot (1 + \delta)$$

en appliquant le c) de la définition (3.1),
si c assez petit

$$\begin{aligned} & \{ \chi_j \geq \varepsilon, \|V_{c^j}\| \leq K \} \\ & \subset \left\{ \sup_{\substack{0 \leq s \leq 1 \\ s/c \leq t \leq s}} |V_{c^j}(t) - V_{c^j}(s)| \geq \varepsilon/2; \|V_{c^j}\| \leq K \right\}, \text{ où} \\ & \quad = \{V_{c^j} \in A_\varepsilon\} \\ & A_\varepsilon = \left\{ \sup_{\substack{0 \leq s \leq 1 \\ s/c \leq t \leq s}} |g(t) - g(s)| \geq \varepsilon/2; \|g\| \leq K \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons seulement besoin d'une borne inférieure pour $P\{\chi_j \geq \varepsilon, \|V_{c^j}(\omega) \leq K\}$ en utilisant les résultats du théorème 2.2 car A_ε est fermé.

Soit $g \in A_\varepsilon$ et $f \in H^1$ telles que $g = S_x(f)$ i.e.

$$\dot{g}_t = b_t(g) + \sigma_t(g)\dot{f}_t; \quad g_0 = x,$$

Alors il existe $s, t \in [0, 1]$ avec $0 \leq s \leq 1, s/c \leq t \leq s$

$$\frac{\varepsilon}{4} = \left| \int_t^s \dot{g}_\nu d\nu \right| \leq \int_t^s |b_\nu(g)| d\nu + \int_t^s |\sigma_\nu(g)\dot{f}_\nu| d\nu$$

De la définition même de A_ε et de $b_t = b \circ \Gamma_t$ (resp. $\sigma_t = \sigma \circ \Gamma_t$), il existe une constante m telle que si nous supposons $c \leq 2$, grâce à l'inégalité de Holder

$$\frac{\varepsilon}{4} \leq m \cdot |t - s| + m \cdot |t - s|^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{H^1} \quad .D'o\grave{u}$$

$$\|f\|_{H^1} \geq |t - s|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{m} (\frac{\varepsilon}{4} - m \cdot |t - s|)$$

Ce qui implique qu'il existe $c_\varepsilon > 1$ tel que, si $1 < c < c_\varepsilon, \frac{1}{2} \|f\|_{H^1}^2 > 2$, alors $I(A_\varepsilon) \geq 2$ et pour j assez grand, par le théorème 2.2,

$$P\{\chi_j \geq \varepsilon, \|V_{c^j}\| \leq K\} \leq \exp \left[-\frac{3}{2} L(c^j) \right] = \frac{const}{j^{\frac{3}{2}}}$$

On applique le lemme de Borel- Cantelli pour conclure.

3.2. Cas d'un ouvert de \mathbb{R}^n

Considérons la diffusion avec réflexion, solution de :

$$\begin{cases} dz_u(t) = \tilde{b}^u(z_u(t))dt + \frac{1}{\sqrt{Lu}}\tilde{\sigma}^u(z_u(t))dB_t^{(u)} + 1_{\partial D}(z_u(t))\gamma(z_u(t))dA_t^{u,x}; \\ z_u(0) = x, A_0^{u,x} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

\tilde{b}^u et $\tilde{\sigma}^u$ sont définies par (3.3)

$\gamma(x)$ un champ de vecteurs non tangents sur la frontière de D_0 ,

$A_t^{u,x}$ un processus croissant continu, ne croissant que sur $\{s; z_u(s) \in \partial D_0\}$ vérifiant

$$A_t^{u,x} = \int_0^t 1_{\partial D}(z_u(s))dA_s^{u,x}$$

Dans ce paragraphe, nous déterminerons l'ensemble-limite de la famille $\{z_u\}$ pour $u \rightarrow \infty$ p.s..

Théorème 3.7. *Même hypothèse que le théorème 3.1. Les assertions du théorème 3.1 sont encore valables pour la famille $\{z_u\}$ pour $u \rightarrow +\infty$ p.s.*

Par localisation et recollement.

Définissons par induction :

$$S_1(u) = \inf_{t \geq 0} \{z_u(t) \in B_\rho(x)^c\} \text{ et } S_1 = \max_u S_1(u) \wedge 1,$$

puis pour tout entier $m \geq 2$:

$$S_m(u) = \inf_{t \geq S_{m-1}(u)} \{z_u(t) \in B_\rho(z_u(S_{m-1}(u)))^c\} \text{ et } S_m = \max_u S_m(u) \wedge 1,$$

où le réel ρ est défini dans 2.9 ii).

Définissons aussi un opérateur $\Delta_T : C([0, 1], D) \rightarrow C([0, T], D)$ par la formule

$$\Delta_T f(t) = f(tT)$$

- Si $0 \leq t \leq S_1$, considérons un système de coordonnées $(\mu, U^{k(x)})$
- Si $k(x)=0$, la frontière ne joue aucun rôle. Comme $z_u(t) = \Delta_{S_1} z_u(v)$, par le théorème 2.2 de Baldi [2], la famille $\{z_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble-limite est $C_{S_1} = \Delta_{S_1} C'$ où

$$C' = \left\{ \begin{array}{l} g, \text{ lorsqu'il existe } f \in H^1 \text{ vérifiant } \frac{1}{2} \|f\|_{H^1}^2 \leq 1 \\ \text{telle que } \dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) \dot{f}_t ; g_0 = x \text{ et } t \in [0, 1] \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

- Si $k(x) > 0$, c'est un problème dans le demi-espace.
Posons $\bar{z}_u(t) = \mu(z_u(t))$. En utilisant (2.9) et grâce au théorème 3.1, la famille $\{\bar{z}_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble-limite est $\bar{C}_{S_1}^+ = \Delta_{S_1} C^+$. μ étant continue et grâce au théorème 3.1, la famille $\{z_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble-limite est $C_{S_1}^+ = \mu^{-1}(\Delta_{S_1} C^+)$.

On réitère le procédé.

- Si $S_{m-1} \leq t < S_m$, considérons un système de coordonnées $(\mu, U^{k(z_u(S_{m-1}))})$
- Si $k(z_u(S_{m-1})) = 0$, la frontière ne joue aucun rôle.
Comme $z_u(t) = \tau_{S_{m-1}S_m} \Delta_{S_{m-1}S_m} z_u(\nu)$ où $S_{m-1}S_m = S_m - S_{m-1}$ et τ l'opérateur de translation défini par $\forall \eta \in C(D)$, $t > 0$ $\tau_t(\eta)$ désigne l'élément de $C(D)$ défini par $\tau_t \eta(s) = \eta_{t+s}$ par le théorème 2.2 de Baldi [2], la famille $\{z_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble-limite est $C_{S_{m-1}S_m}^+ = \tau_{S_{m-1}S_m} \Delta_{S_{m-1}S_m} C'$ où C' est donné par (3.14).
- Si $k(z_u(S_{m-1})) > 0$, c'est un problème dans le demi-espace.
Posons $\bar{z}_u(t) = \mu(z_u(t))$. En utilisant (2.9) et grâce au théorème 3.1, la famille $\{\bar{z}_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble-limite est $\bar{C}_{S_{m-1}S_m}^+ = \tau_{S_{m-1}S_m} \Delta_{S_{m-1}S_m} C^+$. Puisque μ est continue, la famille $\{z_u\}$ est relativement compacte en vertu du théorème 3.1, et l'ensemble-limite est

$$C_{S_{m-1}S_m}^+ = \mu^{-1}(\tau_{S_{m-1}S_m} \Delta_{S_{m-1}S_m} C^+)$$

Il suffit de recoller et d'utiliser la propriété d'additivité de la fonctionnelle d'action pour avoir l'assertion, voir [1].

Signalons le fait que si $\partial D_0 = \emptyset$, on retrouve les résultats de Baldi [2].

Exemple 3.8.

$$\text{Posons } \tilde{\sigma}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y^2 & -2y^1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{\sigma}$ est adapté au système de contractions

$$\Theta_\alpha : (y^1, y^2, y^3) \rightarrow (\alpha^{-1}y^1, \alpha^{-1}y^2, \alpha^{-2}y^3)$$

Considérons la diffusion dans le demi-espace, solution de

$$\begin{pmatrix} dz_u^1(t) \\ dz_u^2(t) \\ dz_u^3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\ln \ln u}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2z_u^2(t) & -2z_u^1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^{u,1} \\ dB_t^{u,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_t^{u,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A_t^{u,x}$$

un processus croissant continu, ne croissant que sur $\{s; x^1(z_u(s)) = 0\}$ vérifiant

$$A_t^{u,x} = \int_0^t 1_{(x^1=0)}(z_u(s)) dA_s^{u,x}$$

Sous forme explicite, on a :

$$\begin{pmatrix} dz_u^1(t) \\ dz_u^2(t) \\ dz_u^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dB_t^{u,1}}{\sqrt{\ln \ln u}} + dA_t^{u,x} \\ \frac{dB_t^{u,2}}{\sqrt{\ln \ln u}} \\ 2\left(\frac{B_t^{u,2} dB_t^{u,1}}{\ln \ln u} - \frac{B_t^{u,1} dB_t^{u,2}}{\ln \ln u} - A_t^{u,x} \cdot \frac{dB_t^{u,2}}{\sqrt{\ln \ln u}}\right) \end{pmatrix}$$

Considérons le processus non restreint, solution de :

$$\begin{pmatrix} dV_u^1(t) \\ dV_u^2(t) \\ dV_u^3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\ln \ln u}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2.V_u^2(t) & -2(V_u^1(t) + \bar{V}_u^1(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^{u,1} \\ dB_t^{u,2} \end{pmatrix}$$

L'hypothèse (3.1) est vérifiée. Alors le théorème 3.2 dit que la famille $\{V_u\}_u$ est relativement compacte; de plus

$$C = \{\phi; I(\phi) \leq 1\}$$

$$= \left\{ (\phi^1, \phi^2, \phi^3); \phi = S_x(f) \text{ avec } \frac{1}{2} \|f^2\|_{H^1} \leq 1 \right\}$$

est l'ensemble-limite de la famille $\{V_u\}$ pour $u \rightarrow +\infty$ *p.s.* est donc solution de

$$\begin{pmatrix} d\phi^1(t) \\ d\phi^2(t) \\ d\phi^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_t^1 \\ df_t^2 \\ 2(f_t^2 df_t^1 - (f_t^1 - \inf_{0 \leq s \leq t} (f_s^1 \wedge 0)) df_t^2) \end{pmatrix}$$

Le théorème 3.1 affirme que la famille $\{z_u\}_u$ est relativement compacte; de plus $C^+ = \{g; I^+(g) \leq 1\}$ est l'ensemble-limite pour $u \rightarrow +\infty$ *p.s.*

Références

- [1] R. ANDERSON & S. OREY – « Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary », *Nagoya Math.J* **60** (1976), p. 189–216.
- [2] P. BALDI – « Large deviations and fonctionnal iterated logarithm law for diffusion processes », *Probab.Th.Fields* **71** (1986), p. 435–453.
- [3] D. DEUSCHEL & D. STROOCK – *Large deviations*, Academic Press, Inc.(London)L.T.D, 1989.
- [4] H. DOSS & P. PRIOURET – « Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion », in *Seminar on probability, XVII*, Lecture Notes in Math., vol. 986, Springer, Berlin, 1983, p. 353–370.
- [5] V. STRASSEN – « An invariance principle for the law of the iterated logarithm », *Z.Wahrscheinlichkeistheor Verw.Geb.*(**3**) (1965), p. 211–226.

TOUSSAINT JOSEPH RABEHERIMANANA
Departement de Mathématique et Informatique
B.P.906, Ankatso
101, Antananarivo
MADAGASCAR
rabeherimanana.toussaint@caramail.com