ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Hassimiou Diallo

Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie du tore hyperbolique $n+1$-dimensionnel

Volume 12, n°2 (2005), p. 245-258.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_2_245_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales Mathematiques Blaise Pascal **12**, 245-258 (2005)

Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie du tore hyperbolique $n+1$-dimensionnel

Hassimiou Diallo

Résumé

A flag on a manifold M is an increasing sequence of foliations $(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ on this manifold, where for each i, $\dim \mathcal{F}_i = i$. The aim of this paper is to etablish that any flag of riemannian foliations $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ on a compact and connected manifold, lifts on the bundle of transverse direct orthonormal frames of $\mathcal{F}_p$ to a flag of transversally parallelizable foliations. This result permits us to obtain a classification of riemannian flags of a $n+1-$dimensional compact manifold for which the dimension of the structural Lie algebra of the flow is equal to n or $n-1$.

Mots clés :
feuilletages, feuilletages riemanniens, drapeaux riemanniens, drapeaux de Lie.

Dans tout ce qui suit les objets sont C^∞, la variété M est connexe orientable et les feuilletages considerés sur M sont supposés orientables.

1 Introduction

On appelle drapeau de feuilletages sur une variété M de dimension n, une suite $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ de feuilletages de $\mathcal{F}_i$ où $\dim \mathcal{F}_i = i$; ce drapeau est dit complet si $p = n - 1$.

Ici, nous cherchons à généraliser le résultat de P. Molino [7] sur le relèvement d'un feuilletage riemannien en un feuilletage transversalement parallélisable. On obtient que tout drapeau de feuilletages riemanniens se relève sur une certaine variété compacte en un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables (théorème de relèvement).

Ce qui permet de voir sur une variété compacte que

- les feuilletages d'un drapeau riemannien complet sont transversalement parallélisables.

- tout drapeau complet de feuilletages riemanniens minimaux est conjugué à un drapeau de feuilletages linéaires du tore. Ce qui est un cas particulier de [3].

Ensuite, on construit sur le fibré hyperbolique généralisé un drapeau de Lie complet "modèle" dont les feuilletages sont tous homogènes.

En utilisant les résultats de [2] et le théorème de relèvement, on montre que tout drapeau riemanien complet d'une $n+1$-variété compacte dont l'algèbre de Lie structurale du flot est de dimension $n-1$ est conjugué à ce drapeau "modèle"

Il en résulte une classification des drapeaux riemanniens complets d'une $n+1$-variété compacte dans le cas où l'algèbre de Lie structurale du flot est $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{n-1}$.

2 Définitions et rappels

Définition 2.1: - *Un drapeau de feuilletages (ou tout simplement un drapeau) sur M est la donnée sur M d'une suite croissante de feuilletages $(\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ telle que $\dim \mathcal{F}_i = i$. L'entier p est la longueur du drapeau. Le drapeau est dit complet si le feuilletage $\mathcal{F}_p$ est de codimension un. - Un drapeau de longueur un est réduit à son flot. Pour la suite, on ne considérera que des drapeaux de longueur $p > 1$.*

- Un drapeau est dit riemannien (de Lie, minimal, parallèlisable) si chacun de ses feuilletages est riemannien (de Lie, minimal, transversalement parallélisable).

- Un drapeau sur $M = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$ est dit linéaire si chacun de ses feuilletages l'est.

- On appellera indice de saturation d'un drapeau parallélisable $\mathcal{D}=(\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_p)$ le plus grand entier s tel que les feuilletages par les adhérences de feuilles de $\mathcal{F}_s$ et par celles des feuilles du flot coïncident.

- Etant donnés un drapeau $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ sur une variété M et une submersion π d'une variété $M^\#$sur M, un relèvement de $\mathcal{D}$ sur $M^\#$ est, s'il existe, un drapeau $\mathcal{D}^\# = (\mathcal{F}_1^\#, \cdots, \mathcal{F}_p^\#\ )$ sur $M^\#$, tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, p-1\}$, le feuilletage $\mathcal{F}_i^\#$ de dimension i se projette sur le feuilletage $\mathcal{F}_i$ par π.

- Un drapeau $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ *sur une variété* M *et un drapeau* $\mathcal{D}' = \left(\mathcal{F}'_1, \cdots, \mathcal{F}'_p\right)$ *sur une variété* M' *sont dits conjugués s'il existe un difféomorphisme de* M *sur* M' *échangeant, pour chaque* $i, 1 \leq i \leq p, \mathcal{F}_i$ *et* $\mathcal{F}'_i$.
- Soit Γ *un sous-groupe de Lie* G. *Un* Γ*-morphisme* θ *est une submersion de* G *sur un groupe de Lie* H *telle que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *et pour tout* $g \in \Gamma$*, on ait :*

$$\theta(\gamma \cdot g) = \theta(\gamma) \cdot \theta(g)$$

On remarquera que
- Tout morphisme de groupes est un $\Gamma-$morphisme,
- Si $\bar{\Gamma}$ est l'adhérence de Γdans G, tout $\Gamma-$morphisme est un $\bar{\Gamma}-$morphisme,
- Tout $\mathbb{Z}^n-$morphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ se décompose de façon unique sous la forme $L + P$ où L est une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$et P une fonction de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p, \mathbb{Z}^n-$périodique (*i.e.* telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n, P(\mathbf{p} + x) = P(x)$), nulle sur $\mathbb{Z}^n$.

On remarquera également que, pour un drapeau riemannien, il existe toujours une métrique riemannienne sur la variété qui est quasi-fibrée pour chacun des feuilletages. Pour cela, il suffit en partant d'une métrique quasi-fibrée du dernier feuilletage, en la modifiant en même temps que les métriques des variétés transverses successives des feuilletages intermédiaires jusqu'au flot pour obtenir une telle métrique.

Rappels

Ici, nous formulons dans le sens qui nous est utile les résultats suivants qu'on peut retrouver dans ([3], [7],[4], [6])

Théorème 2.2: *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage transversalement parallélisable d'une variété compacte.*
1) Les adhérences des feuilles sont des fibres d'une fibration localement triviale : $\pi : M \longrightarrow W$.
2) sur chaque fibre de π*,* $\mathcal{F}$ *induit un* g*- feuilletage de Lie, où* g *est un invariant du feuilletage* $(M, \mathcal{F})$ *appelé algèbre de Lie structurale de* $\mathcal{F}$.

Théorème 2.3: *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *un feuilletage riemannien d'une variété compacte connexe* M.
Alors le fibré des repères orthonormés transverses de $\mathcal{F}$ *est une variété compacte et le feuilletage relevé de* $\mathcal{F}$ *sur ce fibré est transversalement paralléli-*

sable de même dimension que $\mathcal{F}$, et l'algèbre de Lie structurale de ce feuilletage relevé est aussi un invariant de $(M, \mathcal{F})$.
C'est cette algèbre qu'on appelle algèbre de Lie structurale du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$.

Théorème 2.4: *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur une variété compacte connexe. Soit N l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ et soit g l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$. Alors*
1) L'algèbre de Lie **g** *est abélienne.*
2) La variété N est difféomorphe à un tore $\mathbb{T}^k$.
3) La restriction de $\mathcal{F}$ à N est un feuilletage différentiablement conjugué à un feuilletage linéaire du tore $\mathbb{T}^k$.

Théorème 2.5: *Tout drapeau riemannien minimal d'une n-variété compacte connexe est conjugué à un drapeau linéaire du tore $\mathbb{T}^n$.*

Théorème 2.6: *Soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ deux feuilletages de Lie d'une variété compacte connexe, de groupes de Lie G et G', et de groupes d'holonomie Γ et Γ'. Si $\mathcal{F}'$ est une extension de $\mathcal{F}$ (i.e. si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$), alors il existe deux développantes D et D' respectives de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur le revêtement universel de $\tilde{M}$ de M et un Γ- morphisme (un morphisme de groupes si $\mathcal{F}$ est à feuilles denses; précisement linéaire si $\mathcal{F}$ est minimal linéaire) θ de G sur G' tel que : $D' = \theta \circ D$ et $\Gamma' = \theta(\Gamma)$.*

3 Relèvement d'un drapeau riemannien

Ici, en partant des résultats de P. Molino sur le relèvement d'un feuilletage riemannien en un feuilletage transversalement parallélisable ([7],[6]), on établit un lien entre drapeau riemannien et drapeau parallélisable.

Théorème 3.1: *(Théorème de relèvement). Soit M une variété compacte connexe, $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ un drapeau riemannien sur M et $\pi_p : M_p^{\#} \to M$ le fibré des repères orthonormés transverses directs de $\mathcal{F}_p$. Alors il existe sur $M_p^{\#}$ un drapeau $\mathcal{D}^{\#} = (\mathcal{F}_1^{\#}, \cdots, \mathcal{F}_p^{\#}$)de feuilletages transversalement parallélisables tel que pour tout $s \in \{1, \cdots, p\}$ on ait $\pi_p\left(\mathcal{F}_s^{\#}\right) = \mathcal{F}_s$.*

Démonstration:
Soit donnée une variété compacte connexe M de dimension m un drapeau de

feuilletages riemanniens $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p)$ Pour $s \in \{1, \cdots, p\}$ on désigne par :

- $\pi_s : M_s^{\#} \to M$ le fibré, des repères transverses orthonormés relativement à une certaine métrique quasi-fibrée pour chacun des feuilletages du drapeau.

$\rho_s : Q_s \to M$ le fibré normal de $\mathcal{F}_s$; il est canoniquement un fibré vectoriel riemannien de dimension $m - s$.

Puisque $T\mathcal{F}_s \subset T\mathcal{F}_{s+1}$, l'application identique de TM induit, par passage au quotient une submersion σ_s qui est un morphisme de fibrés vectoriels de $Q_s = TM/T\mathcal{F}_s$ sur $Q_{s+1} = TM/T\mathcal{F}_{s+1}$. Quitte à identifier Q_{s+1} à $(Ker\sigma_s)^{\perp}$ car

$$(Ker\sigma_s)^{\perp} \cong (Q_s/Ker\sigma_s) \cong Q_{s+1}$$

on peut supposer que Q_{s+1} est un sous fibré de Q_s. Comme $\mathcal{D}$ est un drapeau riemannien on peut alors écrire que $Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_p$.

D'après ([7],[6]), chaque feuilletage $\mathcal{F}_s$ se relève sur le fibré des repères orthonormés directs et transverses $M_s^{\#}$ du feuilletage $\mathcal{F}_s$, en un feuilletage transversalement parallélisable $\mathcal{F}_s^{\#}$, de même dimension que $\mathcal{F}_s$. Considérons alors l'application $j_s$de $M_{s+1}^{\#}$dans $M_s^{\#}$ qui à r associe le repère r'obtenu en complétant le repère r avec le vecteur $u_s(\pi_s(r))$, où u_s est le champ de vecteurs unitaires du fibré en droites orientées $Ker\sigma_s$. On a :

$$j_s(r)(x,t) = r'(x,t) = r(x) + tu_s(\pi_s(r))$$

Ce qui montre que j_s est une immersion injective et un homéomorphisme de $M_s^{\#}$ sur son image ; par suite j_s est un plongement. En plus le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_{s+1}^{\sharp} & \xrightarrow{j_s} & M_s^{\sharp} \\ \pi_{s+1}\downarrow & & \downarrow \pi_s \\ M_{s+1}^{\sharp} & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

Aussi on considère le plongement canonique h_s de $SO(m\text{-}s\text{-}1, \mathbb{R})$ dans $SO(m\text{-}s, \mathbb{R})$ qui à

$$a \text{ associe } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $(j_s h_s)$ est un $M-$morphisme de fibrations principales.

Tout ceci permet d'identifier $M_{s+1}^{\#}$à un sous fibré de $M_s^{\#}$. Comme de façon évidente $M_{s+1}^{\#}$ est saturé pour $\mathcal{F}_{s+1}^{\sharp}$ et puisque $\mathcal{F}_s^{\#} \subset \mathcal{F}_{s+1}^{\#}$, il est clair que $M_{s+1}^{\#}$est saturé pour $\mathcal{F}_s^{\#}$.

En considérant la restriction de $\mathcal{F}_s^{\#}$ à $M_{s+1}^{\#}$ qu'on note toujours $\mathcal{F}_s^{\#}$, on a

$\mathcal{F}_s^{\#} \subset \mathcal{F}_{s+1}^{\#}$. Par récurrence on a $M_p^{\#} \subset M_{p-1}^{\#} \subset \cdots \subset M_1^{\#}$ et $M_p^{\#}$ est saturé pour chacun des feuilletages $\mathcal{F}_s^{\#}$.
Alors les restrictions des feuilletages $\mathcal{F}_s^{\#}$ à $M_p^{\#}$ (notée toujours $\mathcal{F}_s^{\#}$) forment un drapeau.
Ensuite si on désigne par ω^s la $1-$forme de connexion de Levi-Cecita transverse et θ^s la $1-$forme fondamentale associées à $\mathcal{F}_s^{\#}$, alors la $1-$forme $\mathcal{F}_s^{\#}-$basiques $\Omega^s = \omega^s + \theta^s$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie $so\,(m-s, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m-s}$. Ses composantes sont linéairement indépendantes et forment un système de plaff définissant $\mathcal{F}_s^{\#}$ et montrant que le feuilletage $\left(M_s^{\#}, \mathcal{F}_s^{\#}\right)$ est transversalement parallélisable ([7],[6])
Ensuite, puisque la restriction θ_p^s à $M_p^{\#}$ de la $1-$forme fondamentale θ^s reste à valeurs dans $\mathbb{R}^{m-s}$ et puisque le sous-fibré $M_p^{\#}$ est une $SO\,(m-p, \mathbb{R})-$ réduction du $SO\,(m-s, \mathbb{R})-$fibré principal $M_s^{\#}$, alors la restriction ω_s^p de ω^s à $M_p^{\#}$ est une $1-$forme de connexion sur $M_p^{\#}$, et $\omega_s^p +\ \theta_p^s$ est une 1-forme $\mathcal{F}_s^{\#}-$basique sur $M_p^{\#}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $so\,(m-p, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m-s}$ dont les

$$m - s + \frac{(m-p)\,(m-p-1)}{2}$$

composantes forment également un système de plaff définissant la restriction de $\mathcal{F}_s^{\#}$ à $M_p^{\#}$; il en résulte que le feuilletage $\left(M_p^{\#}, \mathcal{F}_s^{\#}\right)$ est un feuilletage transversalement parallélisable.
Finalement le drapeau $\mathcal{D}^{\#} = (\mathcal{F}_1^{\#}, \cdots, \mathcal{F}_p^{\#})$ est un relèvement de $\mathcal{D}$ sur $M_p^{\#}$ en un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables.

Corollaire 3.2: *Les feuilletages d'un drapeau riemannien complet d'une variété compacte connexe sont transversalement parallélisables.*

□

Démonstration: Soit $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n)$ un drapeau riemannien d'une $n+1-$variété compacte M. D'après ce qui précède $\left(M_n^{\#}, \mathcal{F}_1^{\#}, \mathcal{F}_2^{\#}, \cdots, \mathcal{F}_n^{\#}\right)$ est un relèvement de $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n)$ en un drapeau de feuilletages parallélisables. Comme $\mathcal{F}_n$ est de codimension *un*, le groupe structural de la fibration principale $\pi_n : M_n^{\#} \longrightarrow M$ est réduite à l'identité, et π_n est alors un difféomorphisme qui permet d'identifier $\left(M_n^{\#}, \mathcal{F}_1^{\#}, \mathcal{F}_2^{\#}, \cdots, \mathcal{F}_n^{\#}\right)$ et $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n)$; il en résulte que $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n)$ est bien un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables.

Corollaire 3.3: *Tout drapeau riemannien minimal complet d'une n variété compacte et connexe est conjugué à un drapeau linéaire du tore $\mathbb{T}^n$.*

□

Démonstration:
En effet, d'après le théorème 2.4 de Yves Carrière sur les flots riemanniens et le corollaire précédent, un tel drapeau est conjugué à un drapeau minimal parallélisable du tore $\mathbb{T}^n$, *i.e* à un drapeau de Lie minimal du tore, donc linéaire d'après le théorème 2.6.
Ce résultat est un cas particulier de[3]. □

Remarque 3.4: Dans un drapeau riemannien complet d'une variété compacte les feuilletages de codimension *un* et de codimension *deux* sont des feuilletages de Lie.
Ainsi tout drapeau riemannien d'une $3-$variété compacte est un drapeau de Lie.

Il en résulte qu'aucun flot isométrique d'un espace lenticulaire de dimension 3, ou de la sphère $\mathbb{S}^3$ n'admet d'extension riemannienne de codimension 2.

4 Détermination des drapeaux de Lie complets d'un tore hyperbolique $n+1-$dimensionnel

Dans ce qui suit, on va donner une caractérisation des drapeaux riemanniens complets d'une $n+1$-variété compacte dont les flots ont une algèbre de Lie structurale de dimension $m = n$ ou $m = n-1$. On commencera par introduire la notion de tore hyperbolique de dimension $n \geq 3$.

Soit n un entier ≥ 2 et A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant égal à 1, *i.e.* un élément de $SL(n, \mathbb{Z})$. On suppose que la matrice A admet n valeurs propres positives. Au moyen de A, on forme le produit semi-direct $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ avec la loi :

$$(t, x) \cdot (t', x') = (t + t', A^t x' + x)$$

Le groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ contient le groupe cocompact $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$, la variété quotient de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ par $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$ ainsi obtenue est compacte connexe et est un fibré de base $\mathbb{S}^1$ et de fibre-type $\mathbb{T}^n$. On l'appelera *fibré hyperbolique généralisé* ou tout simplement *tore hyperbolique $n+1$-dimensionnel* et on le notera $\mathbb{T}_A^{n+1}$. Si A est la matrice identité,

$\mathbb{T}_A^{n+1}$ est réduit au tore $\mathbb{T}^{n+1}$.
Un exemple non trivial de telles martices est donné dans [1] avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

où $d_1 = 1$ et $d_{i+1} = 1 + d_1 d_2 \cdots d_i$, pour $i = 1, \cdots, n-1$.
On montrera dans la suite que tous les drapeaux riemanniens complets d'un tore hyperbolique dont le flot a une algèbre de Lie structurale de dimension maximale, sont conjugués à un même drapeau de Lie à feuilletages homogènes.

Proposition 4.1: *Soit $(M, \mathcal{F})$ un flot riemannien régulier d'une $n+1$ variété compacte connexe.*
Si l'algèbre de Lie structurale du flot est de dimension $n-1$, alors M supporte un drapeau de Lie complet conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes d'un tore hyperbolique.

Démonstration:
L'espace des adhérences des feuilles du flot est une variété de Sataké compacte connexe et orientée ; c'est donc $\mathbb{S}^1$; il n'y a pas de point singulier ; le flot $\mathcal{F}$ est complètement régulier et la projection canonique de M sur $\mathbb{S}^1$est une fibration localement triviale, de fibres $\mathbb{T}^n$. Nous savons que, dans ce cas d'après [2], il existe une matrice A appartenant à $SL(n, \mathbb{Z})$ ayant toutes ses valeurs propres positives telle que M soit difféomorphe à $\mathbb{T}_A^{n+1}$, et la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque fibre soit le même feuilletage conjugué linéaire $\mathcal{F}_{v_1}$, de direction un vecteur propre v_1 de A ; en plus 1 est la valeur propre du vecteur propre de la direction du flot si et seulement si la matrice A est réduite à l'identité $(A = I)$.

Notons ϕ_A le difféomorphisme du tore$\mathbb{T}^n$ induit par A et ρ_A l'application linéaire associée à A. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A, de vecteurs propres respectifs $v_1, v_2, \cdots, v_n$, et $\mathcal{D}' = \left(\mathcal{F}_{v_1} = \mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \cdots, \mathcal{F}'_{n-1}\right)$ le drapeau linéaire sur $\mathbb{T}^n$ tel que $< v_1, \cdots, v_i >$ soit une direction du feuilletage $\mathcal{F}'_i$.
Puisque A laisse invariant les feuilletages de $\mathcal{D}'$, les feuilletages verticaux du fibré $[0,1] \times \mathbb{T}^n \to [0,1]$ provenant des feuilletages de $\mathcal{D}'$passent au quotient

pour se projeter en un drapeau $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_{n-1})$ sur

$$\mathbb{T}_A^{n+1} = [0,1] \times \mathbb{T}^n \diagup (0,x) \sim (1, \phi_A(x))$$

Montrons que $\mathcal{D}$ est un drapeau de Lie à feuilletages homogènes. Pour cela, soit σ_i pour $1 \leq i \leq n-1$, la projection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $< v_{i+1}, \cdots, v_n > \cong \mathbb{R}^{n-i}$ suivant les feuilles de $\mathcal{F}'_i; \sigma_i$ est une développante sur $\mathbb{R}^n$ du feuilletage $\mathcal{F}'_i$. Puisque A laisse invariant ce feuilletage relevé de $\mathcal{F}'_i$ et le sous-espace $< v_{i+1}, \cdots, v_n >$, il existe une matrice carrée A_i d'ordre $n-i$, dont l'application linéaire ρ_{A_i} associée est telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\rho_A} & \mathbb{R}^n \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow \sigma_i \\ \mathbb{R}^{n-i} & \xrightarrow{\rho_{A_i}} & \mathbb{R}^{n-i} \end{array}$$

Il en résulte que cette matrice A_i est diagonalisable et a pour valeurs propres $\lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_n$ avec des vecteurs propres respectifs $v_{i+1}, \cdots, v_n$, de sorte que pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice A_i^t est définie et le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\rho_{A^i}} & \mathbb{R}^n \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow \sigma_i \\ \mathbb{R}^{n-i} & \xrightarrow{\rho_{A_i^t}} & \mathbb{R}^{n-i} \end{array}$$

On vérifie avec ce diagramme que l'application $\chi_i$de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R} \times_{A_i} \mathbb{R}^{n-i}$, définie par $D_i(t,x) = (t, \sigma_i(x))$, est un morphisme de groupes et que le feuilletage défini par χ_i se projette sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$ en un feuilletage de Lie homogène qui coïncide avec le feuilletage $\mathcal{F}_i$; il en résulte que $\mathcal{F}_i$ est un feuilletage de Lie homogène de groupe d'holonomie $\mathbb{Z} \times_{A_i} \sigma_i(\mathbb{Z}^n)$. Puisque $\mathbb{Z}$ est discret uniforme et $\sigma_i(\mathbb{Z}^n)$, en tant que groupe d'holonomie du feuilletage linéaire minimal $\mathcal{F}'_i$ est discret et partout dense dans $\mathbb{R}^{n-i}$, alors ce groupe $\mathbb{Z} \times_{A_i} \sigma_i(\mathbb{Z}^n)$ n'étant ni fermé ni dense dans $\mathbb{R}^{n+1-i}$, le feuilletage de Lie $\mathcal{F}_i$ est à feuilles ni fermées, ni denses [5] ; ainsi tous les feuilletages ont la même fibration basique. On peut compléter le drapeau $\mathcal{D}$ en lui ajoutant le feuilletage de Lie dont une développante sur $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ est donnée par le morphisme de groupes $\chi_n = pr_1 \circ \chi_{n-1}$; pr_1 étant la première projection du groupe affine réel GA sur $\mathbb{R}$. On remarquera que ce feuilletage est à feuilles fermées et qu'il coïncide avec le feuilletage par les adhérences des feuilles du flot. Au total, ce drapeau est complet et homogène ; il sera, dans la suite, appelé *drapeau modèle* du tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^{n+1}$. On notera que la construction ainsi faite est valable même si $A = I$. $\square$

Remarque 4.2: On notera que, si en plus des conditions de la proposition 4.1, $A \neq I$, *i.e.* 1 n'est pas valeur propre de la direction du flot, alors la matrice A ne pourrait être une matrice en blocs.

En effet si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

si $< v_1, \cdots, v_p >$ est une base de vecteurs propres de A_1, où v_1 est toujours une direction linéaire du flot, et si σ est la projection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$, suivant la direction $< v_1, \cdots, v_p >$, alors on a $1 < p \leq n-1$ (car $p = 1$ impliquerait que 1 est valeur propre associée au flot) et il est clair que le morphisme de groupes $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$sur $\mathbb{R} \times_{A_2} \mathbb{R}^{n-p}$ défini par $D(t, x) = (t, \sigma(x))$ détermine sur $\mathbb{T}_A^{n+1}$ un feuilletage de Lie homogène $\mathcal{F}'$ de groupe d'holonomie $\mathbb{Z} \times_{A_2} \mathbb{Z}^{n-p}$; $\mathcal{F}'$ est donc à feuilles fermées ; ensuite puisque visiblement $\mathcal{F}'$ est une extension du flot, on a $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_n$ donc $p = n$; ce qui est absurde comme $p \leq n-1$. Ceci montre en particulier que si $A \neq I$, les valeurs propres de A sont toutes distinctes de 1.

Théorème 4.3: *Soit $\mathcal{D} = (M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n)$ un drapeau riemannien d'une $n+1$-variété compacte connexe.*
Si la dimension m de l'algèbre de Lie structurale du flot $\mathcal{F}_1$ est n ou $n-1$, alors $\mathcal{D}$ est conjugué à un drapeau de Lie à feuilletages homogènes.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemne suivant :
A étant une matrice de $SL(n, \mathbb{Z})$ diagonalisable, à valeurs propres positives toutes distinctes de 1, on a :

Lemme 4.4: *Tout $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n-$morphisme de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $bpr_1 + p$, où p est une fonction $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n-$périodique (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$, $p(\mathbf{p} \cdot x) = p(x)$) s'annulant sur $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$.*

Démonstration: [Preuve du Lemme]
Déterminons d'abord les morphismes de groupes de $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$. Si θ est un tel morphisme, la restriction $\theta(0, .)$ à $\{0\} \times_A \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ étant un morphisme de groupes additif de $\mathbb{R}^n$dans $\mathbb{R}$, est linéaire et il en est de même de $\theta(., 0)$ la restriction θ à $\mathbb{R} \times_A \{0\} \cong \mathbb{R}$; et ces deux applications linéaires sont les prolongements respectifs de morphismes de groupes additifs $\theta(0, .)_{|0 \times_A \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^n}$ et $\theta(., 0)_{|\mathbb{Z} \times_A 0 \cong \mathbb{Z}}$. Soit (e_i) la base canonique

de $\mathbb{R}^n$. En remarquant que dans $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$, $(t,s) = (0,s) \cdot (t,0)$ on a
$(*)$: pour tout t dans $\mathbb{R}$ et $s = \sum_1^n s_i e_i$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\theta(t,s) = \alpha t + \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i,$$

où $\alpha = \theta(1,0)$ et $\beta_i = \theta(0,e_i)$. De

$$\theta\left(t+t', A^t s' + s\right) = \theta\left((t,s).(t',s')\right) = \theta(t,s)(t's').$$

Il vient avec $(*)$ que pour tous t, t' dans $\mathbb{R}$ et s, s' dans $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t+t') + \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(A^t s'\right)_i = \alpha t + \alpha t' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i (s_i + s'_i)$$

Il en résulte que pour tous t dans $\mathbb{R}$ et s dans $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(A^t s\right)_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i$$

En particulier pour $t = 1$ et $s = e_j$, on a pour tout $j, 1 \leq j \leq n$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{ij} = \beta_j$, où $A = (a_{ij})$; ${}^t A\beta = \beta$ où $\beta = \sum_1^n \beta_i e_i$; mais ceci n'est possible que si et seulement si $\beta = 0$ puisque, par hypothèse,1 n'est pas une valeur propre de A. Ainsi donc $\theta = \alpha pr_{1.}$ Enfin si θ est un $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n-$morphisme de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on obtient le résultat en posant $\alpha = \theta(1,0)$, en écrivant que $\theta = \alpha pr_1 + (\theta - \alpha pr_1)$ et en remarquant que $p = \theta - \alpha pr_1$ est $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n-$périodique et s'annule sur $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$. □

Démonstration: [Preuve du Théorème]
1. Si $m = n$ alors $\mathcal{D}$ est un drapeau riemannien minimal et on a le résultat avec le corollaire 3.3.
2. Si $m = n-1$, les feuilletages du drapeau sont tous transversalement parallélisables (corollaire 3.2). En particulier le flot riemannien $\mathcal{F}_1$ est complètement régulier, et la preuve de la proposition 4.1, permet de supposer que $M = T_A^{n+1}$ et que $\mathcal{F}_1$ est un feuilletage de Lie homogène dont la restriction à chaque fibre est le feuilletage linéaire $\mathcal{F}$ correspondant à une même direction propre v_1 de A ; A étant la matrice explicitée plus haut. $\mathcal{D}$ est donc un

drapeau parallélisable dont le flot est un feuilletage de Lie ayant une algèbre de Lie structurale de dimension $n-1$. Ainsi, sauf peut être, le feuilletage de codimension *un*, tous les feuilletages de $\mathcal{D}$ ont la même fibration basique $\mathbb{T}^n \hookrightarrow M \to \mathbb{S}^1$ à fibres saturées pour chacun des feuilletages. En plus comme pour chaque feuilletage $\mathcal{F}_i$, le groupe des automorphismes des champs globaux $\mathcal{F}_i-$ feuilletés opère transitivement sur M, $\mathcal{D}$ induit sur chaque fibre le même drapeau riemannien minimal modèle $\mathcal{D}' = \left(\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}, \mathcal{F}'_2, \cdots, \mathcal{F}'_{n-1}\right)$ qui, en fait, est conjugué à un drapeau linéaire du tore $\mathbb{T}^n$ (corollaire 3.3). Pour la suite on distinguera deux cas :

a) Si $A = I$, $M = \mathbb{T}^{n+1}$, et le drapeau est linéaire ; et pour chaque i, $1 \leq i \leq n-1$ le feuilletage $\mathcal{F}_i$ s'identifie au feuilletage vertical du fibré trivial $\mathbb{T}^{n+1} = S^1 \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ provenant du feuilletage linéaire $\mathcal{F}'_i$ et le feuilletage de codimension *un* pouvant être $\bar{\mathcal{F}}_1$, le feuilletage par les adhérences des feuilles du flot, ou un feuilletage minimal à feuilles cylindriques.

b) Si $A \neq I$, M est isomorphe au tore hyperbolique non trivial $\mathbb{T}^{n+1}_A$. Soit $< u_1 = v_1, u_2, \cdots, u_n >$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\mathcal{D}'$ *i.e.* telle que pour $0 < i < n$, $< u_1 = v_1, \cdots, u_i >$ soit une direction du feuilletage linéaire $\mathcal{F}'_i$. Montrons que $\mathcal{D}$ est conjugué au drapeau modèle de la proposition 4.1.

Pour cela considérons l'isomorphisme linéaire L de $\mathbb{R}^n$ défini par $L(u_i) = v_i$ et la matrice $\tilde{A} = BAB^{-1}$; où B est la matrice (dans la base canonique) de L.

L'isomorphisme de variétés $id_{\mathbb{R}} \times L$ de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R} \times_{\tilde{A}} \mathbb{R}^n$ passe au quotient pour donner un isomorphisme de variétés φ de $\mathbb{T}^{n+1}_A$ sur

$$N = \mathbb{R} \times_{\tilde{A}} L(\mathbb{R}^n) \diagup \mathbb{Z} \times_{\tilde{A}} L(\mathbb{Z}^n)$$

de sorte le diagramme suivant, où les flèches verticales désignent les projections canoniques, est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n & \xrightarrow{id_{\mathbb{R}} \times L} & \mathbb{R} \times_{\tilde{A}} \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^{n+i}_A & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

et on a la fibration localement triviale suivante :

$$\frac{\mathbb{R}^n}{L(\mathbb{Z}^n)} \cong \mathbb{T}^n \hookrightarrow N \to \mathbb{S}^1$$

Puisque $\tilde{A}$ laisse invariant les feuilletages relevés du drapeau

$$L(\mathcal{D}') = \left(L(\mathcal{F}'_1) = \mathcal{F}, L(\mathcal{F}'_2), \cdots, L(\mathcal{F}'_{n-1})\right)$$

sur $\mathbb{R}^n$, alors les feuilletages verticaux du fibré $[0,1] \times \frac{\mathbb{R}^n}{L(\mathbb{Z}^n)} \to [0,1]$ correspondants aux feuilletages de L($\mathcal{D}'$) passent au quotient et se projettent sur

$$N = [0,1] \times \mathbb{T}^n \diagup (0,x) \sim \big(1, \phi_{\widetilde{A}}(x)\big)$$

pour donner le drapeau $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_{n-1})$. Il est clair que φ conjugue le drapeau $\mathcal{D}_1$ et le drapeau modèle de $\mathbb{T}^{n+1}_A$ privé de son feuilletage de codimension *un*.
Il reste à établir que $\mathcal{F}_n$ est un feuilletage de Lie homogène que φ conjugue au feuilletage de codimension *un* du drapeau modèle. Que $\mathcal{F}_n$ soit un feuilletage de Lie vient du fait que $\mathcal{F}_n$ est à la fois transversalement parallélisable et orientable. Si en plus χ_n est une application développante de $\mathcal{F}_n$ sur $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ le revêtement universel de $M \cong \mathbb{T}^{n+1}_A$, puisque χ_n est un $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n-$morphisme de $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$,et puisque 1 n'est pas une valeur propre de A, alors d'après le lemme précédent χ_n est la forme $bpr_1 + P$; où P est une fonction s'annulant sur $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$. Il suit que le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}_n$ est de la forme $b\mathbb{Z}$, *i.e.* discret uniforme ; par suite d'après [5] $\mathcal{F}_n$ est à feuilles fermées.
Comme les autres feuilletages du drapeau sont à feuilles non fermées, alors le feuilletage $\mathcal{F}_n$ n'est rien d'autre que le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}_1$, le feuilletage par les adhérentces des feuilles du flot ; ce qui le conjugue, automatiquement par φ, au feuilletage de codimension *un* du drapeau modèle, puisque ce dernier feuilletage n'est aussi rien d'autre que le feuilletage par les adhérences de feuilles du flot modèle.

En résumé dans le cas où l'algèbre de Lie structurale du flot est $\mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^{n-1}$, on a la classification suivante :
Etant donné un drapeau riemannien complet d'une $n+1-$variété compacte connexe M, si la dimension m de l'algèbre de Lie structurale du flot est n ou $n-1$, alors on a les possibilités suivantes :
• $m = n$. Le drapeau est conjugué à un drapeau linéaire minimal du tore $\mathbb{T}^{n+1}$.
• $m = n-1$. Le drapeau est conjugué à un drapeau de Lie de feuilletages homogènes ; à l'exception du feuilletage de codimension *un*, les feuilletages sont à feuilles ni fermées, ni denses ;
- Si la matrice $A \in Sl(n,\mathbb{Z})$ associée au flot est l'identité, $M = \mathbb{T}^{n+1}$ et le drapeau est linéaire ; le feuilletage de codimension *un* est soit minimal à feuilles cylindriques, soit le feuilletage par les adhérences des feuilles du flot.
- Si $A \neq I$, M est le tore hyperbolique non trivial $\mathbb{T}^{n+1}_A$. Et le feuilletage de codimension *un* est le feuilletage par les adhérences des feuilles du flot. $\square$

Conclusion

L'ensemble des résultats obtenus sur les drapeaux([3],[4]) permet de dire comme pour les feuilletages que sur une *variété compacte et connexe.*
1) Tout drapeau riemannien est, à un relèvement près, un drapeau parallélisable.
2) Tout drapeau parallélisable (d'indice de saturation > 1) est, à une fibration près, un drapeau de Lie.
3) Tout drapeau de Lie minimal est, à une conjugaison près, un drapeau linéaire.

Références

[1] A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau. A class of C^{∞} stable foliations. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 13 :667–704, 1993.

[2] R. Almeida and P. Molino. Flots Riemanniens sur les 4-variétés compactes. *Tôhoku Mathematical Journal*, 38 :313–326, 1986.

[3] B.Bossoto and H.Diallo. Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens. *JP Journal of Geometry and Topology, University of Allahabad, INDIA*, 2 :281–288, 2002.

[4] H. Diallo. Sur les drapeaux de Lie. *Afrika Mathematika*, 13 :75–86, 2002.

[5] E. Fédida. Feuilletages du plan. Feuilletages de Lie. Thèse d'Etat, Strasbourg, 1973.

[6] P. Molino. Géométrie globale des feuilletages riemanniens. *Proc. Kon. Nederland Akad Ser. A*, 85 :45–76, 1982.

[7] Y.Carrière. Flots riemanniens. In *Structures transverses des feuilletages,* Astérisque, volume 116, pages 31–52.

Hassimiou Diallo
Ecole Normale Supérieure
Laboratoire de Mathématiques
Département des Sciences et Technologie
08 BP 10
Abidjan
CÔTE D'IVOIRE
diallomh@yahoo.fr