

# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

NAJI YEBARI, ABDERAHMANE ELKHATTAT

### Stabilisation uniforme d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli

Volume 10, n°1 (2003), p. 161-180.

[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2003\\_\\_10\\_1\\_161\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2003__10_1_161_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Stabilisation uniforme d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli

Naji Yebari  
Abderahmane Elkhattat

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions une équation des poutres d'Euler-Bernoulli, on contrôle par combinaison linéaire de vitesse et vitesse de rotation appliquées à l'une des extrémités du système. Tout d'abord nous montrons que le problème est bien posé et qu'il y a stabilité uniforme sous certaines conditions portant sur les coefficients de feedback. Puis nous estimons le taux optimal de décroissance de l'énergie du système par la méthode de Shkalikov.

## 1 Introduction et résultats principaux

Nous considérons une poutre d'Euler-Bernoulli, la poutre est encadrée à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité en force et moment par une combinaison linéaire de la vitesse et de la vitesse de rotation. Sans perte de généralité, la longueur, la masse linéique et la rigidité de flexion de la poutre sont supposées égales à l'unité. Soit  $y(x, t)$  la déviation transversale au point  $x$  et au temps  $t$ , nous obtenons le système suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} y_{tt} + y_{xxxx} = 0 & \text{dans } (0, 1) & t > 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0 & & t > 0, \\ -y_{xx}(1, t) = f_0(t) & & t > 0, \\ y_{xxx}(1, t) = f_1(t) & & t > 0, \\ y(\cdot, 0) = y_0(\cdot), y_t(\cdot, 0) = y_1(\cdot) & \text{dans } (0, 1), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} f_0(t) = -2\varepsilon\mu_{1,1}y_t(1, t) + \mu_{1,2}y_{xt}(1, t) & t > 0, \\ f_1(t) = \mu_{2,1}y_t(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_{xt}(1, t) & t > 0, \end{cases}$$

où  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\mu_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  sont des constantes positives telles que

$$\mu_{1,2}\mu_{2,1} > (\mu_{1,1} + \mu_{2,2})^2. \quad (1.1)$$

Le système  $(P)$  dans le cas particulier :  $\mu_{1,1} = \mu_{2,2} = 0$ ,  $\mu_{1,2}\mu_{2,1} \geq 0$ , est étudié dans les papiers [1], [2] et [9], où il est démontré que le problème est bien posé et est uniformément exponentiellement stable. Plus précisément, le cas où on a juste  $\mu_{2,1} > 0$  (contrôle force avec une vitesse), qui ne vérifie pas (1.1), est traité par Chen, Delfour et al [1], avec des multiplicateurs. Il en est de même du cas où on a juste  $\mu_{1,2} > 0$  (contrôle moment avec une vitesse angulaire) traité par Chen, Krantz et al [2]. La méthode des multiplicateurs ne suffit pas, ils ont utilisé un théorème de F.Huang [8] pour établir la stabilité uniforme. F. Conrad [3] et F.Z. Saouri [14] ont continué l'étude du système  $(P)$  dans le cas où on a un contrôle force (resp. moment) avec une vitesse (resp. angulaire) seulement. Ils ont prouvé que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par le spectre du système en utilisant la théorie de Shkalikov qui est efficace pour ce genre de problème. Ceci est justifié dans le cas d'une poutre avec contrôle force ( $\mu_{i,j} = 0$  sauf pour  $\mu_{2,1} > 0$ ), où il est démontré dans [4], que l'on a une base de Riesz seulement pour presque tout  $\mu_{2,1} > 0$  grâce à un argument de perturbation de type Bari. Le comportement asymptotique des valeurs propres du système  $(P)$  a été étudié par Rideau [13][p. 73-76].

Dans ce papier, nous considérons le système  $(P)$  dans le cas (1.1) et nous montrons au préalable que le système  $(P)$  est bien posé au sens des semi-groupes de contraction et uniformément stable i.e :  $(y(., t), y_t(., t))^T$  tend exponentiellement vers zéro dans un certain espace fonctionnel. Ensuite, on montre que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au problème  $(P)$ , en appliquant la théorie de A. Shkalikov utilisée dans Grabowski [6].

Soit  $y$  une solution régulière du problème  $(P)$ . On introduit son énergie associée  $E(t)$  comme suit

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \{y_t^2(x, t) + y_{xx}^2(x, t)\} dx. \quad (1.2)$$

Un calcul formel montre que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})y_{xt}(1, t)y_t(1, t) - \mu_{1,2}y_{xt}^2(1, t) - \mu_{2,1}y_t^2(1, t). \quad (1.3)$$

## ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

L'hypothèse (1.1) implique que l'énergie  $E(t)$  est décroissante et définit une fonction de Lyapunov.

Soit  $V = \{ y \in H^2(0, 1); y(0) = y_x(0) = 0 \}$  et l'espace de Hilbert  
 $H = V \times L^2(0, 1)$  avec le produit scalaire suivant

$$\left\langle (u, v)^T, (w, z)^T \right\rangle_H = \int_0^1 (u_{xx}(x, t)w_{xx}(x, t) + v(x, t)z(x, t)) dx. \quad (1.4)$$

Considérons l'opérateur linéaire défini par

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v)^T \in H, u_{xx} \in H^2(0, 1), v \in V / \\ -u_{xx}(1) = -2\varepsilon\mu_{1,1}v(1) + \mu_{1,2}v_x(1), u_{xxx}(1) = \mu_{2,1}v(1) - 2\varepsilon\mu_{2,2}v_x(1) \end{array} \right\}, \quad (1.5)$$

et pour tout  $(u, v)^T \in D(A)$

$$A(u, v)^T = (-v, u_{xxxx})^T, \quad (1.6)$$

avec la donnée initiale  $W_0 = (y_0, y_1)^T$ .

Le problème (P) contrôlé en boucle fermée à l'une de ses extrémités peut être formulé sous forme d'un problème d'évolution sur  $H$ .

$$(P_1) \quad \begin{cases} W_t(t) = -AW(t), \\ W(0) = W_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $W(t) = (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t))^T$ .

Dans toute la suite de ce travail les constantes  $\mu_{ij}$  sont supposées satisfaire l'hypothèse (1.1).

Nos principaux résultats sont les suivants :

**Théorème 1.1:** *Pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1)^T \in H$ , l'énergie  $E(t)$  du problème (P) est une fonction de Lyapunov, et  $E(t)$  converge asymptotiquement vers zéro dans  $H$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Théorème 1.2:** *Soit  $M > 1$  fixé, alors on peut trouver une constante positive  $\omega > 0$  tel que pour toute donnée initiale dans  $H$ , nous avons*

$$E(t) \leq ME(0) \exp(-\omega t) \quad \forall t \geq 0.$$

**Théorème 1.3:** *Soit  $S = \{(\phi_n, \psi_n), n \in Z\}$  un système des vecteurs propres généralisés associé à l'opérateur  $-A$  convenablement normalisé, alors  $S$  forme une base de Riesz pour l'espace de l'énergie  $H$ .*

Le plan du papier est le suivant. Dans la section 2, nous donnons la preuve de nos principaux résultats. Celle ci sera composée de deux sous paragraphes. Dans le premier, nous montrons que notre système est bien posé au sens des semi-groupes de contraction et nous prouvons le théorème 1.1, le second sous paragraphe contient la preuve du théorème 1.2. La dernière section, contient la preuve du théorème 1.3.

## 2 Preuve des résultats principaux

### 2.1 Preuve du théorème 1.1

#### 2.1.1 Le problème (P<sub>1</sub>) est bien posé

**Lemme 2.1:** *L'opérateur  $A : D(A) \subset H \mapsto H$  défini par (1.5) et (1.6) engendre un  $C_0$  semi-groupe de contraction  $S(t)$  sur l'espace d'énergie  $H$ .*

**Preuve du lemme 2.1** D'après le théorème de Lumer-Phillips, il suffit de montrer que  $A$  est un opérateur maximal monotone [11] [p. 14].

Premièrement, soit  $W = (y, z)^T \in D(A)$  alors tout calcul fait montre que

$$\langle AW, W \rangle_H = -2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})z(1)z_x(1) + \mu_{1,2}z_x^2(1) + \mu_{2,1}z^2(1).$$

Nous déduisons de l'hypothèse (1.1) que

$$\langle AW, W \rangle_H \geq (\mu_{1,2}^{\frac{1}{2}} |z_x(1)| - \mu_{2,1}^{\frac{1}{2}} |z(1)|)^2. \tag{2.1}$$

Ceci prouve que l'opérateur  $A$  est monotone.

Maintenant, montrons la surjection de l'opérateur  $I + \lambda_0 A$ ,  $\lambda_0 > 0$  i.e prouvons que pour tout  $(f, g)^T \in H$ , on peut trouver  $(u, v)^T \in D(A)$  tel que  $(I + \lambda_0 A)(u, v)^T = (f, g)^T$ . Ceci nous amène d'une façon équivalente à chercher le couple  $(u, v)^T$  solution du système

$$\begin{cases} u - \lambda_0 v = f, \\ v + \lambda_0 u_{xxxx} = g, \\ -u_{xx}(1) = -2\varepsilon\mu_{1,1}v(1) + \mu_{1,2}v_x(1), \\ u_{xxx}(1) = \mu_{2,1}v(1) - 2\varepsilon\mu_{2,2}v_x(1), \\ (u, v)^T \in H, (u_{xx}, v)^T \in H^2(0, 1) \times V. \end{cases} \tag{2.2}$$

## ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

En éliminant l'inconnue  $v$  du système (2.2), nous obtenons le problème réduit suivant

$$\begin{cases} u + \lambda_0^2 u_{xxxx} = \lambda_0 g + f = F, \\ -u_{xx}(1) = -\frac{2\varepsilon\mu_{1,1}}{\lambda_0}(u(1) - f(1)) + \frac{\mu_{1,2}}{\lambda_0}(u_x(1) - f_x(1)), \\ u_{xxx}(1) = \frac{\mu_{2,1}}{\lambda_0}(u(1) - f(1)) - \frac{2\varepsilon\mu_{2,2}}{\lambda_0}(u_x(1) - f_x(1)), \\ u(0) = u_x(0) = 0, \quad u \in H^4(0, 1). \end{cases} \quad (2.3)$$

Maintenant, pour tout couple  $(u, \varphi)^T \in V \times V$ , nous posons

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 u\varphi dx + \lambda_0^2 \int_0^1 u_{xx}\varphi_{xx} dx +$$

$$\lambda_0[-2\varepsilon(\mu_{1,1}u(1)\varphi_x(1) + \mu_{2,2}u_x(1)\varphi(1)) + \mu_{1,2}u_x(1)\varphi_x(1) + \mu_{2,1}u(1)\varphi(1)],$$

qui est une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ . On définit la forme linéaire continue  $L$  sur  $V$  par

$$L(\varphi) = \int_0^1 F\varphi dx + \lambda_0[(-2\varepsilon\mu_{1,1}f(1) + \mu_{1,2}f_x(1))\varphi_x(1) + (\mu_{2,1}f(1) - 2\varepsilon\mu_{2,2}f_x(1))\varphi(1)].$$

Grâce à l'hypothèse (1.1), on peut facilement vérifier que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $V \times V$  pour tout  $\lambda_0 > 0$ . Par le théorème de Lax Milgram, il existe un élément unique  $u$  dans  $V$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

Nous déduisons de l'égalité ci-dessus que le système (2.3) admet une solution unique  $u \in H^4(0, 1) \cap V$ , ce qui implique que  $v = \frac{1}{\lambda_0}(u - f) \in V$ , et par construction  $(u, v)^T \in D(A)$ . Donc le Lemme 2.1 découle du théorème de Lumer-Phillips, par conséquent pour toute condition initiale  $(y_0, y_1)^T \in D(A)$ , le problème (1.5)-(1.7) admet une solution unique:

$$(y, z)^T \in C^0(IR^+, D(A)) \cap C^1(IR^+, H) \text{ avec } z = y_t.$$

L'application  $(y_0, y_1)^T \mapsto (y, z)^T$  s'étend en une contraction  $S(t)$  sur  $H$  telle que  $(S(t))_{t \geq 0}$  soit fortement continue, et on peut définir pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1)^T$  dans  $H$ , la solution faible de (1.5)-(1.7) par

$$(y(t), z(t))^T = S(t) (y_0, y_1)^T, \quad t \geq 0 \text{ avec } (y, z)^T \in C(IR^+, H).$$

*Remarque:* Grâce au Lemme 2.1 et un résultat de régularité dû à Haraux [7], on déduit que pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1)^T$  dans  $D(A)$ , le problème (P) admet une unique solution  $y$  telle que  $y \in C^0(\mathbb{R}^+, H^4(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^2(0, 1)) \cap C^2(\mathbb{R}^+, L^2(0, 1))$ . Si la donnée initiale est dans  $H$ , on a  $y \in C^0(\mathbb{R}^+, V) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(0, 1))$ .

### 2.1.2 Preuve de la stabilité asymptotique.

En raison de la densité de  $D(A)$  dans  $H$ , de la contractivité du semi-groupe  $S(t)$ , il suffit donc d'établir la convergence forte pour des données initiales dans  $D(A)$ .

Soit  $(y_0, y_1)^T \in D(A)$ , alors il est clair que  $E(t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ , et pour  $W = (y, y_t)^T$  on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \langle W, \frac{dW}{dt} \rangle_H = \langle W, -AW \rangle_H \\ &= 2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})y_{xt}(1, t)y_t(1, t) - \mu_{1,2}y_{xt}^2(1, t) - \mu_{2,1}y_t^2(1, t) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donc  $E(t)$  est une fonction de Lyapunov. La résolvante de  $A$  est compacte, il en résulte que la trajectoire  $O^+(y_0, y_1) = \{(y(t), y_t(t))^T, t \geq 0\}$  est relativement compacte dans  $H$  pour des données initiales dans  $D(A)$ . On applique le principe d'invariance de Lasalle [10] à l'ensemble  $\omega$ -limite

$$\omega(y_0, y_1) = \left\{ (z_0, z_1)^T \in H, (z_0, z_1)^T = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)(y_0, y_1)^T \text{ où } t_n \rightarrow +\infty \right\}$$

de la trajectoire  $O^+(y_0, y_1)$ . Notons que  $S(t)(y_0, y_1)^T \rightarrow \omega(y_0, y_1)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Pour montrer la stabilité asymptotique, il suffit de prouver que pour tout  $(y_0, y_1)^T \in D(A)$ , l'ensemble  $\omega$ -limite se réduit à  $\{(0, 0)\}$ .

Pour  $(y_0, y_1)^T \in D(A)$ , (2.4) implique

$$E(t) - E(s) + \int_s^t \{-2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})y_{xt}(1, \sigma)y_t(1, \sigma) + \mu_{1,2}y_{xt}^2(1, \sigma) + \mu_{2,1}y_t^2(1, \sigma)\} d\sigma = 0.$$

Soit  $(z_0, z_1)^T \in \omega(y_0, y_1) \subset D(A)$ . Si  $(z(t), z_t(t))^T$  est la trajectoire associée à  $(z_0, z_1)^T$ , alors nous avons

$$\int_s^t \{-2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})z_{xt}(1, \sigma)z_t(1, \sigma) + \mu_{1,2}z_{xt}^2(1, \sigma) + \mu_{2,1}z_t^2(1, \sigma)\} d\sigma = 0. \tag{2.5}$$

## ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

L'hypothèse (1.1) entraîne que la fonction à intégrer dans (2.5) est positive donc elle est nulle et d'après (2.1) nous obtenons

$$\mu_{1,2}^{\frac{1}{2}} |z_{xt}(1, t)| = \mu_{2,1}^{\frac{1}{2}} |z_t(1, t)|, \quad (2.6)$$

or  $-2\varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})z_t(1, t)z_{xt}(1, t) + \mu_{1,2}z_{xt}^2(1, t) + \mu_{2,1}z_t^2(1, t) = 0$ ,

donc  $2(\mu_{2,1} \pm (\mu_{1,1} + \mu_{2,2}))\sqrt{\frac{\mu_{2,1}}{\mu_{1,2}}}z_t^2(1, t) = 0$  et d'après (1.1) nous obtenons

$z_t(1, t) = z_{xt}(1, t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . D'où,  $z$  sera solution du système réduit suivant:

$$\begin{cases} z_{tt} + z_{xxxx} = 0 & \text{dans } (0, 1) \quad t > 0, \\ z(0, t) = z_x(0, t) = 0 & t > 0, \\ z_{xx}(1, t) = z_{xxx}(1, t) = 0 & t > 0, \\ (z_0, z_1) \in \omega(y_0, y_1) \subset D(A). \end{cases} \quad (2.7)$$

Par conséquent, la stabilisation forte du système ( $P$ ) se ramène au problème d'unicité (2.7), qui avec  $z_t(1, t) = 0$  devient le problème d'unicité avec un contrôle force proportionnel à la vitesse, qui est asymptotiquement stable [1], donc la solution du système (2.7) est identiquement nulle, ainsi  $\omega(y_0, y_1) = \{(0, 0)\}$ . La preuve du théorème 1.1 est donc établie.

*Remarque:* La stabilité forte de la version non linéaire du système ( $P$ ) dans le cas où les contrôles  $f_0$  et  $f_1$  sont des graphes maximales monotones dans  $IR^2$ , fonctions respectives de  $u_{xt}(1, t)$  et  $u_t(1, t)$  a été prouvée par F. Conrad et M. Pierre [5].

## 2.2 Preuve du théorème 1.2

Soit  $y$  une solution régulière du système (P). Nous introduisons les fonctions suivantes

$$\rho_1(t) = 4 \int_0^1 x y_t y_x dx - 5 \int_0^1 y_t y dx, \quad \rho_2(t) = C_0 y_x(1, t) \int_0^1 x^2 y_t dx,$$

$$\rho_3(t) = C_0 y(1, t) \left\{ \int_0^1 x^2 y_t dx + \mu_{2,1} y(1, t) - 2\varepsilon \mu_{2,2} y_x(1, t) \right\},$$

$$\rho(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t) + \rho_3(t),$$

où  $C_0$  est une constante qui sera déterminée ultérieurement.

On suit la même technique de démonstration que celle utilisée par B.Rao [12] pour prouver la stabilité uniforme pour un système hybride contenant un terme en  $y(1, t)$  (resp.  $y_x(1, t)$ ) dans le contrôle force (resp. moment) et avec masse et moment d'inertie à l'autre bout donc des termes  $y_{tt}(0, t)$ ,  $y_{xtt}(0, t)$  en



plus. Le système  $(P)$  est appelé deuxième problème de Rideau selon P. Grabowski [6]. Le cas d'une poutre encastrée en  $x = 0$ , ayant le même contrôle frontière que le système hybride [12] fera l'objet d'une prochaine étude.

**Proposition 2.2:** *Supposons que la condition (1.1) soit satisfaite, alors il existe des constantes positives  $C_2, C_3$  et  $\theta > 0$  telles que*

$$|\rho(t)| \leq C_2 E(t) \quad \forall t \geq 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{d\rho}{dt}(t) \leq -\theta E(t) + C_3 (y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)) \quad \forall t \geq 0, \tag{2.9}$$

pour toute solution  $y$  du système  $(P)$ .

**Preuve.** L'estimation (2.8) peut être obtenue facilement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par contre (2.9) est beaucoup plus difficile à établir. Pour plus de clarté, la démonstration de l'estimation (2.9), va se faire en 4 étapes.

**Etape1.** Calcul de la dérivation de  $\rho_1(t)$ .

En utilisant l'équation  $(P)_1$ , un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt}(t) &= - \int_0^1 \{7y_t^2(x, t) + y_{xx}^2(x, t)\} dx + 5y_{xxx}(1, t)y(1, t) \tag{2.10} \\ &\quad + 2y_{xx}^2(1, t) + 2y_t^2(1, t) - 4y_{xxx}(1, t)y_x(1, t) - y_{xx}(1, t)y_x(1, t). \end{aligned}$$

**Etape2.** Calcul de la dérivation de  $\rho_2(t)$ .

Nous déduisons de l'équation  $(P)_1$ , l'expression de la dérivée de  $\rho_2$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_2}{dt}(t) &= C_0 \{y_{xt}(1, t) \int_0^1 x^2 y_t dx - y_{xxx}(1, t)y_x(1, t) \tag{2.11} \\ &\quad + 2y_{xx}(1, t)y_x(1, t) - 2y_x^2(1, t)\}. \end{aligned}$$

**Etape3.** Calcul de la dérivation de  $\rho_3(t)$ .

En utilisant l'équation  $(P)_1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_3}{dt}(t) &= C_0 y_t(1, t) \{ \int_0^1 x^2 y_t dx + \mu_{2,1}y(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_x(1, t) \} \tag{2.12} \\ &\quad + C_0 y(1, t) \{ \int_0^1 x^2 y_{tt} dx + \mu_{2,1}y_t(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_{xt}(1, t) \}. \end{aligned}$$

ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

En tenant compte de la condition au bord  $(P)_4$ , nous calculons

$$\begin{aligned} - \int_0^1 x^2 y_{xxxx} dx &= -y_{xxx}(1, t) + 2y_{xx}(1, t) - 2y_x(1, t) \\ &= 2y_{xx}(1, t) - 2y_x(1, t) - \mu_{2,1}y_t(1, t) + 2\varepsilon\mu_{2,2}y_{xt}(1, t), \end{aligned}$$

en insérant la relation ci-dessus dans (2.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_3}{dt}(t) &= C_0y_t(1, t) \left\{ \int_0^1 x^2 y_t dx + \mu_{2,1}y(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_x(1, t) \right\} \quad (2.13) \\ &\quad + 2C_0y(1, t) \{y_{xx}(1, t) - y_x(1, t)\}. \end{aligned}$$

**Etape 4.** Estimation de la dérivée de  $\rho(t)$ .

En combinant (2.10), (2.11) et (2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}(t) &= - \int_0^1 \{7y_t^2(x, t) + y_{xx}^2(x, t)\} dx + 5y_{xxx}(1, t)y(1, t) \quad (2.14) \\ &\quad - (C_0 + 4)y_{xxx}(1, t)y_x(1, t) + (2C_0 - 1)y_{xx}(1, t)y_x(1, t) \\ &\quad + C_0y_{xt}(1, t) \int_0^1 x^2 y_t dx - 2C_0y_x^2(1, t) + 2y_{xx}^2(1, t) \\ &\quad + C_0y_t(1, t) \left\{ \int_0^1 x^2 y_t dx + \mu_{2,1}y(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_x(1, t) \right\} \\ &\quad + 2C_0y(1, t) \{y_{xx}(1, t) - y_x(1, t)\} + 2y_t^2(1, t). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions au bord  $(P)_2 - (P)_3$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut trouver une constante positive  $C$  telle que

$$\begin{aligned} &C_0y_{xt}(1, t) \int_0^1 x^2 y_t dx - 2C_0y_x^2(1, t) + 2y_{xx}^2(1, t) + \quad (2.15) \\ &C_0y_t(1, t) \left\{ \int_0^1 x^2 y_t dx + \mu_{2,1}y(1, t) - 2\varepsilon\mu_{2,2}y_x(1, t) \right\} + \\ &2C_0y(1, t) \{y_{xx}(1, t) - y_x(1, t)\} + 2y_t^2(1, t) \\ &\leq C_0 \int_0^1 y_t^2(x, t) dx + \frac{13}{2}C_0 \int_0^1 y_{xx}^2(x, t) dx + C(y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)). \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions au bord  $(P)_2, (P)_3, (P)_4$  et en utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, alors pour tout  $\varepsilon_0 > 0$ , nous obtenons

$$5y_{xxx}(1, t)y(1, t) - (C_0 + 4)y_{xxx}(1, t)y_x(1, t) + (2C_0 - 1)y_{xx}(1, t)y_x(1, t)$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon_0(y_t^2(1, t) + 2y_x^2(1, t)) + C(y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)) \quad (2.16) \\ &\leq 3\varepsilon_0 \int_0^1 y_{xx}^2(x, t) dx + C(y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)). \end{aligned}$$

En remplaçant les estimations (2.15) et (2.16) dans (2.14) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}(t) &\leq \int_0^1 (- (7 - C_0)y_t^2(x, t) - \{1 - \frac{13}{2}C_0 - 3\varepsilon_0\}y_{xx}^2(x, t)) dx \\ &\quad + C_3 (y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Maintenant, en choisissant dans (2.17)

$0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{6}$ ,  $0 < C_0 < \min(\frac{13}{2}, \frac{1 - 6\varepsilon_0}{13})$  et  $\theta = 2 \min(\frac{13}{2}, \frac{1 - 6\varepsilon_0}{13})$   
nous obtenons l'estimation souhaitée

$$\frac{d\rho}{dt}(t) \leq -\theta E(t) + C_3 (y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

**Preuve du théorème 1.2** Premièrement, d'après l'expression (1.3) de la dérivée de l'énergie  $E(t)$ , et en utilisant la condition (1.1) alors il est facile de vérifier que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -K (y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.18)$$

avec  $K = \min(\mu_{2,1} - \eta(\mu_{1,1} + \mu_{2,2}), \mu_{1,2} - \frac{(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})}{\eta})$  qui une constante strictement positive pour tout  $\eta \in \left] \frac{(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})}{\mu_{1,2}}, \frac{\mu_{2,1}}{(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})} \right[$ .

Maintenant, pour  $\delta > 0$ , on introduit la perturbation de l'énergie

$$E_\delta(t) = E(t) + \delta\rho(t).$$

Pour tout  $M > 1$  donné, en utilisant l'estimation (2.8), on peut déduire les inégalités suivantes

$$M^{-\frac{1}{2}} E_\delta(t) \leq E(t) \leq M^{\frac{1}{2}} E_\delta(t), \quad (2.19)$$

avec  $0 < \delta < C_2^{-1}(1 - M^{-\frac{1}{2}})$ .

En suite, en utilisant (2.9) et (2.18), nous avons

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt} + \delta \frac{d\rho(t)}{dt} \leq -\delta\theta E(t) + (\delta C_3 - K)(y_t^2(1, t) + y_{xt}^2(1, t)).$$

Alors pour  $\delta > 0$  assez petit, nous déduisons que

$$\frac{dE_\delta(t)}{dt} \leq -\delta\theta E(t) \leq -\delta\theta M^{-\frac{1}{2}} E_\delta(t).$$

En résolvant l'inégalité différentielle ci-dessus, nous obtenons

$$E_\delta(t) \leq E_\delta(0) \exp(-\theta\delta M^{-\frac{1}{2}} t) \text{ pour tout } t \geq 0,$$

ceci avec (2.19) implique que

$$E(t) \leq ME(0) \exp(-\omega t) \text{ pour tout } t \geq 0,$$

où  $\omega = \theta\delta M^{-\frac{1}{2}}$ . Ainsi la preuve du théorème 1.2 est établie.

### 3 Preuve du théorème 1.3

Dans le théorème 1.2, nous avons vu que le problème  $(P)$  est exponentiellement stable pour la norme induite par le produit scalaire défini par (1.4). Pour obtenir le taux optimal de la décroissance de l'énergie on va montrer qu'un système de vecteurs propres généralisés de l'opérateur  $-A$  défini par (1.5) et (1.6) forme une base de Riesz de l'espace  $H$ , ce qui implique que ce taux optimal est donné par la plus grande partie réelle des valeurs propres de cet opérateur. Une difficulté essentielle est que le problème spectral associé au système fait intervenir les valeurs propres dans les conditions au bord, alors on appliquera la théorie de Shkalikov [15] qui semble mieux adaptée à ce type de problème et qui donne des conditions pour qu'un système de vecteurs propres généralisés forme une base de Riesz dans des espaces convenables. Un bref rappel de la théorie de Shkalikov est présenté dans [6] et [14].

On considère le problème aux valeurs propres associé au système (1.5)-(1.7):

$$-AU = \lambda U, \tag{3.1}$$

avec  $U = (u, v)^T \in D(A)$ .

En posant  $\lambda = \tau^2$  et en éliminant  $v = \lambda u$ , le système (3.1) s'écrit de façon équivalente

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0, \\ u_{xxx}(1) + 2\varepsilon\mu_{2,2}\tau^2 u_x(1) - \mu_{2,1}\tau^2 u(1) = 0, \\ u_{xx}(1) + \mu_{1,2}\tau^2 u_x(1) - 2\varepsilon\mu_{1,1}\tau^2 u(1) = 0, \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les solutions de l'équation différentielle (3.2)<sub>1</sub> sont de la forme

$$u(x) = c_1 e^{\tau\omega_1 x} + c_2 e^{\tau\omega_2 x} + c_3 e^{\tau\omega_3 x} + c_4 e^{\tau\omega_4 x},$$

où

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ et } \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

sont les racines de son polynôme caractéristique. On pose

$$f_1(\tau, \omega) = \tau^2 e^{\tau\omega} \{ \tau\omega(\omega^2 + 2\varepsilon\mu_{2,2}) - \mu_{2,1} \}, \quad f_2(\tau, \omega) = \tau^2 e^{\tau\omega} \{ \omega^2 + \mu_{1,2}\tau\omega - 2\varepsilon\mu_{1,1} \}.$$

En substituant  $u$  dans les conditions au bord du système (3.2), on obtient

$$\begin{bmatrix} f_1(\tau, \omega_1) & f_1(\tau, \omega_2) & f_1(\tau, \omega_3) & f_1(\tau, \omega_4) \\ f_2(\tau, \omega_1) & f_2(\tau, \omega_2) & f_2(\tau, \omega_3) & f_2(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

On notera par  $\Delta(\tau)$  le déterminant caractéristique du système linéaire homogène (3.3). Ce dernier a une solution non nulle si et seulement si  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique. Un calcul direct donne (voir annexe)

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & -2\tau^7 \{ e^{-\sqrt{2}\tau} (-\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha - 2\mu\} \tau^{-1} - \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) \\ & + e^{-i\sqrt{2}\tau} (i\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha + 2\mu\} \tau^{-1} - i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) \\ & + e^{i\sqrt{2}\tau} (-i\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha + 2\mu\} \tau^{-1} + i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) \\ & + e^{\sqrt{2}\tau} (\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha - 2\mu\} \tau^{-1} + \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) + 4(2 - \alpha)\tau^{-1} \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où on a posé  $\mu = \varepsilon(\mu_{1,1} + \mu_{2,2})$  et  $\alpha = 1 - 4\mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{2,1}\mu_{1,2}$ .

*Remarque:* Puisque  $\mu_{1,2} \neq 0$ , alors pour  $|\tau|$  assez grand, les termes dominants des expressions entre crochets de (3.4) sont tous non nuls, donc les

ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

conditions au bord de (3.2) sont régulières. Dans ce qui suit, on va montrer la forte régularité des conditions au bord.

**Lemme 3.1:** (i)  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  défini par (3.4) si et seulement si  $\tilde{\tau} = \omega_4\tau$  est racine de la fonction  $g$  donnée par

$$g(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau} [2 - \alpha + \alpha \cosh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau}] + i[(\mu_{1,2}\tilde{\tau}^2 + \mu_{2,1}) \cosh \tilde{\tau} \sin \tilde{\tau} + (\mu_{1,2}\tilde{\tau}^2 - \mu_{2,1}) \sinh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau} - 2\tilde{\tau}\mu \sinh \tilde{\tau} \sin \tilde{\tau}]. \quad (3.5)$$

(ii) les zéros de la fonction  $g$  définie ci-dessus sont asymptotiquement simples et séparés, donc les conditions au bord du système (3.2) sont fortement régulières [15].

**Preuve du lemme 3.1** Dans ce qui suit on note  $\omega$  par  $\omega_4$ .

(i) En regroupant les termes  $(e^{\sqrt{2}\tau} \pm e^{-\sqrt{2}\tau})$  et  $(e^{-i\sqrt{2}\tau} \pm e^{i\sqrt{2}\tau})$  dans l'expression (3.4) de  $\Delta(\tau)$  et en utilisant les formules suivantes:

$$\sinh(\sqrt{2}\tau) = \sinh \omega\tau \cos \omega\tau + i \cosh \omega\tau \sin \omega\tau, \quad \sinh(i\sqrt{2}\tau) = -\sinh \omega\tau \cos \omega\tau + i \cosh \omega\tau \sin \omega\tau,$$

$$\cosh(\sqrt{2}\tau) = \cosh \omega\tau \cos \omega\tau + i \sinh \omega\tau \sin \omega\tau, \quad \cosh(i\sqrt{2}\tau) = \cosh \omega\tau \cos \omega\tau - i \sinh \omega\tau \sin \omega\tau.$$

En suite, en insérant ces formules dans (3.4), il en résulte d'une façon équivalente que toute racine  $\tau$  du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  est racine de la fonction  $f$  définie par

$$f(\tau) = -i\omega^2\tau^2(2 - \alpha) + (\mu_{1,2}\omega^3\tau^3 + \mu_{2,1}\omega\tau) \cosh \omega\tau \sin \omega\tau + (\mu_{1,2}\omega^3\tau^3 - \mu_{2,1}\omega\tau) \sinh \omega\tau \cos \omega\tau - i\omega^2\tau^2\alpha \cosh \omega\tau \cos \omega\tau - 2\omega^2\tau^2\mu \sinh \omega\tau \sin \omega\tau,$$

ce qui prouve la partie i) du Lemme 3.1 en effectuant le changement de variable  $\tilde{\tau} = \omega\tau$ .

(ii) Le développement asymptotique des racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  prouvé dans Rideau [13][p. 73-76] est donné comme suit

$$\tilde{\tau}_n = \pm \left\{ m\pi - \frac{\mu}{\mu_{1,2}m\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + i \left( \frac{\alpha}{2\mu_{1,2}m\pi} \right) \right\},$$

où  $m = n - \frac{1}{4}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrons que ces racines sont simples et séparées. Sinon, il existe une sous-suite notée encore  $(\tilde{\tau}_n)_{n \geq n_0}$  des racines de  $g$  au moins double. En dérivant  $g$  on obtient

$$\begin{aligned}
 g'(\tilde{\tau}_n) &= (2 - \alpha) + \alpha \cosh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n & (3.6) \\
 &+ \alpha \tilde{\tau}_n [\sinh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n - \cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n] \\
 &+ 2i\{(\mu_{1,2} - \mu)\tilde{\tau}_n[\cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n + \sinh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n] \\
 &+ (\mu_{2,1} - \mu) \sinh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n + \mu_{1,2} \tilde{\tau}_n^2 \cosh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n\}.
 \end{aligned}$$

On note que

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A = \operatorname{Re}(\tilde{\tau}_n) = m\pi - \frac{\mu}{\mu_{1,2}m\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)m\pi, \\
 B = \operatorname{Im}(\tilde{\tau}_n) = \frac{\alpha}{2\mu_{1,2}m\pi} \frac{c_\mu}{n} O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ car d'après (1.1) } c_\mu \neq 0, \cosh \tilde{\tau}_n = \\
 \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi, \sinh \tilde{\tau}_n = \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi, \\
 \tilde{\tau}_n^2 = -i\lambda_n = -\frac{2\mu}{\mu_{1,2}} + m^2\pi^2 + i\left(\frac{\alpha}{\mu_{1,2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ (voir [13])} \\
 \tilde{\tau}_n^2 \simeq m^2\pi^2 + i\left(\frac{\alpha}{\mu_{1,2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 \sin \tilde{\tau}_n \simeq \frac{-\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right), \quad \cos \tilde{\tau}_n \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right).
 \end{array} \right.$$

On remarque que pour  $n$  assez grand  $\tilde{\tau}_n$  se comporte de la même manière que pour le cas étudié dans [14] où  $\mu_{1,1} = \mu_{2,2} = \mu_{2,1} = 0$  et  $\mu_{1,2} > 0$ .

Posons  $\beta = \mu_{1,2} - \mu$ ,  $\delta = \mu_{2,1} - \mu$  et  $\eta = 2 - \alpha$ .

L'équation (3.6) telle que  $g'(\tilde{\tau}_n) = 0$  devient

$$\begin{aligned}
 &\eta + \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi\right) \\
 &+ \alpha[(m\pi \sinh m\pi + ic\pi \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &- (m\pi \cosh m\pi + ic\pi \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right)\right)] \\
 &+ 2i\{\beta[(m\pi \sinh m\pi + ic\pi \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &+ (m\pi \cosh m\pi + ic\pi \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right)\right)] \\
 &+ \delta\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi\right) +
 \end{aligned}$$

ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

$\mu_{1,2}(m^2\pi^2 + i(\frac{\alpha}{\mu_{1,2}} + O(\frac{1}{n}))) (\cosh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \sinh m\pi) (\frac{\sqrt{2}}{2} - iO(\frac{1}{n})) \} = 0$ ,  
où  $c$  est une constante réelle. Ce qui donne

$$\begin{aligned} & \eta + \alpha(\frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \cosh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \sinh m\pi) + \alpha[(\frac{\sqrt{2}}{2} m\pi \sinh m\pi \\ & + i\frac{\sqrt{2}}{2} c\pi \cosh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \sinh m\pi - ic\pi \sinh m\pi + O(\frac{1}{n}) \cosh m\pi) - (\frac{-\sqrt{2}}{2} m\pi \cosh m\pi \\ & - i\frac{\sqrt{2}}{2} c\pi \sinh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \cosh m\pi + ic\pi \cosh m\pi + O(\frac{1}{n}) \sinh m\pi)] \\ & + 2i\{\beta[(\frac{\sqrt{2}}{2} m\pi \sinh m\pi + i\frac{\sqrt{2}}{2} c\pi \cosh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \sinh m\pi - ic\pi \sinh m\pi + \\ & O(\frac{1}{n}) \cosh m\pi) + (\frac{-\sqrt{2}}{2} m\pi \cosh m\pi - i\frac{\sqrt{2}}{2} c\pi \sinh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \cosh m\pi \\ & + ic\pi \cosh m\pi + O(\frac{1}{n}) \sinh m\pi)] + \delta(\frac{-\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \sinh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \cosh m\pi) \\ & + \mu_{1,2}(\frac{\sqrt{2}}{2} m^2\pi^2 \cosh m\pi + i\frac{\sqrt{2}}{2} cm\pi^2 \sinh m\pi + iO(\frac{1}{n}) \cosh m\pi - icm\pi^2 \cosh m\pi \\ & + c^2\pi^2 \sinh m\pi) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cosh m\pi + O(\frac{1}{n})(\cosh m\pi - \sinh m\pi)\} = 0. \text{ Enfin on obtient} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \eta + \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha\pi + 2\mu_{1,2}c\pi^2 \right) m - \left( \sqrt{2}\beta c\pi + 2\beta c\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \cosh m\pi \\ & + \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha\pi - \sqrt{2}\mu_{1,2}c\pi^2 \right) m + (2\beta c\pi + \sqrt{2}\beta c\pi) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sinh m\pi = 0, \\ & \left[ \sqrt{2}\mu_{1,2}m^2\pi^2 - \sqrt{2}\beta m\pi + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha c\pi - \alpha c\pi \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \cosh m\pi \\ & + \left[ \sqrt{2}\beta m\pi + \left( 2\mu_{1,2}c^2\pi^2 - \sqrt{2}\delta + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha c\pi - \alpha c\pi \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sinh m\pi = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui est impossible, puisque  $\mu_{1,2} \neq 0$ .

Donc les racines de  $\Delta(\tau_n)$  sont asymptotiquement simples.

Par ailleurs il est clair qu'elles sont séparées. En effet, à partir de

$$\text{Re}(\tilde{\tau}_n) = m\pi - \frac{\mu}{\mu_{1,2}m\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ nous obtenons}$$

$$|\text{Re}(\tilde{\tau}_{n+1}) - \text{Re}(\tilde{\tau}_n)| = \left| \pi + \frac{\mu}{\mu_{1,2}m(m+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|,$$

donc, quand  $n$  tend vers l'infini,  $|\text{Re}(\tilde{\tau}_{n+1}) - \text{Re}(\tilde{\tau}_n)| > k$ , avec  $k$  un réel strictement positif. Ainsi, la preuve du Lemme 3.1 est établie.



**Preuve du théorème 1.3** Maintenant, on utilisera les définitions et les notations de Shkalikov [15] adaptées à notre problème.

On écrit (3.2) sous la forme

$$\begin{cases} l(u, \tau) = l_0(u) + \tau l_1(u) + \tau^2 l_2(u) + \tau^3 l_3(u) + \tau^4 l_4(u) = 0, \\ U_1(u, \tau) = u'''(1) + 2\varepsilon \mu_{2,2} \tau^2 u'(1) - \mu_{2,1} \tau^2 u(1) = 0, \\ U_2(u, \tau) = u''(1) - \mu_{1,2} \tau^2 u'(1) - 2\varepsilon \mu_{1,1} \tau^2 u(1) = 0, \\ U_3(u, \tau) = u'(0), \\ U_4(u, \tau) = u(0), \end{cases} \quad (3.7)$$

où,  $l_0(u) = u_{xxxx}$ ,  $l_1(u) = l_2(u) = l_3(u) = 0$  et  $l_4(u) = u$ .

Dans notre cas  $n = 4$  et les ordres respectifs des conditions au bord dans (3.7) sont  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 1$  et  $k_4 = 0$ . l'ordre total est donc  $k = 7$ .

Pour tout entier  $r$ , on note

$$W_2^r = W_2^{3+r}(0, 1) \oplus W_2^{2+r}(0, 1) \oplus W_2^{1+r}(0, 1) \oplus W_2^r(0, 1).$$

Soit l'opérateur  $H$  défini par

$$W_2^r \ni \tilde{v} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \longmapsto H\tilde{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, -\nu_0'''' )^T,$$

où,  $\nu_0 = u$ ,  $\nu_1 = \tau u$ ,  $\nu_2 = \tau \nu_1 = \tau^2 u$  et  $\nu_3 = \tau \nu_2 = \tau^3 u$ .

En suite, nous allons utilisé le corollaire 3.2 de [15], pour montrer l'existence d'une base de Riesz, dans l'espace de shkalikov  $W_{2,U}^r$  ( qu'on définit ultérieurement ) formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur de Shkalikov  $H_r$ . Ici  $H_r$  ne sera que  $H$  car  $N_r = 0$ . ( $N_r = 0$  si et seulement si les ordres de toutes les conditions au bord doivent être inférieurs ou égaux à  $n + r - 1$ ).

Ce qui est bien le cas ici pour tout  $r$ .

Commençons par normaliser les conditions au bord dans (3.7) au sens de Shkalikov, on a

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_1(\tilde{v}) = \nu_0''''(1) + 2\varepsilon \mu_{2,2} \nu_2'(1) - \mu_{2,1} \nu_2(1) = 0, \\ \tilde{U}_2(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_2(\tilde{v}) = \nu_0''(1) + \mu_{1,2} \nu_2'(1) - 2\varepsilon \mu_{2,1} \nu_2(1) = 0, \\ \tilde{U}_3(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_3(\tilde{v}) = \nu_0'(0) = 0, \\ \tilde{U}_4(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_4(\tilde{v}) = \nu_0(0) = 0. \end{cases}$$

Dans le cas où  $r = 0$ , l'espace  $W_{2,U}^0$  sera défini par

$$W_{2,U}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1); \\ \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}) = 0 \quad 1 \leq j \leq k \quad , \text{ pour } \quad 0 \leq k \leq n + r - 2 = 2 \\ \text{et l'ordre de toutes les conditions } \leq 2 - k \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1); \\ \nu_0'(0) = 0, \quad \nu_0(0) = 0, \quad \nu_1'(0) = 0, \quad \nu_1(0) = 0, \quad \nu_2(0) = 0. \end{array} \right\}.$$

On définit l'opérateur  $H_0$ , dans ce cas, par

ÉQUATION DES POUTRES D'EULER-BERNOULLI

$$H_0(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T = H(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, -\nu_0'''' )^T$$

et  $D(H_0) = W_{2,U}^1$ .

Pour  $r = 1$ , l'espace  $W_{2,U}^1$  sera défini par

$$W_{2,U}^1 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in W_2^4(0, 1) \oplus W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1); \\ \nu_0''''(1) + 2\varepsilon\mu_{2,2}\nu_2'(1) - \mu_{2,1}\nu_2(1) = 0, \\ \nu_0''(1) + \mu_{1,2}\nu_2'(1) - 2\varepsilon\mu_{1,1}\nu_2(1) = 0, \\ \nu_0'(0) = 0, \quad \nu_0(0) = 0, \quad \nu_1'(0) = 0, \quad \nu_1(0) = 0, \quad \nu_2(0) = 0, \\ \nu_2'(0) = 0, \quad \nu_3(0) = 0. \end{array} \right\}.$$

Et on définit l'opérateur  $H_0^2$ , par

$$H_0^2(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T = (\nu_2, \nu_3, -\nu_0''', -\nu_1''')^T$$

et  $D(H_0^2) = \{\tilde{\nu} \in D(H_0); H_0\tilde{\nu} \in D(H_0)\} \subset W_{2,U}^0$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in W_2^5(0, 1) \oplus W_2^4(0, 1) \oplus W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1); \\ \nu_1''''(1) + 2\varepsilon\mu_{2,2}\nu_3'(1) - \mu_{2,1}\nu_3(1) = 0, \\ \nu_0''''(1) + 2\varepsilon\mu_{2,2}\nu_2'(1) - \mu_{2,1}\nu_2(1) = 0, \\ \nu_1''(1) + \mu_{1,2}\nu_3'(1) - 2\varepsilon\mu_{1,1}\nu_3(1) = 0, \\ \nu_0''(1) + \mu_{1,2}\nu_2'(1) - 2\varepsilon\mu_{1,1}\nu_2(1) = 0, \\ \nu_0'(0) = 0, \quad \nu_0(0) = 0, \quad \nu_1'(0) = 0, \quad \nu_1(0) = 0, \quad \nu_2(0) = 0, \\ \nu_2'(0) = 0, \quad \nu_3(0) = 0, \quad \nu_3'(0) = 0, \quad \nu_0'''(0) = 0. \end{array} \right\}.$$

D'après le théorème de Shkalikov, l'opérateur  $H_0^2$  a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de  $W_{2,U}^1$ .

On va obtenir l'expression d'une base de Riesz pour notre opérateur  $-A$ .

Remarquons que l'opérateur  $H_0^2$  se décompose en une somme directe de deux opérateurs, dont l'un  $H_2$  opère sur  $\nu_1$  et  $\nu_3$  et l'autre  $H_1$  opère sur  $\nu_0$  et  $\nu_2$ .

On pose  $H_0^2 = H_1 \oplus H_2$

$H_2$  sera défini par  $H_2(w, v)^T = (v, -w''')^T$ , avec

$$D(H_2) = \left\{ \begin{array}{l} (w, v) \in (W_2^4(0, 1) \cap V) \oplus (W_2^2(0, 1) \cap V); \\ w''''(1) + 2\varepsilon\mu_{2,2}v'(1) - \mu_{2,1}v(1) = 0, \\ w''(1) + \mu_{1,2}v'(1) - 2\varepsilon\mu_{1,1}v(1) = 0. \end{array} \right\}.$$

On voit bien que  $H_2$  n'est autre que l'opérateur  $-A$ . Il est facile de montrer que le problème de valeurs propres de  $H_0^2$  est équivalent au problème de valeurs propres (3.2). Du fait que  $H_0^2$  admet un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forment une base de Riesz de  $W_{2,U}^1$ , on obtient que l'opérateur  $-A$  ou  $H_2$  a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forment une base de Riesz de  $H = V \oplus L^2(0, 1)$ .

**Conclusion.** D'après les deux derniers théorèmes de cette étude, nous concluons que le taux optimal de décroissance de l'énergie associé à notre système est donné par :  $-\omega = \sup \{ \text{Re}\lambda < 0, \lambda \in \sigma(-A) \}$ .

## 4 Annexe. Calcul du déterminant caractéristique du problème aux valeurs propres associé au système (P).

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} f_1(\tau, \omega_1) & f_1(\tau, \omega_2) & f_1(\tau, \omega_3) & f_1(\tau, \omega_4) \\ f_2(\tau, \omega_1) & f_2(\tau, \omega_2) & f_2(\tau, \omega_3) & f_2(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

où,  $f_1(\tau, \omega) = \tau^2 e^{\tau\omega} \{\tau\omega(\omega^2 + 2\varepsilon\mu_{2,2}) - \mu_{2,1}\}$  et

$f_2(\tau, \omega) = \tau^2 e^{\tau\omega} \{\omega^2 + \mu_{1,2}\tau\omega - 2\varepsilon\mu_{1,1}\}$ .

En développant le déterminant  $\Delta(\tau)$  suivant la dernière ligne, alors tout calcul fait montre que

$$-\Delta(\tau) = \tau(\omega_4 - \omega_1) \{f_1(\tau, \omega_2) f_2(\tau, \omega_3) - f_1(\tau, \omega_3) f_2(\tau, \omega_2)\} \quad (A)$$

$$+ \tau(\omega_3 - \omega_1) \{f_1(\tau, \omega_4) f_2(\tau, \omega_2) - f_1(\tau, \omega_2) f_2(\tau, \omega_4)\} \quad (B)$$

$$+ \tau(\omega_2 - \omega_1) \{f_1(\tau, \omega_3) f_2(\tau, \omega_4) - f_1(\tau, \omega_4) f_2(\tau, \omega_3)\} \quad (C)$$

$$+ \tau(\omega_3 - \omega_4) \{f_1(\tau, \omega_2) f_2(\tau, \omega_1) - f_1(\tau, \omega_1) f_2(\tau, \omega_2)\} \quad (D)$$

$$+ \tau(\omega_2 - \omega_4) \{f_1(\tau, \omega_1) f_2(\tau, \omega_3) - f_1(\tau, \omega_3) f_2(\tau, \omega_1)\} \quad (E)$$

$$+ \tau(\omega_2 - \omega_3) \{f_1(\tau, \omega_4) f_2(\tau, \omega_1) - f_1(\tau, \omega_1) f_2(\tau, \omega_4)\}. \quad (F)$$

Pour calculer les expressions ci-dessus on utilise les relations suivantes

$$\begin{aligned} & \bullet f_1(\tau, \alpha) f_2(\tau, \beta) \\ &= \tau^4 e^{\tau(\alpha+\beta)} \{(\tau\alpha^3 + 2\varepsilon\mu_{2,2}\tau\alpha - \mu_{2,1})(\beta^2 + \mu_{1,2}\tau\beta - 2\varepsilon\mu_{1,1})\} \\ &= \tau^4 e^{\tau(\alpha+\beta)} \{\tau\alpha^3\beta^2 + \mu_{1,2}\tau^2\alpha^3\beta - 2\varepsilon\mu_{1,1}\tau\alpha^3 + 2\varepsilon\mu_{2,2}\tau\alpha\beta^2 + 2\varepsilon\mu_{2,2}\mu_{1,2}\tau^2\alpha\beta \\ & \quad - 4\tau\mu_{1,1}\mu_{2,2}\alpha - \mu_{2,1}\beta^2 - \mu_{1,2}\mu_{2,1}\tau\beta + 2\varepsilon\mu_{1,1}\mu_{2,1}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet f_1(\tau, \alpha) f_2(\tau, \beta) - f_1(\tau, \beta) f_2(\tau, \alpha) \\ &= \tau^4 e^{\tau(\alpha+\beta)} \{\tau(\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3) + \mu_{1,2}\tau^2(\alpha^3\beta - \alpha\beta^3) - 2\varepsilon\mu_{1,1}\tau(\alpha^3 - \beta^3) \\ & \quad + 2\varepsilon\mu_{2,2}\tau(\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta) + (-4\tau\mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{1,2}\mu_{2,1}\tau)(\alpha - \beta) - \mu_{2,1}(\beta^2 - \alpha^2)\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(A) = 2\tau^7 e^{-\sqrt{2}\tau} \{-\sqrt{2}\mu_{1,2} + [\alpha - 2\mu] \tau^{-1} - \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}\},$$

$$(B) = 2\tau^7 \{2\eta\tau^{-1} - i4\varepsilon(\mu_{1,1} - \mu_{2,2})\tau^{-1}\},$$

$$(C) = 2\tau^7 e^{-i\sqrt{2}\tau} \{i\sqrt{2}\mu_{1,2} + [\alpha + 2\mu] \tau^{-1} - i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}\},$$

$$(D) = 2\tau^7 e^{i\sqrt{2}\tau} \{-i\sqrt{2}\mu_{1,2} + [\alpha + 2\mu] \tau^{-1} + i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}\},$$

$$(E) = 2\tau^7 \{2\eta\tau^{-1} + i4\varepsilon(\mu_{1,1} - \mu_{2,2})\tau^{-1}\},$$

$$(F) = 2\tau^7 e^{\sqrt{2}\tau} \{\sqrt{2}\mu_{1,2} + [\alpha - 2\mu] \tau^{-1} + \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}\},$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & -2\tau^7 \{ e^{-\sqrt{2}\tau} (-\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha - 2\mu\} \tau^{-1} - \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) + \\ & e^{-i\sqrt{2}\tau} (i\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha + 2\mu\} \tau^{-1} - i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) + \\ & e^{i\sqrt{2}\tau} (-i\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha + 2\mu\} \tau^{-1} + i\sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) + \\ & e^{\sqrt{2}\tau} (\sqrt{2}\mu_{1,2} + \{\alpha - 2\mu\} \tau^{-1} + \sqrt{2}\mu_{2,1}\tau^{-2}) + 4\eta\tau^{-1} \}. \end{aligned}$$

**Remerciements.** Les auteurs remercient le professeur F. Conrad et le referee pour leurs précieuses remarques et suggestions.

## Bibliographie

- [1] G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall, and G. Payre. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. *Siam J. Control and Optimization*, 25,3:526–546, 1987.
- [2] G. Chen, S.G. Krantz, D.W. Ma, C.E. Wayne, and H.H. West. The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation. *Operator methods for optimal control problems*, pages 67–96, 1987. Editor: S. J. Lee, Marcel-Dekker, New York.
- [3] F. Conrad. Stabilization of beams by pointwise feedback control. *Siam J. Control and Optimization*, 28,2:423–437, 1990.
- [4] F. Conrad and Ö. Morgül. On the stabilization of a flexible beam with a tip mass. *Siam J. Control and Optimization*, 36,6:1962–1986, 1998.
- [5] F. Conrad and M. Pierre. Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback. Rapport de Recherches, INRIA, 1990.
- [6] P. Grabowski. Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems. *J. Mathematical System, Estimation and Control*, 6:121–124, 1996.
- [7] A. Haraux. Semilinear hyperbolic problems in bounded domain. In *Mathematical Report, Vol. 3*, pages 67–96. Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, New York, 1987. Éditeur : J. Dieudonné.
- [8] F. L. Huang. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Diff. Eqs.*, 1:43–53, 1985.

- [9] A. M. Krall. Asymptotic stability of the Euler-Bernoulli beam with boundary control. *J. Mathematical Analysis and Applications*, 137,1:288–295, 1989.
- [10] A. Lasalle and S. Lefchetz. *Stability by direct Lyapounov's method*. Academic Press, 1961.
- [11] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [12] B. Rao. Uniform stabilization of hybrid system of elasticity. *Siam J. Control and Optimization*, 33:440–445, 1995.
- [13] P. Rideau. Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs actionneurs ponctuels : étude du spectre du système. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia-Antipolis, 1985.
- [14] F.Z. Saouri. Stabilisation de quelques systèmes élastiques. analyse spectrale et comportement asymptotique. Thèse, Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 2000.
- [15] A. Shkalikov. Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Mathematics*, 33:1311–1342, 1986.

NAJI YEBARI  
 UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI  
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
 BP 2121  
 TÉTOUAN  
 MAROC  
 nyebari@hotmail.com

ABDERAHMANE ELKHATTAT  
 UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI  
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
 BP 2121  
 TÉTOUAN  
 MAROC