ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Sylvie Monniaux

# Unicité dans $L^d$ des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens

Volume 10, n°1 (2003), p. 107-116.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2003__10_1_107_0>



*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France*

Annales Mathematiques Blaise Pascal **10**, 107-116 (2003)

# Unicité dans $L^d$ des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens

Sylvie Monniaux[1]

**Résumé**

On prouve l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$, où $\Omega$ est un domaine lipschitzien borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$).

## 1 Introduction

On s'intéresse dans cet article au système de Navier-Stokes incompressible dans des domaines fortement lipschitziens bornés de $\mathbb{R}^d$, avec donnée au bord de Dirichlet et donnée initiale $u_0$ à divergence nulle :

$$\begin{array}{rclcr} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla \pi & = & 0 & \text{dans} & (0,T) \times \Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \text{dans} & (0,T) \times \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} & (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,\cdot) & = & u_0 & \text{dans} & \Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

Plus particulièrement, on étudie le problème de l'unicité des solutions $u$ du système (1.1) ayant la régularité $\mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$, si elles existent. Dans le cas de l'espace tout entier ($\Omega = \mathbb{R}^d$), la preuve de l'unicité de telles solutions est due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo dans [5]. D'autres preuves mettant en oeuvre des méthodes originales ont suivi ; on citera en particulier Y. Meyer [9], P.-L. Lions et N. Masmoudi [8] et S. Monniaux [10]. Tous ces résultats sont présentés dans le livre de P.-G. Lemarié-Rieusset [7]. Dans les articles [8] et [10], la méthode utilisée s'adapte au cas des domaines réguliers bornés de $\mathbb{R}^d$ ; on pourra aussi citer l'article de H. Amann [1]. Le cas des domaines extérieurs à frontière régulière a été étudié par N. Depauw

[1]Ce travail a été effectué lors d'une visite de l'auteur au Center of Mathematics and its Applications, Australian National University, Canberra - Australie.

[3] ; notons que la preuve de [10] s'adapte aussi dans ce cas. On pourra se reporter à la très complète présentation de cet historique par M. Cannone dans [2].

Le cas des domaines lipschitziens est plus délicat. Le semi-groupe de Stokes permettant de donner une expression des solutions du système (1.1) dans les cas précédents n'est pas analytique dans $L^p$ pour tout $p$ ; P. Deuring dans [4] en a donné des contre-exemples. M. Taylor, dans [14], établit la conjecture que le semi-groupe de Stokes est analytique dans $L^p$ pour tout $p \in [\frac{3}{2}, 3]$, s'appuyant sur le caractère borné du projecteur de Leray dans cet intervalle (voir [6]). Mais à ce jour, aucune preuve de ce résultat n'est disponible. Une version faible de l'analyticité en dimension 3 peut être trouvée dans [11]. L'auteur dans [12] a contourné ce problème de non analyticité en utilisant un résultat de Z. Shen [13] pour montrer, en dimension 3, l'unicité des solutions de (1.1) dans la classe des fonctions continues en temps, à valeurs $L^3$ en variable d'espace. Nous proposons ici une adaptation de cette méthode aux domaines lipschtziens bornés $\Omega$ de dimension quelconque $d \geq 3$ afin de montrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1) dans $\mathcal{C}([0,T); L^d(\Omega)^d)$.

Cet article se compose de trois parties. Dans un premier temps, nous rappelons le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) qui est la clé de la démonstration proposée ici. Ensuite, nous nous intéressons au problème de Stokes linéaire non autonome : nous donnons les estimations qui seront utiles dans la dernière partie. Enfin, nous établissons le résultat d'unicité annoncé plus haut.

# 2 Le problème de Stokes avec donnée au bord

Nous allons commencer cette partie en rappelant la propriété de régularité maximale du laplacien dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$) qui nous sera utile dans différentes démonstrations. On note $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$ ; son action est donnée par la convolution par le noyau de la chaleur $(p_t)_{t>0}$ défini sur $\mathbb{R}^d$ par $p_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

**Proposition 2.1:** *Soit $T > 0$ (on autorise aussi le cas $T = +\infty$). Soit $\mathcal{M}_T$ l'opérateur défini sur les fonctions régulières de $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ par*

$$\mathcal{M}_T f(t) = \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)^{-1} (-\Delta f)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(-\Delta f)(s)ds, \quad t \in (0,T).$$

*Alors pour tous $p, q \in (1, \infty)$, l'opérateur $\mathcal{M}_T$ est borné de $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ dans $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ et $\|\mathcal{M}_T\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^d)))}$ est indépendante de $T$.*

PREUVE: Ce résultat est classique. On pourra en trouver une démonstration dans [7], Theorem 7.3, page 64. □

Soit maintenant, et dans toute la suite de cet article, $\Omega$ un domaine fortement lipschtzien de dimension $d \geq 3$, soit $\tau > 0$. On considère le problème au bord suivant :

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla q & = & 0 \quad \text{dans} & (0,\tau) \times \Omega \\ \operatorname{div} v & = & 0 \quad \text{dans} & (0,\tau) \times \Omega \\ v & = & g \quad \text{sur} & (0,\tau) \times \partial\Omega, \end{array} \tag{2.1}$$

où $g$ est une fonction définie sur $(0, \tau) \times \partial\Omega$. Soit $K$ est la matrice $d \times d$ donnée par l'expression

$$K_{i,j}(t,x) = \delta_{i,j} p_t(x) + \int_t^\infty \frac{\partial^2 p_s}{\partial x_i \partial x_j}(x) ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

où $p_t$, $t > 0$, est le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$ défini plus haut. Le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) établissant l'existence et l'unicité de solution du système (2.1) pour certaines données au bord $g$ s'énonce de la manière suivante :

**Théorème 2.2:** *On note $L^2_N(\partial\Omega)^d$ l'espace des fonctions $\gamma \in L^2(\partial\Omega)^d)$ telles que $\int_{\partial\Omega} \gamma \cdot N d\sigma = 0$, où $N$ désigne la normale extérieure en un point de $\partial\Omega$. Il existe un opérateur borné $\mathcal{T} : L^2(0,\tau; L^2_N(\partial\Omega)^d) \to L^2(0,\tau; L^2(\partial\Omega)^d)$ tel que pour toute fonction $g \in L^2(0,\tau; L^2_N(\partial\Omega)^d)$, il existe une unique solution $v \in L^2(0,\tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ de (2.1) donnée par la formule de potentiel double couche suivante*

$$\begin{array}{rcl} v(t,x) & = & \displaystyle\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial N(y)}(t-s, y-x)(\mathcal{T}g)(s,y) d\sigma(y) ds \\ & & \displaystyle - \int_{\partial\Omega} \frac{y-x}{|y-x|^3}(\mathcal{T}g)(t,y) \cdot N(y) d\sigma(y), \end{array} \tag{2.2}$$

*pour $x \in \Omega$ et $t \in (0, \tau)$. De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de $g$ telle que*

$$\|v\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \kappa \|g\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)}. \tag{2.3}$$

Preuve: L'existence et le caractère borné de l'opérateur $\mathcal{T}$ ainsi que l'expression (2.2) ont été montrés par Shen dans [13], Theorem 5.1.2. Il reste à prouver la propriété d'intégrabilité de la solution $v$ donnée par (2.2) et l'inégalité (2.3). Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}((0,\tau)\times\Omega)^d$ ; il nous faut estimer la quantité

$$\int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt$$

par la norme de $g$ dans $L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)$ multipliée par la norme de $\varphi$ dans l'espace dual de $L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$, c'est-à-dire $L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)$. D'après (2.2) et l'expression de $K$ en fonction du noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt\\
= &\int_0^\tau \int_\Omega dxdt\\
&\sum_{i=1}^d \Bigg\{\varphi_i(t,x)\Bigg(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^d \frac{\partial K_{i,j}}{\partial N(y)}(t-s,y-x)(\mathcal{T}g)_j(s,y)d\sigma(y)ds\\
&-\int_{\partial\Omega}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^d}[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)\Bigg)\Bigg\}\\
= &\int_0^\tau \int_\Omega dxdt\\
&\sum_{i=1}^d \Bigg\{\varphi_i(t,x)\Bigg(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p_{t-s}}{\partial N(y)}(y-x)(\mathcal{T}g)_i(s,y)d\sigma(y)ds\\
&+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^d\frac{\partial}{\partial N(y)}\left[\int_{t-s}^\infty \frac{\partial^2 p_r}{\partial x_i\partial x_j}(y-x)dr\right](\mathcal{T}g)_j(s,y)d\sigma(y)ds\\
&-\int_{\partial\Omega}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^d}[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)\Bigg)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Si on note encore $\varphi$ la fonction de $(0,\tau)\times\mathbb{R}^3$ qui vaut $\varphi$ sur $(0,\tau)\times\Omega$ et 0 ailleurs, en échangeant l'ordre d'intégration, cette dernière égalité devient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt \\
= \;& \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)ds \\
& \sum_{i=1}^{d} (\mathcal{T}g)_i(s,y) \left[ \frac{\partial}{\partial N(y)} \left( \int_s^\tau e^{(t-s)\Delta}\varphi_i(t,\cdot)dt \right)(y) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial N(y)} \int_s^\tau \left( \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left\{ \int_{t-s}^{\infty} e^{r\Delta}\varphi_j(t,\cdot)dr \right\}(y) \right) dt \right] \\
& - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi(t,\cdot))(y)(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)d\sigma(y)dt \\
= \;& \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\mathcal{T}g)(s,y)\cdot(N(y)\cdot\nabla)[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi](s,y)d\sigma(y)dt \\
& - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi(t,\cdot))(y)[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)dt,
\end{aligned}
$$

où $I_d$ est l'identité sur $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray ($\mathbb{P} = I_d + \nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}$ ; c'est la projection sur les fonctions à divergence nulle) et $\mathcal{M}^*$ est l'opérateur dual de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{+\infty} I_d$ ($\mathcal{M}_{+\infty}$ est l'opérateur de régularité maximale défini dans la Proposition 2.1). Des propriétés du laplacien dans $\mathbb{R}^d$ nous déduisons les estimations suivantes

$$\|\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi\|_{L^2(0,\tau;W^{1,\frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|\nabla[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi]\|_{L^2(0,\tau;W^{1,\frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq C_2 \|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

D'après les propriétés de l'opérateur de trace sur $\partial\Omega$ et les injections de Sobolev appropriées, on obtient alors

$$\|Tr_{\partial\Omega}[\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi]\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} \leq C_1' \|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|Tr_{\partial\Omega}(N(\cdot)\cdot\nabla)[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi]\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)} \leq C_2' \|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

Ces deux dernières estimations ainsi que l'expression du produit scalaire de $v$ par $\varphi$ nous permettent alors de conclure.

□

# 3 Estimations des solutions du problème linéaire non autonome

Nous nous intéressons maintenant au problème de Stokes non autonome suivant

$$\begin{array}{rcccr} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \pi & = & f & \text{dans} & (0,\tau)\times\Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \text{dans} & (0,\tau)\times\Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} & (0,\tau)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) & = & 0 & \text{dans} & \Omega. \end{array} \tag{3.1}$$

Nous allons déterminer dans le théorème suivant pour quelles fonctions $f$ ce système (3.1) admet une solution $u$ avec de "bonnes" propriétés.

**Théorème 3.1:** *Pour tout* $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$*, pour tout* $f \in L^2(0,\tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$*, il existe une solution* $u \in L^2(0,\tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ *unique de* (3.1) *vérifiant*

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \le \omega_r(\tau)\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)}, \tag{3.2}$$

*où* $\omega_r(\tau) = O(\tau^{\frac{d+1}{4}-\frac{d}{2r}})$.

Preuve: L'idée est ici d'étendre le problème à $\mathbb{R}^d$ tout entier, puis de se ramener à un problème au bord du type (2.1). Soit $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$ et $f \in L^2(0,\tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On étend $f$ à $\mathbb{R}^d$ tout entier de telle façon que l'extension notée $\tilde f$ vérifie

$$\|\tilde f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)} \le c\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)},$$

où $c$ est une constante indépendante de $f$. On note alors

$$\begin{array}{rcl} U & = & \mathbb{P}(-\Delta I_d)^{-\frac12}(\mathcal{M}_\tau I_d)(-\Delta I_d)^{-\frac12}\tilde f \\ & = & \mathbb{P}\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{-1}(-\Delta I_d)^{\frac12}(I_d - \mathcal{M}_\tau I_d)(-\Delta I_d)^{-\frac12}\tilde f \end{array}$$

où l'opérateur de régularité maximale $\mathcal{M}_\tau$ a été défini dans la Proposition 2.1. On a donc $U \in L^2(0,\tau; W^{1,r}(\mathbb{R}^d)^d) \cap W^{1,2}(0,\tau; W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)$ et il existe une constante $\gamma_r > 0$ indépendante de $f$ et de $\tau$ telle que

$$\|U\|_{L^2(0,\tau;W^{\frac{d}{r}-\frac{d-1}{2},r}(\mathbb{R}^d)^d)} \le \gamma_r \tau^{\frac{d+1}{4}-\frac{d}{2r}}\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)}.$$

Les propriétés de l'opérateur de trace ainsi que les injections de Sobolev nous montrent alors que $T_{\partial\Omega}U \in L^2(0,\tau; L^2(\partial\Omega)^d)$, de norme contrôlée indépendamment de $\tau$ par la norme de $f$ dans $L^2(0,\tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On considère alors l'unique $v$ donné par (2.2) du Théorème 2.2 avec $g = T_{\partial\Omega}U$. Ainsi, en notant $R_\Omega$ la restriction à $\Omega$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$, la fonction $u = R_\Omega U - v$ est l'unique solution de (3.1) cherchée. Finalement, (3.2) découle de l'injection de Sobolev suivante

$$W^{\frac{d}{r}-\frac{d-1}{2},r}(\Omega)^d \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d$$

en dimension $d$. Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1. $\square$

# 4 Unicité des solutions continues en temps, à valeurs dans $L^d$

Tous les outils sont maintenant en place pour démontrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1).

**Théorème 4.1:** *Supposons que $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions de* (1.1) *dans l'espace $\mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$. Alors $u_1 = u_2$ sur* $[0,T)$.

*Remarque:* En dimension $d = 3$, ce théorème a déjà été démontré dans [12].

Preuve: Pour montrer que $u_1 = u_2$, nous appliquons la méthode classique qui consiste à montrer que leur différence $u = u_1 - u_2$ est nulle sur un petit intervalle partant de 0. La continuité des solutions implique que l'ensemble des $t$ pour lesquels $u(t) = 0$ est fermé dans $[0,T)$. D'autre part, la preuve qui suit montre que cet ensemble est non vide et ouvert. On en déduit alors que $u = 0$ sur $[0,T)$. Comme le domaine $\Omega$ est borné et $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$, on a aussi $u_1, u_2 \in L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ ; en effet, pour $d \geq 3$, on a $\frac{2d}{d-1} \leq d$. Le but de la démonstration suivante est de montrer que la norme de $u$ dans $L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ est nulle pour un $\tau > 0$.

Dans un premier temps, soit $p \in ]\frac{2d}{d-1}, \frac{2d}{d-2}[$ et $u_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)^d$ à choisir plus tard. Le système (1.1) vérifié par $u_1$ et $u_2$ devient pour $u$

$$\begin{array}{rcllr} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\pi & = & -\nabla\cdot(u\otimes u_1 + u_2\otimes u) & \text{dans} & (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \text{dans} & (0,T)\times\Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) & = & 0 & \text{dans} & \Omega. \end{array} \qquad (4.1)$$

On pose $f = -\nabla\cdot(u\otimes u_1 + u_2\otimes u)$ et on décompose cette distribution en trois parties : $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_1 = -\nabla\cdot(u\otimes(u_1 - u_0) + (u_2 - u_0)\otimes u)$,

$f_2 = -\nabla \cdot (u \otimes (u_0 - u_{0,\varepsilon}) + (u_0 - u_{0,\varepsilon}) \otimes u)$ et $f_3 = -\nabla \cdot (u \otimes u_{0,\varepsilon} + u_{0,\varepsilon} \otimes u)$. On a les propriétés suivantes pour tout $\tau \in (0,T]$ :

$$f_1, f_2 \in L^2(0,\tau; W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d) \quad \text{et} \quad f_3 \in L^2(0,\tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$$

où $r$ est défini par la relation $\frac{1}{r} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p}$ : $r \in ]\frac{2d}{d+1}, 2[$. On a de plus les estimations

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \quad \leq \quad & \|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \cdot \\ & \left[\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}\right],\end{aligned}$$

$$\|f_2\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d}$$

et

$$\|f_3\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d}.$$

D'après le Théorème 3.1 de la partie précédente (appliqué à chacune des $f_i$, $i = 1,2,3$) et l'estimation (3.2), il existe alors une unique solution $u \in L^2(0,T; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ vérifiant pour tout $\tau \in (0,T]$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \quad \leq \quad & \omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \left[\|f_1\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}})} + \|f_2\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}})}\right] \\ & + \omega_r(\tau)\|f_3\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r})}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a une estimation de $u$ de la forme :

$$\begin{aligned}& \|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \\ \leq \quad & \Big(\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\left[\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}\right] \\ & + 2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d} + 2\omega_r(\tau)\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d}\Big) \cdot \|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}.\end{aligned}$$

On choisit maintenant $u_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)^d$ de telle façon que

$$2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d} < \frac{1}{4}.$$

D'autre part, comme $u_1$ et $u_2$ sont continues en temps et valent $u_0$ en 0, on a

$$\lim_{\tau \to 0} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} = \lim_{\tau \to 0} \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} = 0.$$

De plus, comme $r \in ]\frac{2d}{d+1}, 2[$, on a

$$\lim_{\tau \to 0} \omega_r(\tau) = 0.$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que

$$\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \left[ \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^d(\Omega)^d} \right] + 2\omega_r(\tau)\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d} < \frac{1}{4}.$$

Ainsi pour le $\tau$ choisi, on a

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}.$$

Ce qui implique que $u = 0$ sur $[0, \tau)$, et ceci termine la démonstration. □

# Bibliographie


[1] H. Amann. On the strong solvability of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 2:16–98, 2000.

[2] M. Cannone. Mr 2002j:76036. *Mathematical Reviews, American Mathematical Society*, 2002.

[3] N. Depauw. Solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine extérieur. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17:21–68, 2001.

[4] P. Deuring. The Stokes resolvent in 3D domains with conical boundary points : nonregularity in $L^p$-spaces. *Adv. Differential Equations*, 6:175–228, 2001.

[5] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo. Unicité dans $L^3(R^3)^3$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16:605–667, 2000.

[6] E. Fabes, O. Mendez, and M. Mitrea. Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 159:323–368, 1998.

[7] P.-G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall, Boca Raton, 2002. CRC Research Notes in Mathematics 431.

[8] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in $L^N$. *Comm. Partial Differential Equations*, 26:2211–2226, 2001.

[9] Y. Meyer. Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations. In *Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA)*, pages 105–212. Int. Press, Boston, MA, 1997.

[10] S. Monniaux. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal $L^p-$regularity. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 328:663–668, 1999.

[11] S. Monniaux. Existence of solutions in critical spaces of the Navier-Stokes system in 3D bounded Lipschitz domains. Preprint, 2002.

[12] S. Monniaux. On uniqueness for the Navier-Stokes system in 3D-bounded Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 195:1–11, 2002.

[13] Z. Shen. Boundary value problems for parabolic Lamé systems and a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations in Lipschitz cylinders. *Amer. J. Math.*, 113:293–373, 1991.

[14] M. Taylor. Incompressible fluid flows on rough domains. In *Semigroups of operators: theory and applications (Newport Beach, CA, 1998)*, pages 320–334. Birkhäuser, Basel, 2000. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 42.

Sylvie Monniaux
Université Aix-Marseille 3
LATP - UMR 6632 - Case cour A
Av. Escadrille Normandie-Niemen
13397 Marseille Cédex
France
sylvie.monniaux@univ.u-3mrs.fr