ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Jean-Claude Jolly

Solutions à ε près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés

Volume 10, n°1 (2003), p. 21-??.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2003__10_1_21_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

Annales Mathematiques Blaise Pascal **10**, 21-73 (2003)

Solutions à ε près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés

Jean-Claude Jolly

Résumé

La résolution d'un système d'EDP non linéaires, de type mixte et sous contraintes, est étudiée dans des ouverts non bornés. Le cas considéré est celui d'un modèle d'écoulement transsonique avec condition d'entropie. Le problème est ramené à l'annulation d'une fonctionnelle positive pénalisée, dans un cadre hilbertien. Des solutions généralisées à ε près sont obtenues par encadrement de la borne inférieure de la fonctionnelle. Si les contraintes sont omises et sous certaines hypothèses, un algorithme de type gradient donne l'annulation de cette borne inférieure à ε près. Ceci permet alors de préciser la résolution à ε près.

Abstract

The resolution of nonlinear PDE systems of mixed type under constraints is studied in unbounded open sets. The considered case is that of a transonic flow model with a condition of entropy. The problem is reduced to the nullification of a penalized non negative function in an hilbertian frame. Some quasi ε solutions are obtained by quasi ε valuation of the inferior bound of the function. If constraints are omitted, and under a certain hypothesis, a gradient type algorithm gives the quasi ε nullification of this inferior bound. The ε resolution can then be specified.

1 Introduction. Notations

Cet article concerne la résolution à ε près de systèmes d'EDP non linéaires, de type mixte hyperbolique-elliptique, dans des ouverts non bornés. Il est inspiré de la deuxième partie d'une thèse [20]. Le cas significatif considéré est celui d'un modèle mécanique d'écoulement transsonique d'un gaz parfait, tel que l'exposent [10] ou [14] par exemple. L'hypothèse de l'ouvert non borné est naturelle pour ce modèle (atmosphère infinie entourant un profil), mais elle représente une difficulté pour l'étude fonctionnelle envisagée.

La géométrie du problème est plane et donnée relativement à un repère orthonormé direct définissant des axes Ox_1 et Ox_2. On considère un *profil* $\mathcal{P}$, ensemble fermé et borné, de frontière Γ support d'un chemin fermé. Un point du plan est repéré par un couple de coordonnées $x = (x_1, x_2)$ et sa distance à l'origine O est notée $|x|$. Par commodité et sans perte de généralité, on suppose que le disque $\{x;\ \ |x| \leq 1\}$ est intérieur à $\mathcal{P}$. On appelle G le complémentaire de $\mathcal{P}$, qui est donc un ouvert non borné, de frontière Γ. Le vecteur normal unitaire extérieur à G en un point de Γ est noté n_e et τ est le vecteur tangent unitaire tel que (n_e, τ) soit direct.

À $R > 0$ on associe l'ouvert borné $G_R = G \cap \{x; |x| \leq R\}$. Pour la suite (voir aussi le lemme 2.3), il est utile de fixer $R_0 > 1$ tel que le profil $\mathcal{P}$ soit inclus dans le disque ouvert $\{x;\ \ |x| < R_0\}$. Pour R supérieur ou égal à R_0, la frontière de G_R est la réunion disjointe $\Gamma \cup \Gamma_R$, où Γ_R est le cercle de centre l'origine et de rayon R.

La figure suivante schématise les données géométriques précédentes :

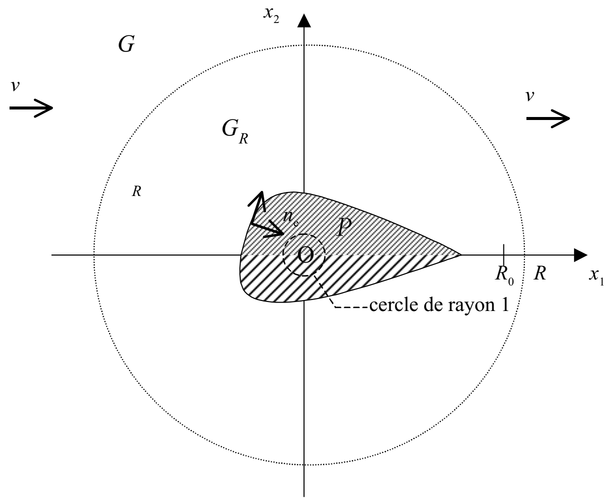

Fig. 1 – Données géométriques

L'écoulement s'établit dans G, autour du profil $\mathcal{P}$. Le champ inconnu v des vitesses, bidimensionnel, stationnaire, normalisé relativement à une vitesse limite satisfait

(I) $\mathrm{rot}(v) = 0$ sur G ;

(II) $\mathrm{div}\big(\rho\left(|v|^2\right)v\big) = 0$ sur G .

Ces deux EDP traduisent d'une part une hypothèse de champ irotationnel et d'autre part la conservation de la masse, où ρ défini sur $[0;1]$ et de la forme $\rho\left(t\right) = \rho_0\left(1-t\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ est la masse volumique du gaz parfait, γ étant l'indice adiabatique qui vaut $1,4$ dans le cas de l'air. Pour ce modèle on suppose donc $|v| \leq 1$ sur G. La vitesse du son normalisée est le module

$$v_c = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Sur Γ, on adjoint une condition aux limites de glissement ainsi qu'une hypothèse de circulation nulle, ce qui est vérifié pour des profiles symétriques, soit

(III) $v \cdot n_e = 0$ sur Γ ;

(IV) $\int_\Gamma v \cdot \tau \, d\Gamma = 0$.

La vitesse supposée uniforme à l'infini et une hypothèse de limitation du domaine transsonique en fonction d'un paramètre μ_1 choisi tel que $\mu_1 > v_c^2$ donnent les relations

(V) $\lim_{|x|\to\infty} v\,(x) = v_\infty = (u_\infty, 0)$, avec $0 \le u_\infty < 1$;

(VI) $|v|^2 \le \mu_1 < 1$ sur G.

En suivant [29] et [17] on formule la condition d'entropie supplémentaire suivante :

(VII) $\operatorname{div}(v) \le c$ sur G, pour une constante c inconnue.

La non-linéarité du système ainsi formé provient du facteur ρ dans (II). Le type mixte *hyperbolique-elliptique* se montre à partir de (I) et (II) comme dans ([16], p. 521) ou ([19], p. 1274), par exemple.

Étant donné ρ_0, γ et u_∞, on cherche à déterminer un champ v solution des relations (I) à (VI) ou (VII) précédentes. Selon que l'on prend en compte ou non (VII), on qualifie ce problème de *problème avec* ou *sans condition d'entropie*. Plus spécifiquement, la résolution à ε près envisagée dans le cas sans entropie supposera (VI) satisfait *a priori* et laissera (VII) de côté, alors que ces inéquations seront traitées au même titre que les équations du système dans le second cas, mais selon un critère de résolution moins précis.

Du point de vue mathématique, pour de tels systèmes et à notre connaissance, aucune solution satisfaisante n'a été apportée à ce jour. Ceci n'exclut pas et même justifie plutôt l'existence de nombreuses publications sur les écoulements transsoniques. Les méthodes de résolution à ε près qui nous concernent ont été développées, dans le cas d'un ouvert borné, par [13] [14] pour le problème sans condition d'entropie (§ 3) et par [4] [8] pour le problème avec condition d'entropie (§ 2). Citons [27] pour la notion générale de *solution à ε près* associée au théorème 3.5 ; la notion de *solution généralisée* *à ε près* associée au théorème 2.10 est à rapprocher de celle de quasi-minima au sens d'Ekeland décrite par [12], par exemple. Les méthodes de résolution à ε près employées peuvent être étendues à une large classe d'EDP. En particulier, elles peuvent être appliquées au modèle de Karman-Guderley dans le cadre des petites perturbations transsoniques. Ceci les distingue de celles mises en oeuvre dans le cas borné par [26] et [17] [18] qui font appel à des arguments de compacité par compensation, comme décrits par [24]. Il est à noter que dans cette dernière référence des inéquations variationnelles sont traitées, ce qui n'est pas le cas ici.

Présentons les résolutions à ε près effectuées.

En faisant le changement de champ inconnu $u = v - v_\infty$ et en supposant les relations (IV) et (V) satisfaites l'étude est placée dans le cadre hilbertien d'espaces de Sobolev (§ 2.2). Une formulation variationnelle du problème posé conduit à chercher les champs u dans un sous-espace $V(G)$ de $L^2(G, \mathbb{R}^2)$ adapté à l'aspect non borné de G (§ 2.2). Elle donne une fonctionnelle positive I ramenant la vérification des équations (I) à (V) par $u + v_\infty$ aux conditions $u \in V(G)$ et $I(u) = 0$ (§ 2.3). L'interprétation d'une inégalité au sens des distributions donne une autre fonctionnelle positive F permettant de remplacer les inéquations (VI) et (VII) par une équation de la forme $F(u) = 0$ (§ 2.4). Soit $\varepsilon > 0$. Pour le problème avec condition d'entropie nous établissons alors l'existence de *solutions généralisées à ε près* au sens suivant :

(ii) $u_\varepsilon + v_\infty$*, où* u_ε *appartient à* $V(G)$, *est* solution généralisée à ε près *de* (I) *à* (VII) *si* $F(u_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *et* $I(u_\varepsilon) \leq m + \varepsilon$*, avec*

$$m = \inf \{I(u); u \in V(G), F(u) = 0\}.$$

L'identité $m = 0$ n'est pas acquise. C'est ce qu'exprime le qualificatif *généralisée.* Ces solutions généralisées à ε près peuvent être obtenues par deux méthodes d'optimisation (§§ 2.5 et 2.6 ; théorèmes 2.10 et 2.11). Ces résultats sont complétés par une approche borné / non borné (§ 2.7 ; théorème 2.15). Une synthèse est donnée (§ 2.8).

Pour le problème sans entropie, au prix d'une hypothèse restrictive (H) correspondant à une limitation du caractère transsonique de l'écoulement, nous proposons au paragraphe 3 une amélioration de la résolution précédente satisfaisant notamment $m = 0$. Quelques transformations et des encadrements du terme non linéaire (§ 3.1) sont à la base de la convergence d'un algorithme de type gradient (§ 3.2), ce qui fournit une *solution à ε près* au sens suivant (théorème 3.5) :

(i) $u_\varepsilon + v_\infty$, où $u_\varepsilon \in V(G)$, *est* solution à ε près *de* (I), (II) *et* (III) *si* $u_\varepsilon + v_\infty$ *satisfait ces équations avec des restes d'ordre inférieur ou égal à ε, dans des normes convenables.*

Les relations (IV) et (V) sont satisfaites puisque $u_\varepsilon \in V(G)$. À la vérification près de (VI) *a posteriori*, cela résout à ε près le problème sans condition d'entropie. Une approche borné / non borné est également obtenue au sens d'une convergence faible dans $L^2(G, \mathbb{R}^2)$ (§ 3.3 ; théorèmes 3.6 et 3.7).

Une conclusion est donnée (§ 4).

Les solutions généralisées à ε près, pourvu qu'elles puissent être définies, existent toujours. C'est un corollaire de l'existence d'une borne inférieure pour une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Cette existence en un sens faible est à comparer, pour une EDP de type mixte hyperbolique-elliptique en domaine non borné, avec les résultats d'existence et les hypothèses qui les accompagnent formulés par [22] ou [23], par exemple. Les solutions à ε près obtenues pour le problème sans entropie sont effectives au sens de la convergence d'un algorithme. Des méthodes analytiques relatives à la dynamique des gaz peuvent compléter cette approche, comme cela est développé par exemple dans [2] ou [28]. Citons [21] pour un cadre général d'étude des EDP de type mixte par des méthodes analytiques issues de la mécanique.

Intoduisons quelques notations.

Soit G_b un ouvert du plan, de frontière ∂G_b bornée et lipschitzienne (voir [11] ou [25], par exemple).

Suivant le contexte, $L^2(G_b)$ correspond à $L^2(G_b, \mathbb{R})$ ou à $L^2(G_b, \mathbb{R}^2)$. Cette convention vaut implicitement pour d'autres espaces fonctionnels définis par la suite. Dans les deux cas, celui de $L^2(G_b, \mathbb{R})$ ou celui de $L^2(G_b, \mathbb{R}^2)$, le produit scalaire habituel et la norme correspondante sont notés $(\cdot,\cdot)_{0,G_b}$ et $|\cdot|_{0,G_b}$ respectivement.

On désigne par $|\cdot|_{1,G_b}$ la norme de $H^1(G_b)$ définie par

$$|v|_{1,G_b} = \left(|v|^2_{0,G_b} + |\nabla v|^2_{0,G_b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } |\nabla v|^2_{0,G_b} = |\partial_1 v|^2_{0,G_b} + |\partial_2 v|^2_{0,G_b},$$

et par $(\cdot,\cdot)_1$ le produit scalaire correspondant. Soit s un nombre réel. La norme habituelle de $H^s(\partial G_b)$ est notée $|\cdot|_{\frac{1}{2},\partial G_b}$.

Pour un vecteur $x = (x_1, x_2)$ du plan vectoriel, on désigne par $x^{\intercal} = (x_2, -x_1)$ le vecteur qui s'en déduit par rotation d'angle $-\pi/2$. On considère $\mathrm{rot}(v) = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ le rotationnel scalaire, au sens des distributions, d'un champ $v = (v_1, v_2)$. On a donc $\mathrm{rot}(v) = \mathrm{div}(v^{\intercal})$.

Les espaces

$$H(\mathrm{div}, G_b) = \left\{v; v \in L^2\left(G_b, \mathbb{R}^2\right), \mathrm{div}\,(v) \in L^2\,(G_b, \mathbb{R})\right\}$$

et

$$H(\mathrm{rot}, G_b) = \left\{v; v \in L^2\left(G_b, \mathbb{R}^2\right), \mathrm{rot}\,(v) \in L^2\,(G_b, \mathbb{R})\right\}$$

sont des espaces de Hilbert pour les normes $|\cdot|_{\mathrm{div},G_b}$ et $|\cdot|_{\mathrm{rot},G_b}$ respectivement, qui sont définies par

$$|v|_{\mathrm{div},G_b} = \left(|v|^2_{0,G_b} + |\mathrm{div}\,(v)|^2_{0,G_b}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |v|_{\mathrm{rot},G_b} = \left(|v|^2_{0,G_b} + |\mathrm{rot}\,(v)|^2_{0,G_b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a les propriétés de trace normale suivantes [16] :

(i) *Pour $v \in H(\mathrm{div}, G_b)$, on a la majoration $|v \cdot n_e|_{-\frac{1}{2},\partial G_b} \leq |v|_{\mathrm{div},G_b}$; si de plus $\xi \in H^1(G_b)$, on a la* formule de Green, en divergence *suivante :*

$$(v, \nabla\xi)_{0,G_b} = \langle v \cdot n_e, \xi\rangle_{\partial G_b} - (\mathrm{div}\,(v), \xi)_{0,G_b}, \tag{1.1}$$

où l'on a noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial G_b}$ le crochet de dualité sur $H^{-\frac{1}{2}}(\partial G_b) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial G_b)$;

(ii) *Pour v dans $H(\mathrm{rot}, G_b)$, on a la majoration $|v \cdot \tau|_{-\frac{1}{2},\partial G_b} \leq |v|_{\mathrm{rot},G_b}$; si de plus $\xi \in H^1(G_b)$, on a la* formule de Green, en rotationnel *suivante :*

$$(v^{\intercal}, \nabla\xi)_{0,G_b} = \langle v \cdot \tau, \xi\rangle_{\partial G_b} - (\mathrm{rot}\,(v), \xi)_{0,G_b}. \tag{1.2}$$

Par la suite, les cas particuliers considérés sont ceux de $G_b = G$ et $G_b = G_R$, avec $\partial G = \Gamma$ et $\partial G_R = \Gamma \cup \Gamma_R$ respectivement. Pour alléger les notations des produits et normes correspondants, dans le cas de G on omet de mettre celui-ci en indice, et dans le cas de G_R on indexe par R au lieu de G_R. Ainsi, on écrit

$$\begin{array}{ccccccc} (\cdot,\cdot)_0 & , & |\cdot|_0 & , & |\cdot|_{\mathrm{div}} & , & |\cdot|_{\mathrm{rot}} \\ (\cdot,\cdot)_{0,R} & , & |\cdot|_{0,R} & , & |\cdot|_{\mathrm{div},R} & , & |\cdot|_{\mathrm{rot},R} \end{array}.$$

2 Problème avec condition d'entropie

Ce paragraphe concerne le problème avec condition d'entropie, *i.e.* le problème de la détermination d'une solution des relations (I) à (VII) données au paragraphe 1.

2.1 Mise en forme du problème

Nous allons procéder à une mise en forme, voire une interprétation, des relations (I) à (VII).

Faisons le changement de champ inconnu $u = v - v_\infty$. On prolonge la fonction $\rho(t)$, définie sur $[0;1]$ au paragraphe 1, par zéro pour $t \geq 1$ et on note $\widetilde{\rho}$ ce prolongement.

La relation (I) est transformée en $\mathrm{rot}(u) = 0$. La fonction $\rho\left(|v|^2\right) v$ devient $\widetilde{\rho}\left(|u+v_\infty|^2\right)(u+v_\infty)$. D'après la relation (V), cette expression tend vers $\rho\left(u_\infty^2\right) v_\infty$ lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Posons :

$$S_\infty = \rho\left(u_\infty^2\right) v_\infty \quad , \quad S(y) = \widetilde{\rho}\left(|y+v_\infty|^2\right)(y+v_\infty) - S_\infty, \tag{2.3}$$

pour y dans $\mathbb{R}^2$. L'équation (II) devient $\mathrm{div}(S(u)) = 0$. La relation (V) devient $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. On lui substitue l'hypothèse $u \in L^2(G)$. Le rapport vient de ce que u tend alors en moyenne vers zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Avec $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, la relation (IV) devient

$$\int_\Gamma u \cdot \tau \, d\Gamma = -u_\infty \int_\Gamma \tau_1 \, d\Gamma = 0.$$

En effet, par hypothèse, Γ est le support d'un chemin fermé (voir fig. 1). Comme $\mathrm{rot}(u) = 0$ sur G, la trace tangentielle de u dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est définie. C'est pourquoi l'on interprète $\int_\Gamma u \cdot \tau \, d\Gamma = 0$ par la condition $\langle u \cdot \tau, 1 \rangle_\Gamma = 0$. Comme $\widetilde{\rho}(t)$ ne s'annule pas pour $t < 1$, la relation (III) équivaut, en supposant la relation (VI) satisfaite sur Γ, à $\widetilde{\rho}\left(|u+v_\infty|^2\right)(u+v_\infty) \cdot n_e = 0$ sur Γ, soit $S(u) \cdot n_e = -S_\infty \cdot n_e$ sur Γ. L'expression $S(u) \cdot n_e$ est à prendre au sens de la trace normale dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En effet, on a $\mathrm{div}(S(u)) = 0$ et il sera établi au lemme 2.1 que $u \in L^2(G)$ implique $S(u) \in L^2(G)$.

L'étude qui précède ramène le système initial avec condition d'entropie, *i.e.* les relations (I) à (VII) du paragraphe 1, au système suivant, dont on a dissocié la condition $u \in L^2(G)$:

Système 1: (avec condition d'entropie) *Soient S et S_∞ définis en (2.3) ci-dessus.*

(I) $\mathrm{rot}(u) = 0$ *sur* G *;*

(II) $\mathrm{div}(S(u)) = 0$ *sur* G *;*

(III) $S(u) \cdot n_e = -S_\infty \cdot n_e$ *sur* Γ *;*

(IV) $\langle u \cdot \tau, 1 \rangle_\Gamma = 0$ *;*

(V) $\mathrm{div}(u) \leq c$ *sur* G*, pour une constante* c *donnée ;*

(VI) $|u + v_\infty|^2 \leq \mu_1 < 1$ *sur* G*.*

La relation (V) ci-dessus est à prendre au sens des distributions. Elle correspond à la relation (VII) du système initial. Ce stratagème permet de faire coïncider les relations (VI) issues de chacun des deux systèmes.

Le problème avec condition d'entropie admet alors la forme suivante :

Problème 1: (avec condion d'entropie) *Déterminer une solution u dans $L^2(G)$ du système 1 ci-dessus.*

2.2 Cadre fonctionnel

Dans ce paragraphe nous considérons quelques propriétés des fonctions $\widetilde{\rho}$ et S, nous étudions des espaces fonctionnels $V(G)$ et $V^1(G)$ qui serviront à établir la formulation variationnelle de la partie équations du système 1 (§ 2.3), et nous étudions un espace fonctionnel $Z(G)$ adapté au traitement ultérieur de la partie inéquations du système 1 (§ 2.4).

Le prolongement $\widetilde{\rho}$ par zéro pour $t \geq 1$ de $\rho : t \longmapsto \rho_0 (1-t)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ est continu sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ et satisfait, avec la fonction S qui l'utilise, le lemme suivant :

Lemme 2.1: *Soit $S : y \mapsto \widetilde{\rho}\left(|y+v_\infty|^2\right)(y+v_\infty) - S_\infty$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie au paragraphe 2.1 précédent, soit $\widetilde{S}$ la fonction définie sur $L^2(G,\mathbb{R}^2)$ qui à u associe $S(u)$ et soit $\Delta = \rho_0 + 2\sup\{|\widetilde{\rho}'(t^2)|\, t; t \in \mathbb{R}_+\}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous $y, \overline{y}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $\delta y = \overline{y} - y$, on a l'encadrement*

$$\left|\widetilde{\rho}\left(|\overline{y}|^2\right)\overline{y} - \widetilde{\rho}\left(|y|^2\right)y\right| \leq \Delta\,|\delta y| \;\; ;$$

2. Si $u \in L^2(G, \mathbb{R}^2)$ alors $S(u)$ appartient à $L^2(G, \mathbb{R}^2)$ et $\widetilde{S}$ est continue de $L^2(G, \mathbb{R}^2)$ dans $L^2(G, \mathbb{R}^2)$.

PREUVE:

1. Soit la fonction $f(s) = \widetilde{\rho}\left(|y + s\,\delta y|^2\right)(y + s\,\delta y)$. On a

$$\widetilde{\rho}\left(|\overline{y}|^2\right)\overline{y} - \widetilde{\rho}\left(|y|^2\right)y = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(s)\,ds.$$

On calcule

$$f'(s) = 2\widetilde{\rho}'\left(|y + s\,\delta y|^2\right)((y + s\,\delta y)\cdot\delta y)(y + s\,\delta y) + \widetilde{\rho}\left(|y + s\,\delta y|^2\right)\delta y.$$

Avec $\widetilde{\rho}(t) \leq \rho_0$ pour $0 \leq t$, on en déduit

$$\begin{aligned}|f'(s)| &\leq \left[2\left|\widetilde{\rho}'\left(|y + s\,\delta y|^2\right)\right||y + s\,\delta y|^2 + \widetilde{\rho}\left(|y + s\,\delta y|^2\right)\right]|\delta y| \\ &\leq \left[\rho_0 + 2\sup\left\{\left|\widetilde{\rho}'(t)\right|t; t \in \mathbb{R}_+\right\}\right]|\delta y| = \Delta\,|\delta y|,\end{aligned}$$

qui donne la majoration cherchée.

2. Soit x un point de G. Avec $\overline{y} = u(x) + v_\infty$ et $y = v_\infty$, on a

$$S(u(x)) = \widetilde{\rho}\left(|\overline{y}|^2\right)\overline{y} - \widetilde{\rho}\left(|y|^2\right)y.$$

Le 1 du lemme donne $|S(u(x))| \leq \Delta\,|\overline{y} - y|$, soit $|S(u(x))| \leq \Delta\,|u(x)|$. Par intégration sur G, on obtient que $S(u)$ appartient à $L^2(G)$, avec $|S(u)|_0 \leq \Delta\,|u|_0$. Soient $u, \overline{u}$ dans $L^2(G)$ et soit x un point de G. Le 1 du lemme avec $y = u(x) + v_\infty$ et $\overline{y} = \overline{u}(x) + v_\infty$ donne

$$|S(\overline{u}(x)) - S(u(x))| \leq \Delta\,|\overline{u}(x) - u(x)|.$$

Par intégration sur G on en déduit

$$|S(\overline{u}) - S(u)|_0 \leq \Delta\,|\overline{u} - u|_0,$$

ce qui établit la continuité de $\widetilde{S}$. □

On définit l'espace $V(G)$ de la façon suivante :

$$V(G) = \left\{v; v \in L^2\left(G, \mathbb{R}^2\right), \mathrm{rot}(v) = 0 \text{ sur } G, \langle v\cdot\tau, 1\rangle_\Gamma = 0\right\}.$$

On note que la trace tangentielle $v\cdot\tau$ d'une fonction $v \in V(G)$ existe dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On munit $V(G)$ de la norme de $L^2(G)$.

À la suite de [30], introduisons la fonction poids $\overline{\omega}(r)$ de G dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\overline{\omega}(r) = \frac{1}{r\ln(r)} \quad , \quad r = |x| \quad , \quad x \in G.$$

Les données géométriques du paragraphe 1 impliquent que la distance à l'origine $r = |x|$, pour x dans G, est minorée par une constante strictement supérieure à 1. La fonction $\overline{\omega}(r)$, avec $r = |x|$, appartient donc à $L^2(G, \mathbb{R})$. On définit l'espace $V^1(G)$ par

$$V^1(G) = \left\{\xi ; \overline{\omega}(r)\xi \in L^2(G, \mathbb{R}), \nabla\xi \in L^2\left(G, \mathbb{R}^2\right)\right\}.$$

On le munit de la norme $|\cdot|_{V^1(G)}$ suivante :

$$|\xi|_{V^1(G)} = \left(|\overline{\omega}(r)\xi|_0^2 + |\nabla\xi|_0^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On cherche à caractériser $V(G)$ à partir de $V^1(G)$. À cette fin, mais aussi pour l'étude ultérieure du problème sans entropie (§ 3), donnons trois lemmes préparatoires.

Lemme 2.2: *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Il existe une fonction $\theta_{a,b}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i) *$\theta_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $[0;1]$;*

(ii) *$\theta_{a,b}(t) = 1$ si $t \leq a$, $\theta_{a,b}(t) = 0$ si $t \geq b$;*

(iii) *Il existe une constante c relativement à t, a et b telle que $\left|\theta'_{a,b}\right| \leq \frac{c}{b-a}$.*

Par exemple, une telle fonction est donnée, avec $\lambda > 0$, par les relations

$$\psi_\lambda(t) = \exp\left(\frac{t^2}{t^2 - \lambda}\right) \mathrm{Un}_{\{t;|t|<\lambda\}}(t),$$

$$\theta_{a,b}(t) = 1 - \frac{1}{K_{a,b}} \int_{-\infty}^{t} \psi_{\frac{b-a}{2}}\left(s - \frac{b+a}{2}\right) ds,$$

où $K_{a,b}$ est la constante assurant $\theta_{a,b}(t) = 0$ si $t \geq b$.

Lemme 2.3: *Soit $R_0 > 1$ considéré au paragraphe 1 et soit $r_{R_0} = R_0^{\exp(-1/2)}$, qui vérifie $r_{R_0} < R_0$. On fait l'hypothèse que R_0 est choisi de telle sorte que* *le profil $\mathcal{P}$ est inclus dans le disque ouvert $\{x;\, |x| < r_{R_0}\}$. Pour $R \geq R_0$ on pose*

$$r_R = R^{\exp(-1/2)},$$

qui vérifie $r_R < R$. Il existe une constante c_0 et, pour $R \geq R_0$, il existe une fonction θ_R, qui satisfont les propriétés suivantes :

(i) θ_R *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+$*, à valeurs dans* $[0; 1]$ *;*

(ii) $\theta_R(t) = 1$ *si* $t \leq r_R, \theta_R(t) = 0$ *si* $t \geq R$ *;*

(iii) $\left|\theta'_R(t)\right| \leq c_0 \frac{1}{t\ln(t)} Un_{\{t; r_R < t < R\}}(t)$ *si* $t > 1$.

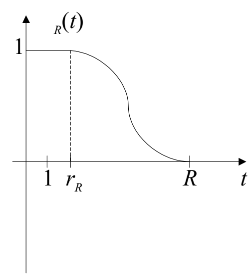

Fig. 2 – Fonction θ_R

En suivant [14], une telle fonction θ_R est donnée par

$$y_R(t) = 1 + \ln\left(\frac{\ln(t)}{\ln(R)}\right) \quad , \quad \theta_R(t) = \begin{cases} \theta_{\frac{1}{2},1}(y_R(t)) \text{ si } t > 1 \\ 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

où $\theta_{\frac{1}{2},1}$ est une fonction comme dans le lemme 2.2 pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. Remarquons que θ_R est une fonction $\theta_{r_R,R}$, au sens du lemme 2.2.

Lemme 2.4: *Soit ξ une fonction de $V^1(G)$ et pour $R \geq R_0$, avec R_0 choisi comme dans le lemme 2.3, soit θ_R une fonction donnée par ce même lemme. La fonction $\theta_R(r)\xi$, avec $r = |x|$, appartient à $V^1(G)$ et on a*

$$\lim_{R\to\infty} \nabla\left(\theta_R(r)\xi\right) = \nabla\xi$$

dans $L^2(G)$.

PREUVE: On calcule

$$\nabla(\theta_R(r)\,\xi) = \theta_R(r)\,\nabla\xi + \xi\,\theta_R'(r)\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right).$$

D'après le lemme 2.3, on a $\theta_R(r) = 1$ et $\theta_R'(r) = 0$ pour $r \leq r_R$, avec

$$\lim_{R\to\infty} r_R = \lim_{R\to\infty} R^{\exp(-1/2)} = +\infty.$$

Il en résulte que

$$\lim_{R\to\infty} \nabla(\theta_R(|x|)\,\xi(x)) = \nabla\xi(x) \tag{2.4}$$

pour tout x de G. Le lemme 2.3 donne la majoration

$$\left|\theta_R'(r)\right| \leq \frac{c_0}{r\ln(r)}\mathrm{Un}_{\{r;r_R<r<R\}}(r)$$

pour $r > 1$. Cette dernière condition est satisfaite par $r = |x|$ dans G, d'après les données du paragraphe 1. Il vient

$$\left|\xi\,\theta_R'(r)\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)\right| \leq c_0\frac{|\xi|}{r\ln(r)} = c_0\,\overline{\omega}(r)\,|\xi|$$

sur G. Ce dernier membre, avec $r = |x|$, est une fonction de $L^2(G)$. Comme $|\theta_R(r)\,\nabla\xi| \leq |\nabla\xi|$, on en déduit que $\nabla(\theta_R(r)\,\xi)$ appartient à $L^2(G)$. Ceci joint à (2.4) donne, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que $\nabla(\theta_R(r)\,\xi)$ tend vers $\nabla\xi$ dans $L^2(G)$, lorsque R tend vers l'infini. Il reste à s'assurer que $\theta_R(r)\,\xi$ appartient à $V^1(G)$. Comme $|\theta_R(r)\,\xi| \leq |\xi|$, la fonction $\overline{\omega}(r)\,\theta_R(r)\,\xi$ appartient à $L^2(G)$. Compte tenu que $\nabla(\theta_R(r)\,\xi)$ est dans $L^2(G)$, la conclusion cherchée en résulte. □

Nous sommes en mesure d'établir la proposition suivante, qui donne la caractérisation de $V(G)$ cherchée :

Proposition 2.5: *Une fonction v appartient à $V(G)$ si et seulement si elle est de la forme $v = \nabla\xi$, où ξ appartient à $V^1(G)$. Autrement dit, on a*

$$V(G) = \nabla V^1(G).$$

Preuve: Soit ξ une fonction de $V^1(G)$. Alors $\nabla\xi$ appartient à $V(G)$. En effet, on a $\mathrm{rot}(\nabla\xi) = 0$, ainsi que $\langle \nabla\xi\cdot, 1\rangle_\Gamma = 0$ (voir fig. 1).

Montrons la réciproque. Soit v dans $V(G)$. Dans ([14], p. 102), il est établi que v comme fonction de $L^2(G)$ admet une décomposition

$$v = \lambda\,(\nabla\overline{v})^\intercal + \nabla\xi,$$

où $\lambda = \left(v, (\nabla\overline{v})^\intercal\right)_0 / \left|\nabla\overline{v}\right|_0^2$ et $\xi, \overline{v}$ sont dans $V^1(G)$, avec $\overline{v} = 1$ sur Γ. Il suffit de montrer $\left(v, (\nabla\overline{v})^\intercal\right)_0 = 0$ pour établir la réciproque.

On a $\left(v, (\nabla\overline{v})^\intercal\right)_0 = -\left(v^\intercal, \nabla\overline{v}\right)_0$. Pour $R \geq R_0$, avec R_0 choisi comme dans le lemme 2.3, soit θ_R une fonction donnée par ce même lemme. Comme $\theta_R(r) = 0$ est vérifié pour $r \geq R$, la fonction $\theta_R(r)\,\overline{v}$, avec $r = |x|$, est à support compact inclus dans la fermeture de $G_{R+1} = G \cap \{x; |x| < R+1\}$. On a donc

$$\left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_0 = \left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_{0,R+1}.$$

Comme $\left|\overline{\omega}(r)\,\overline{v}\right|_0$ et $\left|\nabla\overline{v}\right|_0$ sont finis, il vient que $\left|\overline{v}\right|_{0,R+1}$ et $\left|\nabla\overline{v}\right|_{0,R+1}$ sont finis. La restriction de $\overline{v}$ à G_{R+1}, encore notée $\overline{v}$, appartient donc à $H^1(G_{R+1})$. La *formule de Green, en rotationnel*, appliquée à l'ouvert G_{R+1}, donne

$$\begin{aligned}\left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_{0,R+1} &= \left\langle v\cdot\tau, \theta_R(r)\,\overline{v}\right\rangle_{\Gamma\cup\Gamma_{R+1}} - \left(\mathrm{rot}(v), \theta_R(r)\,\overline{v}\right)_{0,R+1}\\ &= \left\langle v\cdot\tau, \overline{v}\right\rangle_\Gamma,\end{aligned}$$

car $\theta_R(r)\,\overline{v} = \overline{v}$ au voisinage de Γ. On a $\overline{v} = 1$ sur Γ. Comme v appartient à $V(G)$, on a $\langle v\cdot\tau, 1\rangle_\Gamma = 0$. Il en résulte $\left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_{0,R+1} = 0$, puis $\left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_0 = 0$. D'après le lemme 2.4 $\nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)$ tend vers $\nabla\overline{v}$ dans $L^2(G)$ lorsque R tend vers l'infini. Par continuité, on en déduit

$$\lim_{R\to\infty}\left(v^\intercal, \nabla\left(\theta_R(r)\,\overline{v}\right)\right)_0 = \left(v^\intercal, \nabla\overline{v}\right)_0,$$

et donc $\left(v^\intercal, \nabla\overline{v}\right)_0 = 0$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Soit $Z(G)$ l'espace défini par

$$Z(G) = \left\{\phi; \phi : G \to \mathbb{R}, r\ln(r)\,\phi \in L^2(G,\mathbb{R}), \nabla\phi \in L^2\left(G,\mathbb{R}^2\right)\right\}.$$

Rappelons que, selon les données géométriques du paragraphe 1, la fermeture de G est incluse dans l'ouvert $\{x; |x| > 1\}$ du plan. La condition $r\ln(r)\,\phi \in L^2(G,\mathbb{R})$, où $r = |x|$, peut également, à l'aide de la fonction poids $\overline{\omega}(r) = \frac{1}{r\ln(r)}$, s'écrire

$$\frac{\phi}{\overline{\omega}(r)} \in L^2(G,\mathbb{R}).$$

On munit $Z(G)$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|\phi\| = \left(|r\ln(r)\,\phi|_0^2 + |\nabla\phi|_0^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il y a injection continue de $Z(G)$ dans $H^1(G)$. Cela résulte de $r\ln(r) \geq 1$ dès que $r \geq e$. La trace $\phi|_\Gamma$ sur Γ d'un élément ϕ de $Z(G)$ existe donc, ce qui permet de définir $Z_0(G)$, sous-espace de $Z(G)$, par

$$Z_0(G) = \{\phi; \phi \in Z(G); \phi|_\Gamma = 0\}.$$

On considère également les cônes positifs

$$\mathcal{D}_+(G) = \{\phi; \phi \in \mathcal{D}(G), \phi \geq 0\}, \quad H^1_{0,+}(G) = \left\{v; v \in H^1(G), v \geq 0, v|_\Gamma = 0\right\},$$

et

$$Z_{0,+}(G) = \{\phi; \phi \in Z(G); \phi \geq 0, \phi|_\Gamma = 0\}.$$

Munis de la norme $\|\cdot\|$, les ensembles $Z_0(G)$ et $Z_{0,+}(G)$ sont inclus dans $H^1_0(G)$ et $H^1_{0,+}(G)$ respectivement, avec injections continues.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.6:

1. *Les espaces $Z(G)$, $Z_0(G)$ et $Z_{0,+}(G)$ sont complets .*
2. *L'espace $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $Z_0(G)$; l'espace $\mathcal{D}_+(G)$ est dense dans $Z_{0,+}(G)$.*
3. *Avec $\phi_+ = \frac{1}{2}(\phi + |\phi|)$, la partie positive de ϕ, on a*

$$Z_{0,+}(G) = \{\phi_+; \phi \in Z_0(G)\}.$$

Preuve:

1. Montrons que $Z(G)$ est complet. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $Z(G)$. Comme il y a injection continue de $Z(G)$ dans $H^1(G)$, c'est aussi une suite de Cauchy de $H^1(G)$. Il existe donc $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$ dans $H^1(G)$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} \nabla\phi_n = \nabla\phi$ dans $L^2(G)$. Par ailleurs, $\left(\frac{\phi_n}{\overline{\omega}(r)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2(G)$, qui converge vers une fonction ξ de $L^2(G)$. On a

$$|\phi - \overline{\omega}(r)\,\xi| \leq |\phi - \phi_n| + \overline{\omega}(r)\left|\frac{\phi_n}{\overline{\omega}(r)} - \xi\right| \leq |\phi - \phi_n| + \left|\frac{\phi_n}{\overline{\omega}(r)} - \xi\right|,$$

dès que $r \geq e$. En passant à la limite, on en déduit que $\phi - \overline{\omega}(r)\,\xi = 0$. Il en résulte que $\frac{\phi}{\overline{\omega}(r)}$ appartient à $L^2(G)$ et que $\left(\frac{\phi_n}{\overline{\omega}(r)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\phi}{\overline{\omega}(r)}$ dans $L^2(G)$. Finalement, la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $Z(G)$, qui est complet.

Comme l'opérateur trace de $Z(G)$ dans $L^2(\Gamma)$ est continu, $Z_0(G)$ est un sous-espace fermé de $Z(G)$. Le cône positif $Z_{0,+}(G)$ est aussi fermé dans $Z(G)$. Ainsi, $Z_0(G)$ et $Z_{0,+}(G)$ sont complets.

2. Montrons que $\mathcal{D}_+(G)$ est dense dans $Z_{0,+}(G)$. Tout d'abord, $\mathcal{D}_+(G)$ est inclus dans $Z_{0,+}(G)$. Soit ϕ une fonction de $Z_{0,+}(G)$ et soit $\varepsilon > 0$. On cherche une fonction $\widetilde{\psi}$ de $\mathcal{D}_+(G)$ telle que

$$\left\|\phi - \widetilde{\psi}\right\| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Soit r_{R_0} choisi comme au lemme 2.3, et pour $R \geq r_{R_0}$, soit $\theta_{R,R+1}$ une fonction donnée par le lemme 2.2. Posons

$$\phi_R = \theta_{R,R+1}(r)\,\phi,$$

avec $r = |x|$. Comme $0 \leq \theta_{R,R+1}(r) \leq 1$, la fonction $\frac{\phi_R}{\overline{\omega}(r)}$ appartient à $L^2(G)$ et $\phi_R \geq 0$. Au voisinage de Γ, on a $\theta_{R,R+1}(r) = 1$, $\phi_R = \phi$ et donc $\phi_R|_\Gamma = 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On calcule

$$\nabla\phi_R = \theta_{R,R+1}(r)\,\nabla\phi + \phi\,\theta'_{R,R+1}(r)\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right).$$

Les fonctions ϕ et $\nabla\phi$ appartiennent à $L^2(G,\mathbb{R})$ et $L^2(G,\mathbb{R}^2)$ respectivement. Les fonctions $\theta_{R,R+1}(r)$ et $\theta'_{R,R+1}(r)\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)$, avec $r = |x|$, sont bornées sur G et il vient que $\nabla\phi_R$ appartient à $L^2(G,\mathbb{R}^2)$. Finalement, ϕ_R appartient à $Z_{0,+}(G)$. Avec $\overline{\theta}_{R,R+1} = 1 - \theta_{R,R+1}$, on a

$$\|\phi - \phi_R\|^2 = \left|\overline{\theta}_{R,R+1}(r)\,\frac{\phi}{\overline{\omega}(r)}\right|_0^2 + \left|\overline{\theta}_{R,R+1}(r)\,\nabla\phi - \phi\,\theta'_{R,R+1}(r)\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)\right|_0^2. \tag{2.6}$$

D'après le lemme 2.2, les fonctions $\overline{\theta}_{R,R+1}(r)$ et $\theta'_{R,R+1}(r)$ sont nulles pour $r \leq R$. L'identité (2.6) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue conduisent à

$$\lim_{R\to\infty} \|\phi - \phi_R\| = 0.$$

Soit $R(\varepsilon) \geq r_{R_0}$ tel que $\left\|\phi - \phi_{R(\varepsilon)}\right\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. La fonction $\phi_{R(\varepsilon)}$ est nulle en dehors de

$$G_{R(\varepsilon)+1} = G \cap \{x; |x| \leq R(\varepsilon) + 1\},$$

et en particulier au voisinage de

$$\Gamma_{R(\varepsilon)+2} = \{x; |x| = R(\varepsilon) + 2\}.$$

Comme $Z_{0,+}(G)$ est inclus dans $H_0^1(G)$, il existe une fonction ψ de $\mathcal{D}\left(G_{R(\varepsilon)+2}\right)$ telle que

$$\left|\phi_{R(\varepsilon)} - \psi\right|_{1,R(\varepsilon)+2} \leq \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{(R(\varepsilon)+2)\ln(R(\varepsilon)+2)},$$

avec la notation $|\cdot|_{1,R(\varepsilon)+2}$ pour la norme habituelle de $H^1\left(G_{R(\varepsilon)+2}\ ,\mathbb{R}\right)$. De plus, on peut choisir $\psi \geq 0$. En effet, suivant ([3], cor. IX p. 162), une telle fonction ψ peut être prise de la forme

$$\psi = \zeta_n\left(\rho_n * p\phi_{R(\varepsilon)}\right),$$

où p est un opérateur de prolongement, ρ_n est un terme d'une suite régularisante et ζ_n est un opérateur de troncature, ces opérateurs établissant le passage de $\phi_{R(\varepsilon)}$à ψ en préservant la positivité. Le prolongement $\widetilde{\psi}$ de ψ par zéro dans $G \setminus G_{R(\varepsilon)+2}$ appartient donc à $\mathcal{D}_+(G)$ et on a

$$\left|\phi_{R(\varepsilon)}\_\psi\right|_{1,R(\varepsilon)+2} = \left|\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right|_1.$$

Comme la fonction $\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}$ est nulle en dehors de $G_{R(\varepsilon)+2}$, il vient

$$\left\|\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right\|^2 = \left|r\ln(r)\left(\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right)\right|_0^2 + \left|\nabla\left(\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right)\right|_0^2$$

$$\leq \left[(R(\varepsilon)+2)\ln(R(\varepsilon)+2)\right]^2\left(\left|\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right|_0^2 + \left|\nabla\left(\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right)\right|_0^2\right)$$

$$= \left[(R(\varepsilon)+2)\ln(R(\varepsilon)+2)\right]^2\left|\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right|_1^2 \leq \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2.$$

On en déduit

$$\left\|\phi - \widetilde{\psi}\right\| \leq \left\|\phi - \phi_{R(\varepsilon)}\right\| + \left\|\phi_{R(\varepsilon)} - \widetilde{\psi}\right\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

et donc $\widetilde{\psi}$ est une fonction de $\mathcal{D}_+(G)$ qui satisfait la relation (2.5).

Pour montrer que $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $Z_0(G)$, on procède comme ci-dessus, avec les arguments de positivité en moins.

3. Soit

$$\mathcal{U}(G) = \{\phi_+; \phi \in Z_0(G)\}.$$

L'inclusion $Z_{0,+}(G) \subset \mathcal{U}(G)$ est immédiate. Soit ϕ dans $Z_0(G)$. Comme

$$0 \leq \frac{\phi_+}{\varpi(r)} \leq \frac{|\phi|}{\varpi(r)},$$

la fonction $\frac{\phi_+}{\varpi(r)}$ appartient à $L^2(G)$. D'après ([15], p. 934), on a $\nabla(\phi_+) = \mathrm{Y}(\phi)\nabla\phi$, où Y est la fonction de Heaviside. Il vient $|\nabla(\phi_+)| \leq |\nabla\phi|$ et donc $\nabla(\phi_+)$ appartient à $L^2(G)$. Ainsi, $\nabla(\phi_+)$ appartient à $Z(G)$. Comme $\phi|_\Gamma = 0$ implique $\phi_+|_\Gamma = 0$, on en déduit que ϕ_+ appartient à $Z_{0,+}(G)$, ce qui établit l'inclusion $\mathcal{U}(G) \subset Z_{0,+}(G)$. □

2.3 Formulation variationnelle des équations

Soit ξ une fonction de $V^1(G)$, à support borné. C'est aussi une fonction de $H^1(G)$. Soit $u \in L^2(G)$ solution du système 1. D'après le 2 du lemme 2.1, la fonction $S(u)$ appartient à $L^2(G)$. De plus $\mathrm{div}(S(u)) = 0$ sur G. Compte tenu de $S(u)\cdot n_e = -S_\infty \cdot n_e$ sur Γ, l'application de la f*ormule de Green, en divergence*, sur l'ouvert G de frontière Γ bornée et lipschitzienne, donne

$$(S(u), \nabla\xi)_0 = \langle S(u)\cdot n_e, \xi\rangle_\Gamma - (\mathrm{div}(S(u)), \xi)_0 = -\langle S_\infty \cdot n_e, \xi\rangle_\Gamma. \quad (2.7)$$

Soit θ_{R_0} une fonction donnée par le lemme 2.3. Les propriétés de θ_{R_0} impliquent, avec $r = |x|$, que $\theta_{R_0}(r) = 1$ et $\nabla\theta_{R_0}(r) = 0$ au voisinage de Γ. La fonction $g(x) = \theta_{R_0}(r)\rho(u_\infty^2)u_\infty x_2$, avec $r = |x|$ et $x = (x_1, x_2)$ dans G, satisfait

$$\nabla g \cdot \tau = \left(0, \rho\left(u_\infty^2\right)u_\infty\right)\cdot\tau = \left(\rho\left(u_\infty^2\right)u_\infty, 0\right)\cdot\tau^{\mathsf{T}} = S_\infty \cdot n_e \quad (2.8)$$

sur Γ. La *formule de Green, en rotationnel*, sur l'ouvert G, conduit à

$$\langle \nabla g\cdot\tau, \xi\rangle_\Gamma = ((\nabla g)^{\mathsf{T}}, \nabla\xi)_0 + (\mathrm{rot}(\nabla g), \xi)_0 = ((\nabla g)^{\mathsf{T}}, \nabla\xi)_0. \quad (2.9)$$

Ceci joint à $(S(u), \nabla\xi)_0 = -\langle S_\infty\cdot n_e, \xi\rangle_\Gamma = -\langle\nabla g\cdot\tau, \xi\rangle_\Gamma$ implique $(S(u), \nabla\xi)_0 = (-(\nabla g)^{\mathsf{T}}, \nabla\xi)_0$, pour ξ dans $V^1(G)$ à support borné.

Soit ξ une fonction de $V^1(G)$, sans condition de support. Pour $R \geq R_0$, avec R_0 choisi comme dans le lemme 2.3, soit θ_R une fonction donnée par ce même lemme. D'après le lemme 2.4, la fonction $\xi_R = \theta_R(r)\xi$, avec $r =$

$|x|$, appartient à $V^1(G)$. Elle est à support borné. Le résultat précédent s'applique, ce qui donne

$$(S(u), \nabla\xi_R)_0 = (-(\nabla g)^\intercal, \nabla\xi_R)_0 .$$

D'après le lemme 2.4, $\nabla\xi_R$ tend vers $\nabla\xi$ dans $L^2(G)$ quand R tend vers l'infini et, par continuité, on en déduit $(S(u), \nabla\xi)_0 = (-(\nabla g)^\intercal, \nabla\xi)_0$, puisque $(\nabla g)^\intercal$ appartient à $L^2(G)$. Posons $w_l = -(\nabla g)^\intercal$. On a montré $(S(u), \nabla\xi)_0 = (w_l, \nabla\xi)_0$ pour toute fonction ξ de $V^1(G)$. D'après la proposition 2.5, on en déduit

$$\forall v \in V(G), (S(u), v)_0 = (w_l, v)_0 . \tag{2.10}$$

L'espace $V(G)$ est de Hilbert comme sous-espace fermé de $L^2(G)$. Cela résulte de l'hypothèse que Γ est borné, ce qui donne la continuité de l'application associant $\langle v \cdot \tau, 1\rangle_\Gamma$ à $v \in H(\mathrm{rot}, G)$. La projection P de $L^2(G)$ sur $V(G)$ est donc définie. Il vient que la relation (2.10) équivaut à $|P(S(u) - w_l)|_0 = 0$.

Compte tenu de $w_l = -(\nabla g)^\intercal$, d'après (2.8) et (2.9) ci-dessus, on a

$$(w_l, \nabla\xi)_0 = -\langle \nabla g \cdot \tau, \xi\rangle_\Gamma = -\langle S_\infty \cdot n_e, \xi\rangle_\Gamma \tag{2.11}$$

pour toute fonction ξ de $V^1(G)$ à support borné. Comme $w_l = 0$ sur $G \setminus G_{R_0}$, cette identité vaut en fait pour toute fonction ξ de $V^1(G)$, sans condition de support.

L'étude qui précède montre qu'une solution $u \in L^2(G)$ de la partie équations du système 1 satisfait l'un ou l'autre des problèmes suivants, équivalents entre eux :

Problème: (variationnel, sans condition d'entropie) *Étant donné ρ_0, γ et u_∞, déterminer une fonction $u \in V(G)$ telle que*

$$\forall v \in V(G), (S(u), v)_0 = (w_l, v)_0 .$$

Problème: (fonctionnel, sans condition d'entropie) *Soit la fonctionnelle positive I définie sur $L^2(G)$ par*

$$I(\cdot) = |P(S_l(\cdot))|_0, S_l(\cdot) \ = \ S(\cdot) - w_l,$$

où P est la projection de $L^2(G)$ sur $V(G)$. Étant donné ρ_0, γ et u_∞, déterminer une fonction $u \in V(G)$ telle que

$$I(u) = 0. \tag{2.12}$$

Notons que la fonction S_l est définie sur $L^2(G)$, alors que la fonction S est définie sur $\mathbb{R}^2$. En complément des énoncés précédents, rappelons quelques définitions et propriétés données dans ce paragraphe :

(i) $V(G) = \{v; v \in L^2(G, \mathbb{R}^2), \mathrm{rot}(v) = 0 \text{ sur } G, \langle v \cdot \tau, 1 \rangle_\Gamma = 0\} = \nabla V^1(G)$;

(ii) $V^1(G) = \{\xi; \overline{\omega}(r)\xi \in L^2(G, \mathbb{R}), \nabla\xi \in L^2(G, \mathbb{R}^2)\}$;

(iii) $w_l = -(\nabla g)^{\intercal}, g(x) = \theta_{R_0}(r)\rho(u_\infty^2)u_\infty x_2$, avec $r = |x|$, pour $x = (x_1, x_2)$ dans G.

(iv) $(w_l, \nabla\xi)_0 = -\langle \nabla g \cdot \tau, \xi \rangle_\Gamma = -\langle S_\infty \cdot n_e, \xi \rangle_\Gamma$, pour ξ dans $V^1(G)$.

Le point (iv) est donné par (2.11).

Nous avons déduit les deux problèmes précédents de la partie équations du système 1 avec condition d'entropie. La réciproque se montrerait de façon classique en faisant appel à la *formule de Green, en divergence*, sur l'ouvert G [20]. Il vient :

Proposition 2.7: *Le problème de la détermination d'une solution dans* $L^2(G)$ *de la partie équations (I) à (IV) du système 1 et le problème variationnel ou fonctionnel précédent sont équivalents.*

2.4 Formulation en équation des contraintes-inégalités

L'objet de ce paragraphe est de transformer les contraintes-inégalités d'entropie (V) et de domaine transsonique (VI) du système 1, soit

$$\text{(V) } \mathrm{div}(u) \leq c \quad \text{et} \quad \text{(VI) } |u + v_\infty|^2 \leq \mu_1$$

respectivement, en une équation $F(u) = 0$. De façon plus précise, on a

$$F = F_1 + F_2, \tag{2.13}$$

chacune des deux contraintes-inégalités correspondant à $F_1(u) = 0$ et $F_2(u) = 0$ respectivement, les fonctionnelles F_1 et F_2 étant à valeurs réelles positives.

Pour la relation (V), en posant $t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|)$ lorsque $t \in \mathbb{R}$, on a la proposition suivante :

Proposition 2.8: *Pour u dans $L^2(G)$ et ϕ dans $Z_0(G)$, on définit*

$$b(u,\phi) = \left[-\left(u,\, Y(\phi)\,\nabla\phi\right)_0 - c\left(1,\phi_+\right)_0\right]_+,$$

où Y est la fonction de Heaviside. Sur $L^2(G)$, on définit également

$$F_1(u) = \sup\left(\frac{b(u,\phi)}{\|\phi\|}; \phi \in Z_0(G)\setminus\{0\}\right).$$

La relation

$$(V)\ \operatorname{div}(u) \leq c,$$

du système 1, au sens des distributions, est équivalente à chacune des relations suivantes :

(V.i) $\forall\phi \in \mathcal{D}_+(G), -(u,\nabla\phi)_0 \leq (c,\phi)_0$ *;*

(V.ii) $\forall\phi \in Z_{0,+}(G), -(u,\nabla\phi)_0 \leq (c,\phi)_0$ *;*

(V.iii) $\forall\phi \in Z_0(G), b(u,\phi) = 0$ *;*

(V.iv) $F_1(u) = 0$.

Preuve: La relation (V.i) est la définition de (V), au sens des distributions.

Par densité de $\mathcal{D}_+(G)$ dans $Z_{0,+}(G)$, donnée par le 2 de la proposition 2.6, on obtient l'équivalence avec (V.ii).

Pour établir l'équivalence avec (V.iii), suivons [6]. L'inégalité (V.iii) s'écrit

$$\left[-(u,\nabla\phi)_0 - (c,\phi)_0\right]_+ = 0, \tag{2.14}$$

avec ϕ dans $Z_{0,+}(G)$. Soit ϕ dans $Z_0(G)$. D'après le 3 de la proposition 2.6, la fonction ϕ_+ appartient à $Z_{0,+}(G)$. D'après [15], on a $\nabla(\phi_+) = \mathrm{Y}(\phi)\,\nabla\phi$. La relation (V.ii) implique donc

$$\forall\phi \in Z_0(G), \left[-\left(u, Y(\phi)\,\nabla\phi\right)_0 - \left(c,\phi_+\right)_0\right]_+ = 0,$$

qui est (V.iii).

Réciproquement, une fonction ϕ de $Z_{0,+}(G)$ appartient à $Z_0(G)$, elle satisfait $\phi = \phi_+$ et donc $\mathrm{Y}(\phi)\,\nabla\phi = \nabla\phi$. La relation (V.iii) implique alors (2.14), c'est-à-dire (V.ii).

Établissons l'équivalence entre (V.iii) et (V.iv). On a les majorations

$$0 \leq b\left(u,\phi\right) \leq \left|\left(u,\Upsilon\left(\phi\right)\nabla\phi\right)_0\right| + |c| \left|\left(\overline{\varpi}\left(r\right), \frac{\phi}{\overline{\varpi}\left(r\right)}\right)_0\right|$$

$$\leq |u|_0 \left|\nabla\phi\right|_0 + |c| \left|\overline{\varpi}\left(r\right)\right|_0 \left|\frac{\phi}{\overline{\varpi}\left(r\right)}\right|_0 \leq \left(|u|_0 + |c| \left|\overline{\varpi}\left(r\right)\right|_0\right) \|\phi\| .$$

Pour ϕ non nul, on en déduit

$$\frac{b\left(u,\phi\right)}{\|\phi\|} \leq |u|_0 + |c| \left|\overline{\varpi}\left(r\right)\right|_0 < \infty,$$

et donc $F_1\left(u\right)$ est majoré. L'équivalence suit. □

Pour la contrainte-inégalité de domaine transsonique, on a la proposition suivante :

Proposition 2.9: *Soit u dans $L^2\left(G\right)$. La relation*

$$\textit{(VI)}\ \ \left|u\left(x\right) + v_\infty\right|^2 \leq \mu_1$$

du système 1, qui vaut pour presque tout x dans G, équivaut à

$$F_2\left(u\right) = 0,$$

avec

$$F_2\left(u\right) = \left(\overline{\varpi}\left(r\right)\left[\left|u+v_\infty\right|^2 - \mu_1\right]_+, 1\right)_0 .$$

Preuve: On a les équivalences

$$\begin{aligned} \left|u\left(x\right)+v_\infty\right|^2 \leq \mu_1\ pp\left(x\right) &\Leftrightarrow \left[\left|u\left(x\right)+v_\infty\right|^2 - \mu_1\right]_+ = 0\ pp\left(x\right) \\ &\Leftrightarrow \int_G \overline{\varpi}\left(\left|x\right|\right)\left[\left|u\left(x\right)+v_\infty\right|^2 - \mu_1\right]_+ dx = 0 \end{aligned}$$

□

2.5 Une méthode d'optimisation (1)

Compte tenu de la proposition 2.7 pour la fonctionnelle positive I définie dans le problème fonctionnel (§ 2.3) et des résultats du paragraphe 2.4 pour la fonctionnelle positive F, le problème 1 avec condition d'entropie admet la formulation suivante :

Problème: (fonctionnel, avec condition d'entropie) *Déterminer* $u \in V(G)$ *tel que* $I(u) = F(u) = 0$.

Soit

$$m = \inf \left\{ I(u) \, ; u \in V(G) \cap F^{-1}(0) \right\}. \tag{2.15}$$

Notons que l'ensemble $V(G) \cap F^{-1}(0)$ n'est pas vide puisqu'il contient la fonction nulle. Pour $\nu > 0$, soit I_ν la fonctionnelle de $V(G)$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$I_\nu = I + \nu F.$$

On pose

$$m_\nu = \inf \left\{ I_\nu(u) \, ; u \in V(G) \right\}. \tag{2.16}$$

Soulignons dès à présent que, d'un point de vue numérique, l'emploi de m_ν est plus constructif que celui de m puisque $V(G)$ est un espace vectoriel, ce qui n'est pas le cas de $V(G) \cap F^{-1}(0)$.

Par définition de m_ν, il existe une fonction $u_{\varepsilon,\nu}$ dans dans $V(G)$ telle que

$$m_\nu \leq I_\nu(u_{\varepsilon,\nu}) \leq m_\nu + \varepsilon.$$

La dernière inégalité s'écrit

$$I(u_{\varepsilon,\nu}) + \nu F(u_{\varepsilon,\nu}) \leq m_\nu + \varepsilon. \tag{2.17}$$

On a

$$m_\nu \leq \inf \left\{ I_\nu(u) \, ; u \in V(G) \cap F^{-1}(0) \right\}.$$

L'identité $I_\nu(u) = I(u)$ pour tout u de $V(G) \cap F^{-1}(0)$ donne

$$m_\nu \leq m.$$

En reportant ceci dans (2.17), on obtient

$$I(u_{\varepsilon,\nu}) + \nu F(u_{\varepsilon,\nu}) \leq m + \varepsilon,$$

puis

$$I\left(u_{\varepsilon,\nu}\right) \leq m + \varepsilon$$

pour tout $\nu > 0$. On en déduit aussi

$$\nu F\left(u_{\varepsilon,\nu}\right) \leq m + \varepsilon.$$

Le choix de $\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1$ donne $\frac{m+\varepsilon}{\nu_\varepsilon} \leq \varepsilon$ et donc

$$F\left(u_{\varepsilon,\nu_\varepsilon}\right) \leq \varepsilon.$$

Posons

$$u_\varepsilon = u_{\varepsilon,\nu_\varepsilon}.$$

Nous avons obtenu le théorème suivant, qui constitue une réponse partielle au problème 1 avec condition d'entropie :

Théorème 2.10: (solutions généralisées à ε près du problème 1) *Soit $F = F_1 + F_2$, où F_1 et F_2 sont les fonctionnelles positives données par les propositions 8 et 9 respectivement. Soit I la fonctionnelle positive définie dans le problème fonctionnel sans condition d'entropie (§ 2.3) et soit*

$$m = \inf\left\{I\left(u\right); u \in V\left(G\right) \cap F^{-1}\left(0\right)\right\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction u_ε de $V\left(G\right)$ telle que

$$I\left(u_\varepsilon\right) \leq m + \varepsilon, \quad \textit{et } F\left(u_\varepsilon\right) \leq \varepsilon.$$

Pour un choix de ν_ε tel que $\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1$, elle est déterminée par la condition

$$m_{\nu_\varepsilon} \leq I_{\nu_\varepsilon}\left(u_\varepsilon\right) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon,$$

où

$$I_{\nu_\varepsilon} = I + \nu_\varepsilon F, \quad \textit{et} \quad m_{\nu_\varepsilon} = \inf\left\{I_{\nu_\varepsilon}\left(u\right); u \in V\left(G\right)\right\}.$$

Une telle fonction u_ε de $V\left(G\right)$ est appelée solution généralisée à ε près *du problème 1.*

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par [4] dans le cas d'un ouvert borné G_R. À notre connaissance, aussi bien dans le cas de G que dans celui de G_R, l'obtention de $m = 0$ est un problème ouvert. Néanmoins, on observe par des essais numériques sur les équations discrétisées, en dimension finie, que m peut s'annuler (voir [1] [29] [6] [5] [7], par exemple).

2.6 Une méthode d'optimisation (2)

Au paragraphe 2.5 précédent, on a considéré la fonctionnelle

$$I_\nu(\cdot) = |P(S_l(\cdot))|_0 + \nu F(\cdot)$$

définie sur $L^2(G)$, où P est la projection de $L^2(G)$ sur $V(G)$. L'emploi d'une telle projection est mal adapté à une approche borné / non borné, considération naturelle dans le cadre d'une étude numérique, par exemple. Au prix d'un élargissement du cadre fonctionnel, nous allons lever cette difficulté.

En notant d la distance associée à la norme de $L^2(G)$, on remarque :

$$|P(S_l(\cdot))|_0 = d\left(S_l(\cdot), V(G)^\perp\right).$$

On en déduit que les minima m et m_ν définis, avec $\nu > 0$, par

$$m = \inf\{I(u); u \in V(G), F(u) = 0\}.$$

et

$$m_\nu = \inf\{I_\nu(u); u \in V(G)\},$$

admettent les caractérisations suivantes :

$$m = \inf\left\{K(u,v); (u,v) \in V(G) \times V(G)^\perp, F(u) = 0\right\} \tag{2.18}$$

et

$$m_\nu = \inf\left\{K_\nu(u,v); (u,v) \in V(G) \times V(G)^\perp\right\}, \tag{2.19}$$

où K et K_ν sont les fonctionnelles définies sur $L^2(G)^2$ par

$$K_\nu = K + \nu F, \quad \text{et} \quad K(u,v) = |S_l(u) - v|_0. \tag{2.20}$$

Dans le théorème 2.10, pour $\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1$, l'existence de la solution généralisée à ε près du problème 1 en non borné G, soit u_ε, est assurée par la condition

$$m_{\nu_\varepsilon} \leq I_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon,$$

avec u_ε dans $V(G)$. La substitution de $K_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ à $I_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon)$, avec $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ dans $V(G) \times V(G)^\perp$, donne une condition équivalente.

Retenons le théorème suivant :

Théorème 2.11: (solutions généralisées à ε près du problème 1) *Soit K_ν la fonctionnelle définie sur $L^2(G)^2$ par*

$$K_\nu = K + \nu F, \quad \textit{avec } K(u,v) = |S_l(u) - v|_0 .$$

Dans le théorème 10, pour ν_ε tel que $\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1$, la condition

$$m_{\nu_\varepsilon} \leq I_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon \textit{ avec } u_\varepsilon \textit{ dans } V(G) \tag{2.21}$$

peut être remplacée par

$$m_{\nu_\varepsilon} \leq K_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon \textit{ avec } (u_\varepsilon, v_\varepsilon) \textit{ dans } V(G) \times V(G)^\perp . \tag{2.22}$$

2.7 Approche borné / non borné

Commençons par un lemme.

Lemme 2.12: *Soit $V(G)_R$ le sous-espace de $L^2(G)$ défini par $V(G)_R =$*

$$\left\{v; v \in L^2\left(G, \mathbb{R}^2\right), \mathrm{rot}(v) = 0 \textit{ sur } G_R, v \cdot \tau = 0 \textit{ sur } \Gamma_R, v = 0 \textit{ sur } G \setminus G_R\right\}.$$

On a $V(G)_R \subset V(G)$.

Preuve: Soit v une fonction de $V(G)_R$. Pour une fonction ξ de $H^1(G)$, la formule de Green, en rotationnel, sur G_R donne

$$(v^\intercal, \nabla\xi)_{0,R} = \langle v \cdot \tau, \xi\rangle_{\Gamma \cup \Gamma_R} - (\mathrm{rot}(v), \xi)_{0,R} = \langle v \cdot \tau, \xi\rangle_\Gamma .$$

Avec ξ une fonction égale à 1 sur G_R, on obtient

$$\langle v \cdot \tau, 1\rangle_\Gamma = 0.$$

Montrons que $\mathrm{rot}(v) = 0$ sur G ce qui établira, avec ce qui précède, que v appartient à $V(G)$. Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(G)$. Le rotationnel de v, au sens des distributions, est défini par

$$\mathrm{rot}(v)(\phi) = -(v^\intercal, \nabla\phi)_0 = -(v^\intercal, \nabla\phi)_{0,R} .$$

La formule de Green, en rotationnel, sur G_R conduit à

$$\mathrm{rot}(v)(\phi) = -\langle v \cdot \tau, \phi\rangle_{\Gamma \cup \Gamma_R} + (\mathrm{rot}(v), \phi)_{0,R} = 0.$$

Ainsi, on a $\mathrm{rot}(v) = 0$ sur G. Le lemme en résulte. □

Nous définissons un problème en borné G_R, avec condition d'entropie, de la façon suivante :

Problème 2: (avec condition d'entropie, en borné G_R) *Soit $R \geq R_0$. Déterminer $u \in V(G)_R$ tel que $I(u) = F(u) = 0$.*

Comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe 2.5, la méthode d'optimisation (2) est mieux adaptée à une approche borné / non borné que la méthode d'optimisation (1). Examinons cela.

Commençons par un corollaire et un lemme préliminaires.

Corollaire 2.13:

1. *Soit v une fonction de $V(G)$. D'après la proposition 2.5, elle est de la forme $v = \nabla\xi$, avec ξ dans $V^1(G)$. Pour $R \geq R_0 + 1$, avec R_0 choisi comme dans le lemme 2.3, soit θ_{R-1} est une fonction donnée par ce même lemme, et soit*

$$v_R = \nabla\left(\theta_{R-1}(r)\,\xi\right),$$

   où $r = |x|$. On a:

   (i) $v_R \in V(G)_R$ *;*

   (ii) $\lim_{R\to\infty} v_R = v$ *dans* $L^2(G)$.

2. *La suite $\left(V(G)_R\right)_{R \geq R_0}$ est croissante pour l'inclusion et la réunion*

$$\cup_{R \geq R_0} V(G)_R$$

   est dense dans $V(G)$.

C'est un corollaire du lemme 2.4 et de la proposition 2.5.

Notons que, pour simplifier l'écriture et sans risque de confusion, nous avons appelé $\left(V(G)_R\right)_{R \geq R_0}$ *suite* au lieu de *suite généralisée.* Nous ferons cet abus de vocabulaire pour toute famille indexée sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour simplifier les notations, posons $V(G) = V$, $V^1(G) = V^1$, $V(G)_R = V_R$, $V(G)^\perp = V^\perp$ et $L^2(G) = L^2$.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.14:

1. On a

$$V^{\perp} = \left\{ v; v \in L^2, div(v) = 0 \ sur \ G, v \cdot n_e = 0 \ sur \ \Gamma \right\}. \tag{2.23}$$

2. Soit $\left(V^{\perp}\right)_R =$

$$\left\{ v; v \in L^2, div(v) = 0 \ sur \ G_R, v = 0 \ sur \ G \setminus G_R, v \cdot n_e = 0 \ sur \ \Gamma \cup \Gamma_R \right\} \ ;$$

on a

$$\left(V^{\perp}\right)_R \subset V^{\perp} \subset \left(V_R\right)^{\perp}.$$

3. La suite $\left(V_R \times \left(V^{\perp}\right)_R\right)_{R \geq R_0}$ *est croissante pour l'inclusion et la réunion*

$$\cup_{R \geq R_0} V_R \times \left(V^{\perp}\right)_R$$

est dense dans $V \times V^{\perp}$*.*

Preuve:

1. Notons provisoirement U l'ensemble figurant dans le second membre de (2.23). Pour u dans $V^{\perp}$ et $v = \nabla \xi$ dans $V = \nabla V^1$, la formule de Green, en divergence, appliquée à l'ouvert G, conduit à

$$0 = (u, v)_0 = \langle u \cdot n_e, \xi \rangle_{\Gamma} - (\mathrm{div}\,(u), \xi)_0. \tag{2.24}$$

La considération de ξ dans $\mathcal{D}(G)$ donne

$$\mathrm{div}\,(u) = 0 \text{ sur } G, \tag{2.25}$$

puis, la considération de ξ dans $\mathcal{D}\left(\overline{G}\right) = \{ v|_G ; v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \}$ donne

$$u \cdot n_e = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{2.26}$$

Ceci montre l'inclusion de $V^{\perp}$ dans U.

Avec u dans U et $v = \nabla \xi$ dans $V = \nabla V^1$, les relations (2.25) et (2.26) sont satisfaites par hypothèse, ce qui implique (2.24). Ceci montre l'inclusion de U dans $V^{\perp}$ et donc l'égalité.

2. Considérons

$$V = \left\{ v; v \in L^2, \mathrm{rot}\,(v) = 0 \text{ sur } G, \langle v \cdot \tau, 1 \rangle_{\Gamma} = 0 \right\},$$

$$V_R = \left\{v;\ v \in L^2,\ \mathrm{rot}\,(v) = 0 \text{ sur } G_R,\ v = 0 \text{ sur } G \setminus G_R,\ v \cdot \tau = 0 \text{ sur } \Gamma_R\right\}.$$

Posons

$$V^{\mathsf{T}} = \{v^{\mathsf{T}}; v \in V\} \quad , \quad (V_R)^{\mathsf{T}} = \{v^{\mathsf{T}}; v \in V_R\}.$$

Comme

$$\mathrm{div}\,(v^{\mathsf{T}}) = \mathrm{rot}\,(v) \quad , \quad v^{\mathsf{T}} \cdot n_e = v \cdot \tau,$$

on a

$$V^{\mathsf{T}} = \left\{v;\ v \in L^2,\ \mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ sur } G,\ \langle v \cdot n_e, 1\rangle_\Gamma = 0\right\}, \tag{2.27}$$

$$(V_R)^{\mathsf{T}} = \left\{v;\ v \in L^2,\ \mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ sur } G_R,\ v = 0 \text{ sur} G \setminus G_R,\ v \cdot n_e = 0 \text{ sur } \Gamma_R\right\}.$$

Il vient

$$\left(V^\perp\right)_R \subset (V_R)^{\mathsf{T}}.$$

D'après le lemme 2.12, on a $V_R \subset V$ et donc

$$\left(V^\perp\right)_R \subset (V_R)^{\mathsf{T}} \subset V^{\mathsf{T}}.$$

Pour une fonction v dans $\left(V^\perp\right)_R$, il en résulte

$$\mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ sur } G.$$

On en déduit

$$\left(V^\perp\right)_R \subset V^\perp \subset (V_R)^\perp,$$

la dernière inclusion provenant de $V_R \subset V$.

3. Soit $R' > R \geq R_0$. Pour v dans $\left(V^\perp\right)_R$, on a $v = 0$ au voisinage de $\Gamma_{R'}$ et, d'après le 2,

$$\mathrm{div}\,(v) = 0 \text{ sur } G.$$

Cela implique $\left(V^\perp\right)_R \subset \left(V^\perp\right)_{R'}$. La croissance de la suite $\left(\left(V^\perp\right)_R\right)_{R \geq R_0}$ en découle. Celle de la suite $(V_R)_{R \geq R_0}$ est acquise par le corollaire 2.13. Finalement, la suite $\left(V_R \times \left(V^\perp\right)_R\right)_{R \geq R_0}$ est croissante.

D'après (2.23) et (2.27), on a

$$V^\perp \subset V^{\mathsf{T}}.$$

À partir du gradient $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$, posons

$$\nabla^{\mathsf{T}} = (\partial_2, -\partial_1).$$

D'après la proposition 2.5, on a $V = \nabla V^1$. On en déduit

$$V^{\intercal} = \nabla^{\intercal} V^1.$$

Ainsi, une fonction v de $V^{\perp}$ est de la forme

$$v = \nabla^{\intercal} \xi,$$

avec ξ dans V^1. Soit

$$v_R = \nabla^{\intercal} \left(\theta_{R-1}\xi\right),$$

où θ_{R-1} est une fonction donnée par le lemme 2.3. D'après le corollaire 2.13, on a $\lim_{R\to\infty} \nabla \left(\theta_{R-1}\xi\right) = \nabla\xi$ dans L^2. Il en résulte

$$\lim_{R\to\infty} v_R = v \text{ dans } L^2. \tag{2.28}$$

On a

$$\operatorname{div}\left(v_R\right) = \operatorname{div}\left(\nabla^{\intercal}\left(\theta_{R-1}\xi\right)\right) = \operatorname{div}\left(\left(\nabla\left(\theta_{R-1}\xi\right)\right)^{\intercal}\right) = \operatorname{rot}\left(\nabla\left(\theta_{R-1}\xi\right)\right) = 0 \text{ sur } G, \tag{2.29}$$

et

$$v_R \cdot n_e = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2.30}$$

puisque $v = v_R$ au voisinage de Γ. D'après le lemme 2.3, $v_R = \nabla^{\intercal}\left(\theta_{R-1}\xi\right)$ est nul au voisinage de Γ_R et donc

$$v_R \cdot n_e = 0 \text{ sur } \Gamma_R \tag{2.31}$$

On déduit de (2.29), (2.30) et (2.31) que v_R appartient à $\left(V^{\perp}\right)_R$. Ceci joint à (2.28) montre que $\cup_{R\geq R_0}\left(V^{\perp}\right)_R$ est dense dans $V^{\perp}$. La densité de $\cup_{R\geq R_0} V_R$ dans V étant acquise par le corollaire 2.13, celle de $\cup_{R\geq R_0} V_R \times \left(V^{\perp}\right)_R$ dans $V \times V^{\perp}$ suit. □

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.15: (solutions généralisées à ε près du problème 2) *Soit $\varepsilon > 0$. Soit m et, pour $\nu > 0$, soit m_ν donnés dans le théorème 2.10 (p. 44). On a*

$$m_\nu = \inf\left\{K_\nu\left(u,v\right); \left(u,v\right) \in V\left(G\right) \times V\left(G\right)^{\perp}\right\},$$

où K_ν est la fonctionnelle sur $L^2\left(G\right)^2$ définie dans le théorème 2.11 (p. 46). Soit $\left(V^{\perp}\right)_R$ le sous-espace de $L^2\left(G\right)$ introduit dans le lemme 2.14. On pose

$$m_{\nu,R} = \inf\left\{K_\nu\left(u,v\right); \left(u,v\right) \in V_R \times \left(V^{\perp}\right)_R\right\}.$$

On a:

1. $\lim\limits_{R\to\infty} m_{\nu,R} = m_\nu$ *;*

2. Il existe $R_\varepsilon \geq R_0$ *et il existe* u_ε *tels que, pour* $R \geq R_\varepsilon$*, la fonction* u_ε *soit une solution généralisée à* ε *près du problème 2 en borné* G_R *; c'est aussi une solution généralisée à* ε *près du problème 1 en non borné* G *; l'existence de* R_ε *et* u_ε *est assurée par les conditions suivantes :*

(i) Choix de ν_ε *tel que* $\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1$ *;*

(ii) Choix de $R_\varepsilon = R(\varepsilon, \nu_\varepsilon)$ *tel que* $m_{\nu_\varepsilon, R_\varepsilon} \leq m_{\nu_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$ *;*

(iii) Choix de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *dans* $V_{R_\varepsilon} \times \left(V^\perp\right)_{R_\varepsilon}$ *tel que*

$$m_{\nu_\varepsilon, R_\varepsilon} \leq K_\nu(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon, R_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Preuve:

1. Soit $R' \geq R \geq R_0$. D'après le lemme 2.14, la suite $\left(V_R \times \left(V^\perp\right)_R\right)_{R \geq R_0}$ est croissante pour l'inclusion et à éléments dans $V \times V^\perp$. On en déduit

$$m_\nu \leq m_{\nu,R'} \leq m_{\nu,R}. \tag{2.32}$$

Ainsi, $(m_{\nu,R})_{R\geq R_0}$ est une suite décroissante minorée. Elle converge vers une limite m'_ν. Montrons que $m'_\nu = m_\nu$. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il s'agit d'établir l'existence d'un nombre réel positif $R = R(\varepsilon_0)$ et d'un couple de fonctions $(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R})$ de $V_R \times \left(V^\perp\right)_R$ tels que

$$K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) \leq m_\nu + \varepsilon_0.$$

Soit $(u_{\varepsilon_0,\nu}, v_{\varepsilon_0,\nu})$ un couple de $V_R \times \left(V^\perp\right)_R$ tel que

$$K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu}, v_{\varepsilon_0,\nu}) \leq m_\nu + \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.33}$$

Le lemme 2.14 implique l'existence d'une suite $(u_{\varepsilon_0,\nu,R},\ v_{\varepsilon_0,\nu,R})$ de $V_R \times \left(V^\perp\right)_R$ telle que

$$\lim_{R\to\infty} (u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) = (u_{\varepsilon_0,\nu}, v_{\varepsilon_0,\nu}) \tag{2.34}$$

dans $L^2(G) \times L^2(G)$.

Pour (u,v) dans $L^2(G) \times L^2(G)$, considérons

$$K_\nu(u,v) = K(u,v) + \nu F_1(u) + \nu F_2(u),$$

et chacun des trois termes de cette somme. On a

$$K(u,v) = |S_l(u) - v|_0 \quad , \quad S_l(u) = S(u) - w_l.$$

D'après le lemme 2.1, la fonctionnelle $\widetilde{S}$ qui à u associe $S(u)$ est continue sur $L^2(G)$. Il en résulte que K est également une fonctionnelle continue sur $L^2(G) \times L^2(G)$. Le terme

$$F_2(u) = \left(\overline{\omega}(r)\left[|u + v_\infty|^2 - \mu_1\right]_+, 1\right)_0$$

est continu sur $L^2(G)$. Pour ψ dans $Z_0(G)$, la fonction

$$f_\phi(u) = b(u,\phi) = \left[-(u, \Upsilon(\phi)\nabla\phi)_0 - c(1,\phi_+)_0\right]_+$$

est continue sur $L^2(G)$. Le terme

$$F_1(u) = \sup\left(\frac{b(u,\phi)}{\|\phi\|}; \phi \in Z_0(G) \setminus \{0\}\right)$$

est donc semi-continu inférieurement sur $L^2(G)$, comme enveloppe supérieure de la famille $(f_\phi)_{\phi \in Z_0(G)}$ de fonctions continues sur $L^2(G)$ ([9], théorème 8.6 p. 135). Il en résulte que $K_\nu(u,v)$ est une fonction semi-continue inférieurement sur $L^2(G) \times L^2(G)$. Compte tenu de (2.34), il vient

$$\liminf_{R\to\infty} I_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}) = I_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu})$$

([9], proposition 7.2 p. 133). Ainsi, il existe un nombre réel positif $R = R(\varepsilon_0)$ tel que

$$|K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) - K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu}, v_{\varepsilon_0,\nu})| \le \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.35}$$

La majoration (2.33) ci-dessus donne

$$K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) \le K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) - K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu}, v_{\varepsilon_0,\nu}) + m_\nu + \frac{\varepsilon_0}{2},$$

dont on déduit avec (2.35)

$$K_\nu(u_{\varepsilon_0,\nu,R}, v_{\varepsilon_0,\nu,R}) \le m_\nu + \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Cela montre $m'_\nu = m_\nu$, soit

$$\lim_{R\to\infty} m_{\nu,R} = m_\nu.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\nu > 0$. Rappelons que

$$m_\nu = \inf\left\{K_\nu (u,v) \,;(u,v) \in V \times V^\perp\right\}$$

$$m_{\nu,R} = \inf\left\{K_\nu (u,v) \,;(u,v) \in V_R \times \left(V^\perp\right)_R\right\}.$$

On a $m_\nu \leq m_{\nu,R}$ et d'après le 1 du lemme,

$$\lim_{R\to\infty} m_{\nu,R} = m_\nu.$$

Il existe donc un nombre réel positif $R(\varepsilon,\nu)$ tel que

$$m_{\nu,R(\varepsilon,\nu)} \leq m_\nu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec $m_\nu \leq m$ établi dans la démonstration du théorème 2.10, cela donne

$$m_{\nu,R(\varepsilon,\nu)} \leq m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après (2.32), la suite $\left(m_{\nu,R}\right)_{R\geq R_0}$ est décroissante. Il vient

$$m_{\nu,R} \leq m + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que } R \geq R(\varepsilon,\nu),$$

ce que l'on suppose.

Par définition de $m_{\nu,R(\varepsilon,\nu)}$, il existe $\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}, v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right)$ dans $V_{R(\varepsilon,\nu)} \times \left(V^\perp\right)_{R(\varepsilon,\nu)}$ tel que

$$m_{\nu,R(\varepsilon,\nu)} \leq K_\nu\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}, v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) \leq m_{\nu,R(\varepsilon,\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.36}$$

On a donc

$$K_\nu\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}, v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) \leq m + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

soit

$$K\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}, v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) + \nu F\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) \leq m + \varepsilon.$$

On en déduit $K\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}, v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) \leq m + \varepsilon$ et $\nu F\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu,R(\varepsilon,\nu)}\right) \leq m + \varepsilon$. Le choix de ν_ε satisfaisant

$$\nu_\varepsilon \geq \frac{m}{\varepsilon} + 1 \tag{2.37}$$

donne $\frac{m+\varepsilon}{\nu_\varepsilon} \leq \varepsilon$ et donc $F\left(u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu_\varepsilon,R(\varepsilon,\nu_\varepsilon)}\right) \leq \varepsilon$. Posons

$$R_\varepsilon = R\left(\varepsilon, \nu_\varepsilon\right) \quad , \quad u_\varepsilon = u_{\frac{\varepsilon}{2},\nu_\varepsilon,R_\varepsilon} \quad , \quad v_\varepsilon = v_{\frac{\varepsilon}{2},\nu_\varepsilon,R_\varepsilon}. \tag{2.38}$$

Il vient que u_ε est une solution généralisée à ε près du problème 1 en non borné G. Comme $m \leq m_R$ et que, pour $R \geq R_\varepsilon$, cette fonction u_ε appartient à V_R, elle est aussi une solution généralisée à ε près du problème 2 en borné G_R, pour $R \geq R_\varepsilon$. Le choix de R_ε et $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ pour ces résultats sont donnés par (2.36), (2.37), et (2.38). □

2.8 Synthèse

Soient K sur $L^2(G)^2$, I et F sur $L^2(G)$, les fonctionnelles introduites en (2.20), (2.12) et (2.13) respectivement. Pour $\nu > 0$, on a également défini les fonctionnelles $K_\nu = K + \nu F$ et $I_\nu = I + \nu F$.

Pour $R \geq R_0$, soient $V(G)_R$ et $\left(V(G)^\perp\right)_R$ les sous-espaces de $L^2(G)$ donnés par les lemmes 2.12 et 2.14.

Pour $\nu > 0$ et $R \geq R_0$, on a introduit les nombres réels positifs suivants :

(i)

$$\begin{aligned} m &= \inf\left\{I(u)\,;\; u \in V(G), F(u) = 0\right\} \\ &= \inf\left\{K(u,v)\,;\; (u,v) \in V(G) \times V(G)^\perp, F(u) = 0\right\}; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m_\nu &= \inf\left\{I_\nu(u)\,;\; u \in V(G)\right\} \\ &= \inf\left\{K_\nu(u,v)\,;\; (u,v) \in V(G) \times V(G)^\perp\right\}; \end{aligned}$$

(iii)

$$m_{\nu,R} = \inf\left\{K_\nu(u,v)\,;\; (u,v) \in V(G)_R \times \left(V(G)^\perp\right)_R\right\},$$

avec

$$\lim_{R\to\infty} m_{\nu,R} = m_\nu.$$

Les identités dans (i) et (ii) ont été établies en (2.18) et (2.19), et la limite dans (iii) a été obtenue dans le théorème 2.15.

Soit $\varepsilon > 0$. On a les résultats suivants :

1. Une *solution* du problème 1 en non borné G est une fonction u de $V(G)$ vérifiant $F(u) = 0$ et telle que l'une ou l'autre des conditions suivantes sont satisfaites :

   (i) $m = I(u) = 0$;

   (ii) $\exists v \in V(G)^{\perp}, m = K(u, v) = 0.$

2. Il existe une *solution généralisée à ε près* du problème 1 en non borné G, soit u_ε dans $V(G)$, satisfaisant l'une ou l'autre des conditions suivantes, où ν_ε est un réel positif convenable :

   (i) $m_{\nu_\varepsilon} \leq I_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon$;

   (ii) $\exists v_\varepsilon \in V(G)^{\perp}, m_{\nu_\varepsilon} \leq K_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq m_{\nu_\varepsilon} + \varepsilon.$

3. Il existe un nombre réel $R_\varepsilon \geq R_0$ tel qu'une *solution généralisée à ε près* du problème 2 en borné G_R existe indépendamment de $R \geq R_\varepsilon$; celle-ci, soit u_ε dans $V(G)_{R_\varepsilon}$, satisfait la condition suivante, où ν_ε est un réel positif convenable :

   (i) $\exists v_\varepsilon \in \left(V(G)^{\perp}\right)_{R_\varepsilon}, m'_{\nu_\varepsilon, R_\varepsilon} \leq K_{\nu_\varepsilon}(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq m'_{\nu_\varepsilon, R_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}.$

Il est remarquable que la fonction $u_\varepsilon \in V(G)_{R_\varepsilon}$ donnée par le point 3 en borné G_R est aussi une solution généralisée à ε près pour le point 2 en non borné G.

3 Problème sans condition d'entropie

Pour la partie équations (I) à (IV) du système initial (§ 1) qui, d'après la proposition 2.7, correspond aussi au problème fonctionnel sans condition d'entropie (§ 2.3), on propose une amélioration de la résolution à ε près du paragraphe 2 précédent. Ceci est obtenu au prix d'un hypothèse (H) qui est discutée à la fin du paragraphe 3.2.

3.1 Modification de la non linéarité. Propriétés d'encadrement

L'objet de ce paragraphe est d'une part d'introduire un nouveau prolongement k de ρ et le problème modifié correspondant en justifiant son intérêt, et d'autre part d'établir des propriétés d'encadrement de k et du terme non linéaire associé, soit $Q\,(u)$ comme défini en (3.39) ci-dessous, essentielles pour la résolution à ε près envisagée.

Avec θ_{μ_1,μ_2} donné par le lemme 2.2, la fonction k définie par

$$k\,(t) = \rho_0 + \int_0^t \theta_{\mu_1,\mu_2}\,(s)\;\rho'\,(s)\;ds$$

satisfait le lemme suivant ([14], p. 186) :

Proposition 3.1: *Étant donné deux réels μ_1 et μ_2 tels que*

$$v_c^2 < \mu_1 < \mu_2 < 1,$$

il existe une fonction réelle k satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) k *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+$ *;*

(ii) $k\,(t) = \rho\,(t)$ *pour* $t \leq \mu_1$ *et* $k\,(t) = k\,(\mu_2)$ *pour* $t \geq \mu_2$ *;*

(iii) $k'\,(t) < 0$ *pour* $t < \mu_2$.

Il vient :

(iv) $k\,(t) \leq \rho\,(0) = \rho_0$ *pour* $t \geq 0$ *;*

(v) $k'\,(t) = 0$ *pour* $t \geq \mu_2$.

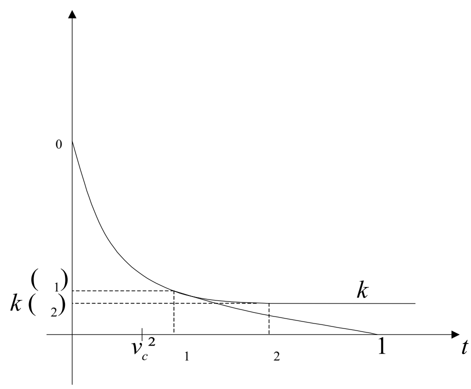

Fig. 3 – Prolongement k de ρ

On formule un problème modifié déduit du problème initial sans condition d'entropie, *i.e.* du problème de la détermination d'une solution des relations (I) à (VI) données au paragraphe 1, en substituant k à ρ. Un intérêt de cette démarche est que le prolongement k est défini pour $t > 1$, contrairement à ρ. De cette façon, on poursuit la résolution en laissant de côté la relation (VI) initiale, soit $|v|^2 \leq \mu_1 < 1$ sur G. Si une solution v est ainsi obtenue et si elle vérifie, *a posteriori*, $|v|^2 \leq \mu_1 < 1$ sur G, alors elle est également une solution du problème initial.

Pour l'énoncé du problème modifié, nous reprenons la mise en forme réalisée au paragraphe 2.1 pour le problème avec condition d'entropie. Toutefois, pour tenir compte de l'emploi de k et non de $\widetilde{\rho}$, nous introduisons à la place de S la fonction Q suivante :

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, y \mapsto k\left(|y + v_\infty|^2\right)(y + v_\infty) - Q_\infty, \quad \text{où} \quad Q_\infty = \rho\left(u_\infty^2\right) v_\infty. \tag{3.39}$$

Notons que si la relation (VI) $|v|^2 \leq \mu_1 < 1$ sur G est satisfaite alors $Q_\infty = S_\infty$. Avec $u = v - v_\infty$ dans $L^2(G)$ on est alors ramené au système modifié suivant :

Système 2: (modifié, sans condition d'entropie)

(I) $\operatorname{rot}(u) = 0$ *sur* G *;*

(II) $\operatorname{div}(Q(u)) = 0$ *sur* G *;*

(III) $Q(u) \cdot n_e = -Q_\infty \cdot n_e$ *sur* Γ *;*

(IV) $\langle u \cdot \tau, 1\rangle_\Gamma = 0.$

Dans le système ci-dessus l'expression $Q(u) \cdot n_e$ est à prendre au sens de la trace normale dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En effet, on a $\operatorname{div}(Q(u)) = 0$ et on montrera dans le lemme 3.3 que $u \in L^2(G)$ implique $Q(u) \in L^2(G)$.

Le problème modifié, sans condition d'entropie, est le suivant :

Problème 3: (modifié, sans condition d'entropie) *Étant donné ρ_0, γ et u_∞, déterminer une solution $u \in L^2(G)$ du système modifié 2.*

Le lemme suivant regroupe les propriétés d'encadrement de k utiles par la suite :

Lemme 3.2: *Définissons les fonctions K et L suivantes :*

(i) $\forall t \geq 0, K(t) = \frac{1}{2}\int_{u_\infty^2}^{t} k(s)\, ds$ *;*

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}^2, L(y) = K\left(|y+v_\infty|^2\right) - Q_\infty \cdot y.$

On considère les réels C et $D(u_\infty)$ suivants :

(i) $C = \rho_0 + 2\sup\{|k'(t)|\, t; t \in \mathbb{R}_+\}$ *;*

(ii) $D(u_\infty) = k(\mu_2) - 2u_\infty \sup\{|k'(t^2)|\, t; t \in \mathbb{R}_+\}.$

On a les encadrements suivants, donnés pour tout $y, \overline{y}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $\delta y = \overline{y} - y$:

1. $\left|k\left(|\overline{y}|^2\right)\overline{y} - k\left(|y|^2\right) y\right| \leq C\,|\delta y|$ *;*
2. $Q(y)\cdot y \geq D(u_\infty)\,|y|^2$ *;*
3. $|L(y)| \leq \frac{1}{2}C\,|y|^2$ *;*
4. $-Q(y)\cdot \delta y \leq L(y) - L(\overline{y}) + \frac{1}{2}\rho_0\,|\delta y|^2.$

PREUVE:

1. La démonstration est analogue à celle du 1 du lemme 2.1.
2. On a

$$Q(y) = k\left(|y+v_\infty|^2\right) y + \left(k\left(|y+v_\infty|^2\right) - k\left(u_\infty^2\right)\right) v_\infty.$$

Soit la fonction $f(s) = k\left(|sy+v_\infty|^2\right)$. Il vient

$$Q(y) = k\left(|y+v_\infty|^2\right) y + v_\infty \int_0^1 f'(s)\, ds.$$

On calcule

$$f'(s) = 2k'\left(|sy+v_\infty|^2\right)\left((sy+v_\infty)\cdot y\right).$$

On en déduit $Q(y)\cdot y =$

$$k\left(|y+v_\infty|^2\right)|y|^2 + 2v_\infty\cdot y\int_0^1 k'\left(|sy+v_\infty|^2\right)\left((sy+v_\infty)\cdot y\right)ds,$$

puis compte tenu de $k \geq k(\mu_2)$ et $k' \leq 0$ donnés par la proposition 3.1,

$$Q(y)\cdot y \geq \left[k(\mu_2) - 2u_\infty \sup\left\{\left|k'\left(t^2\right)\right|t; t\in\mathbb{R}_+\right\}\right]|y|^2 = D(u_\infty)|y|^2.$$

3. Soit la fonction $f(s) = K\left(|sy+v_\infty|^2\right) - Q_\infty\cdot sy$. On a $f(0)=0$ et $f(1)=L(y)$. On calcule

$$f'(s) = k\left(|sy+v_\infty|^2\right)\left((sy+v_\infty)\cdot y\right) - Q_\infty\cdot y.$$

On remarque

$$f'(0) = k\left(u_\infty^2\right)v_\infty\cdot y - Q_\infty\cdot y = 0.$$

On calcule

$$f"(s) = 2k'\left(|sy+v_\infty|^2\right)\left((sy+v_\infty)\cdot y\right)^2 + k\left(|sy+v_\infty|^2\right)|y|^2.$$

Avec $k\leq\rho_0$ donné par la proposition 3.1, on en déduit

$$|f"(s)| \leq \left[2\left|k'\left(|sy+v_\infty|^2\right)\right||sy+v_\infty|^2 + k\left(|sy+v_\infty|^2\right)\right]|y|^2$$

$$\leq \left[2\sup\left\{|k'(t)|\,t; t\in\mathbb{R}_+\right\} + \rho_0\right]|y|^2 = C|y|^2.$$

D'après la formule de Taylor, il existe un réel s dans $]0;1[$ tel que $f(1) = \frac{1}{2}f"(s)$. Comme $f(1) = L(y)$, il vient $|L(y)| \leq \frac{1}{2}C|y|^2$.

4. Soit la fonction $f(s) = K\left(|y+v_\infty+s\,\delta y|^2\right)$. D'après la formule de Taylor, il existe un réel $\widetilde{s}$ dans $]0;1[$ tel que, avec $\widetilde{y} = y + \widetilde{s}\,\delta y$, on ait

$$f(1)-f(0) = K\left(|\overline{y}+v_\infty|^2\right) - K\left(|y+v_\infty|^2\right) = k\left(|y+v_\infty|^2\right)\left((y+v_\infty)\cdot\delta y\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[k\left(|\widetilde{y}+v_\infty|^2\right)|\delta y|^2 + 2k'\left(|\widetilde{y}+v_\infty|^2\right)\left((\widetilde{y}+v_\infty)\cdot\delta y\right)^2\right].$$

Compte tenu de $k\leq\rho_0$ et $k'\leq 0$ donnés par la proposition 3.1, on en déduit

$$-Q(y)\cdot\delta y = -\left[k\left(|y+v_\infty|^2\right)(y+v_\infty) - Q_\infty\right]\cdot\delta y$$

$$= -K\left(|\overline{y}+v_\infty|^2\right) + K\left(|y+v_\infty|^2\right) + Q_\infty\cdot\overline{y} - Q_\infty\cdot y$$

$$+\frac{1}{2}\left[k\left(\left|\widetilde{y}+v_{\infty}\right|^{2}\right)\left|\delta y\right|^{2}+2k'\left(\left|\widetilde{y}+v_{\infty}\right|^{2}\right)\left(\left(\widetilde{y}+v_{\infty}\right)\cdot\delta y\right)^{2}\right]$$

$$\leq L\left(y\right)-L\left(\overline{y}\right)+\frac{1}{2}\rho_{0}\left|\delta y\right|^{2}.$$

$\square$

Examinons quelques propriétés d'encadrement du terme non linéaire $Q\left(u\right)$. Avec Q, L, C et $D\left(u_{\infty}\right)$ comme définis ci-dessus on a le lemme suivant :

Lemme 3.3: *Soient u, $\overline{u}$, w dans $L^{2}\left(G,\mathbb{R}^{2}\right)$. On considère l'expression*

$$J\left(u\right)=\int_{G}\left(L\left(u\right)-w\cdot u\right)\,dx.$$

Avec $\delta u=\overline{u}-u$, il vient :

1. *$Q\left(u\right)$ appartient à $L^{2}\left(G,\mathbb{R}^{2}\right)$; on a la majoration $\left|Q\left(u\right)\right|_{0}\leq C\left|u\right|_{0}$;*
2. *Si u_{∞} satisfait l'hypothèse suivante :*

   $$(H)\quad D\left(u_{\infty}\right)>0\quad,\ soit\ \frac{k\left(\mu_{2}\right)}{2\sup\left\{\left|k'\left(t^{2}\right)\right|t;t\in\mathbb{R}_{+}\right\}}>u_{\infty},$$

   alors il existe des constantes $A>0$ et $B\geq 0$ telles que

   $$\left(Q\left(u\right)-w,u\right)_{0}\geq A\left|u\right|_{0}^{2}-B\ ;$$

   pour ε_{0} tel que $D\left(u_{\infty}\right)>\frac{\varepsilon_{0}}{2}>0$, le choix de $A=D\left(u_{\infty}\right)-\frac{\varepsilon_{0}}{2}$ et $B=\frac{1}{2\varepsilon_{0}}\left|w\right|_{0}^{2}$ convient ;
3. *L'expression $J\left(u\right)$ définit une fonctionnelle sur $L^{2}\left(G,\mathbb{R}^{2}\right)$, à valeurs réelles ; on a la majoration*

   $$\left|J\left(u\right)\right|\leq\frac{1}{2}C\left|u\right|_{0}^{2}+\left|w\right|_{0}\left|u\right|_{0}\ ;$$

4. *On a la majoration*

   $$-\left(Q\left(u\right)-w,\delta u\right)_{0}\leq J\left(u\right)-J\left(\overline{u}\right)+\frac{1}{2}\rho_{0}\left|\delta u\right|_{0}^{2}.$$

Preuve:

1. La démonstration est analogue à celle du 2 du lemme 2.1.
2. Soit x un point de G. Le 2 du lemme 3.2 donne

$$Q(u(x)) \cdot u(x) \geq D(u_\infty) |u(x)|^2 .$$

On calcule

$$(Q(u) - w, u)_0 = (Q(u), u)_0 - (w, u)_0 = \int_G Q(u(x)) \cdot u(x) \; dx - (w, u)_0$$

$$\geq \int_G D(u_\infty) |u(x)|^2 \; dx - (w, u)_0 \geq D(u_\infty) |u|_0^2 - |w|_0 |u|_0 .$$

À l'aide de l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\varepsilon_0} + b^2 \varepsilon_0\right)$, valable pour $\varepsilon_0 > 0$, on en déduit

$$(Q(u) - w, u)_0 \geq D(u_\infty) |u|_0^2 - \frac{\varepsilon_0}{2} |u|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon_0} |w|_0^2$$

$$= \left(D(u_\infty) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) |u|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon_0} |w|_0^2 .$$

Faisons l'hypothèse (H) de l'énoncé et choisissons $\varepsilon_0 > 0$ tel que $D(u_\infty) - \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$. On a obtenu

$$(Q(u) - w, u)_0 \geq A |u|_0^2 - B,$$

avec $A = D(u_\infty) - \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ et $B = \frac{1}{2\varepsilon_0} |w|_0^2 \geq 0$.

3. Soit x un point de G. Le 3 du lemme 3.2 donne

$$|L(u(x))| \leq \frac{C}{2} |u(x)|^2 .$$

On en déduit la majoration

$$|J(u)| \leq \frac{1}{2} C |u|_0^2 + |w|_0 |u|_0 .$$

4. Soit x un point de G. Avec $\overline{y} = \overline{u}(x)$, $y = u(x)$ et $\delta y = \delta u(x)$, le 4 du lemme 3.2 donne

$$-Q(u(x)) \cdot \delta u(x) \leq L(u(x)) - L(\overline{u}(x)) + \frac{1}{2} \rho_0 |\delta u(x)|^2 .$$

On en déduit

$$-\left[Q\left(u\left(x\right)\right)-w\left(x\right)\right]\cdot\delta u\left(x\right)\leq\left[L\left(u\left(x\right)\right)-w\left(x\right)\cdot u\left(x\right)\right]$$
$$-\left[L\left(\overline{u}\left(x\right)\right)-w\left(x\right)\cdot\overline{u}\left(x\right)\right]+\frac{1}{2}\rho_0\left|\delta u\left(x\right)\right|^2,$$

et par intégration sur G,

$$-\left(Q\left(u\right)-w,\delta u\right)_0\leq J\left(u\right)-J\left(\overline{u}\right)+\frac{1}{2}\rho_0\left|\delta u\right|_0^2.$$

□

3.2 Résolution à ε près

On se place sous l'hypothèse (H) du 2 du lemme 3.3. Soit $Q_l\left(\cdot\right)=Q\left(\cdot\right)-w_l$, qui définit une fonction de $L^2\left(G\right)$ dans $L^2\left(G\right)$ d'après le 1 du lemme 3.2. On va déterminer une solution à ε près, soit u_ε, pour le problème 3. Elle est obtenue à l'aide de l'algorithme de type gradient suivant, pour lequel on rappelle que P est la projection de $L^2\left(G\right)$ sur $V\left(G\right)$:

Critère 1:

1. *u_0 choisi dans $V\left(G\right)$;*
2. *$\mu>0$ à choisir;*
3. *$u_{n+1}=u_n-\mu P\left(Q_l\left(u_n\right)\right)$.*

On a le lemme suivant :

Lemme 3.4: *Soit $C>0$ la constante donnée par le lemme 3.2, soit $A>0$ la constante donnée par le 2 du lemme 3.3 sous l'hypothèse (H) et soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant le critère 1 précédent. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $0<\mu<\min\left(\frac{1}{2A},\frac{A}{C^2}\right)$, alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2\left(G\right)$;*
2. *Si $0<\mu<\min\left(\frac{1}{2A},\frac{A}{C^2},\frac{2}{\rho_0}\right)$, alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Q_l\left(u_n\right)\right)=0$$

dans $L^2\left(G\right)$.

PREUVE:

1. À l'aide d'une récurrence, il vient que u_n appartient à $V(G)$. On a donc $u_{n+1} = P(u_n - \mu Q_l(u_n))$, et puisque P est une projection,

$$|u_{n+1}|_0 \leq |u_n - \mu Q_l(u_n)|_0 . \tag{3.40}$$

On calcule

$$|u_n - \mu Q_l(u_n)|_0^2 = |u_n|_0^2 - 2\mu (u_n, Q(u_n) - w_l)_0 + \mu^2 |Q(u_n) - w_l|_0^2 . \tag{3.41}$$

À l'aide du 1 du lemme 3.3, on obtient

$$|Q(u_n) - w_l|_0 \leq |Q(u_n)|_0 + |w_l|_0 \leq C |u_n|_0 + |w_l|_0 ,$$

puis,

$$|Q(u_n) - w_l|_0^2 \leq 2C^2 |u_n|_0^2 + 2 |w_l|_0^2 . \tag{3.42}$$

Le 2 du lemme 3.3, sous l'hypothèse (H), donne

$$(u_n, Q(u_n) - w_l)_0 \geq A |u_n|_0^2 - B, \quad \text{avec } B = \frac{1}{2\varepsilon_0} |w_l|_0^2 , \tag{3.43}$$

où ε_0 est tel que $D(u_\infty) > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$. On déduit de (3.41), (3.42) et (3.43), la majoration suivante :

$$|u_n - \mu Q_l(u_n)|_0^2 \leq |u_n|_0^2 - 2\mu A |u_n|_0^2 + \frac{\mu}{\varepsilon_0} |w_l|_0^2 + 2\mu^2 C^2 |u_n|_0^2 + 2\mu^2 |w_l|_0^2$$

$$= \left(1 - 2\mu A + 2\mu^2 C^2\right) |u_n|_0^2 + \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0} + 2\mu^2\right) |w_l|_0^2 .$$

Posons

$$a = 1 - 2\mu A + 2\mu^2 C^2 \quad , \quad b = \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0} + 2\mu^2\right) |w_l|_0^2 .$$

Revenant à (3.40), on a obtenu $|u_{n+1}|_0^2 \leq a |u_n|_0^2 + b$, ce qui conduit à

$$|u_n|_0^2 \leq a^n |u_0|_0^2 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

Le choix de μ tel que

$$0 < \mu < \min\left(\frac{1}{2A}, \frac{A}{C^2}\right)$$

assure $0 < a < 1$, dont on déduit

$$|u_n|_0^2 \leq |u_0|_0^2 + \frac{b}{1-a}.$$

Dans ces conditions, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(G)$.

2. Posons $\delta u_n = u_{n+1} - u_n$. On a $\delta u_n = -\mu P(Q_l(u_n))$. On en déduit

$$|\delta u_n|_0^2 = -\mu \left(P(Q_l(u_n)), \delta u_n\right)_0 = -\mu \left(Q_l(u_n), \delta u_n\right)_0,$$

car δu_n appartient à $V(G)$. Choisissons $w = w_l$ dans le lemme 3.3. Avec le 4 de ce lemme, on obtient la majoration

$$-\left(Q_l(u_n), \delta u_n\right)_0 = -\left(Q(u_n) - w_l, \delta u_n\right)_0 \leq J(u_n) - J(u_{n+1}) + \frac{1}{2}\rho_0 |\delta u_n|_0^2.$$

Il en résulte

$$\left(1 - \frac{1}{2}\mu\rho_0\right) |\delta u_n|_0^2 \leq \mu \left(J(u_n) - J(u_{n+1})\right).$$

Choisissons μ tel que

$$0 < \mu < \min\left(\frac{1}{2A}, \frac{A}{C^2}, \frac{2}{\rho_0}\right).$$

Alors la suite $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Du 3 du lemme 3.3, on déduit

$$J(u_n) \geq -\frac{1}{2}C|u_n|_0^2 - |w_l|_0 |u_n|_0.$$

Le 1 du lemme, avec le choix fait ci-dessus pour μ, donne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(G)$. La suite $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc et la relation

$$0 < \left(1 - \frac{1}{2}\mu\rho_0\right) |\delta u_n|_0^2 \leq \mu \left(J(u_n) - J(u_{n+1})\right)$$

montre que

$$\lim_{n\to\infty} \delta u_n = 0 \tag{3.44}$$

dans $L^2(G)$. La conclusion résulte de la relation $P(Q_l(u_n)) = -\frac{1}{\mu}\delta u_n$. □

Soit $A > 0$ la constante donnée par le 2 du lemme 3.3, sous l'hypothèse (H). Pour $\varepsilon_0 > 0$, on définit U_{ε_0}, un sous-ensemble de $V(G)$, par

$$U_{\varepsilon_0} = \left\{ v; v \in V(G), |v|_0 \leq \frac{1}{A}\left(|w_l|_0 + \varepsilon_0\right) \right\}.$$

Une proposition analogue à celle 2.7 donne qu'une solution u du problème 3 sans condition d'entropie vérifie $(Q(u), v)_0 = (w_l, v)_0$ pour tout $v \in V(G)$. Le choix de $v = u$ et celui de $w = 0$ dans le 2 du lemme 3.3 donnent $(Q(u), u)_0 \geq A|u|_0^2$. Comme $(w_l, u)_0 \leq |w_l|_0 |u|_0$, on en déduit $|u|_0 \leq |w_l|_0 / A$, ce qui montre que u appartient à U_{ε_0} pour tout $\varepsilon_0 > 0$.

Le résultat principal de ce paragraphe 3 est le théorème suivant :

Théorème 3.5: (solutions à ε près du problème 3) *On fait l'hypothèse (H) du 2 du lemme 3.3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des fonctions u_ε et f_ε de $V(G)$ telles que:*

(i) $P(Q_l(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) = 0$ *;*

(ii) $|f_\varepsilon|_0 \leq \varepsilon$.

Il en résulte les relations suivantes, qui sont à comparer avec celles du système 2 :

(I) $\mathrm{rot}(u_\varepsilon) = 0$ *sur* G *;*

(II) $\mathrm{div}(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) = 0$ *sur* G *;*

(III) $(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) \cdot n_e = -Q_\infty \cdot n_e$ *sur* Γ *;*

(IV) $\langle u_\varepsilon \cdot \tau, 1 \rangle_\Gamma = 0$.

De plus, on a la relation $\inf\{I(v); v \in U_\varepsilon\} = 0$*, où I est la fonctionnelle positive définie sur $V(G)$ par*

$$I(v) = |P(Q_l(v))|_0.$$

Une telle fonction u_ε de $V(G)$ est appelée solution à ε près du problème 3 sans condition d'entropie. Les fonctions u_ε et f_ε sont déterminées selon le critère 1, pour un choix de μ comme au 2 du lemme 3.4.

Dans cet énoncé, on rappelle que $Q_l(u_n) = Q(u_n) - w_l$. On note également que la fonctionnelle positive I a été introduite sans risque de confusion avec celle, aussi notée I, définie dans le problème fonctionnel sans condition d'entropie (§ 2.3).

Preuve: Soit v dans $V(G)$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant le critère 1, pour le choix de μ tel que $0 < \mu < \min\left(\frac{1}{2A}, \frac{A}{C^2}, \frac{2}{\rho_0}\right)$, comme au 2 du lemme 3.3. Suivant des notations et des considérations issues de la démonstration du lemme 3.4, on a

$$(\delta u_n, v)_0 = (-\mu P(Q_l(u_n)), v)_0 = -\mu (Q_l(u_n), v)_0,$$

soit $(Q_l(u_n), v)_0 = -\frac{1}{\mu}(\delta u_n, v)_0$. En (3.44), on avait également obtenu $\lim_{n\to\infty} \delta u_n = 0$ dans $L^2(G)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel $n(\varepsilon)$ tel que $\frac{1}{\mu}|\delta u_n|_0 \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n(\varepsilon)$. Posons

$$f_\varepsilon = -\frac{1}{\mu}\delta u_{n(\varepsilon)} \quad , \quad u_\varepsilon = u_{n(\varepsilon)}.$$

Les fonctions u_ε et f_ε appartiennent alors à $V(G)$, elles satisfont

$$(Q_l(u_\varepsilon), v)_0 = (f_\varepsilon, v)_0 \text{ pour tout } v \text{ de } V(G), \tag{3.45}$$

soit encore $P(Q_l(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) = 0$, et on a

$$|f_\varepsilon|_0 \leq \varepsilon.$$

Les relations

$$\text{(I) } \operatorname{rot}(u_\varepsilon) = 0 \text{ sur } G \quad , \quad \text{(IV) } \langle u_\varepsilon \cdot \tau, 1\rangle_\Gamma = 0$$

résultent de ce que u_ε appartient à $V(G)$. La relation (3.45) s'écrit aussi

$$(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon, v)_0 = (w_l, v)_0 \text{ pour tout } v \text{ de } V(G).$$

Les relations

$$\text{(II) } \operatorname{div}(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) = 0 \text{ sur } G \quad , \quad \text{(III) } (Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon)\cdot n_e = -Q_\infty \cdot n_e \text{ sur } \Gamma$$

s'en déduisent avec la proposition analogue à celle 2.7 obtenue en substituant Q_l à S_l, relativement aux relations (II) et (III) du système 2. Ceci établit les relations (I) à (IV) du théorème.

Montrons
$$\inf\{I(v)\,;v\in U_\varepsilon\}=0. \tag{3.46}$$
Comme f_ε appartient à $V(G)$ et que P est la projection sur $V(G)$, la relation (3.45) s'écrit aussi $P(Q_l(u_\varepsilon))=f_\varepsilon$. De $|f_\varepsilon|_0\le\varepsilon$, on déduit $|P(Q_l(u_\varepsilon))|_0 \le\varepsilon$, soit $I(u_\varepsilon)\le\varepsilon$. D'après le 2 du lemme 3.3, dans lequel on choisit $w=0$, on a $(Q(u_\varepsilon),u_\varepsilon)_0\ge A\,|u_\varepsilon|_0^2$. Comme
$$(Q(u_\varepsilon),u_\varepsilon)_0=(f_\varepsilon+w_l,u_\varepsilon)_0\,,$$
il vient
$$A\,|u_\varepsilon|_0^2\le|f_\varepsilon+w_l|_0\,|u_\varepsilon|_0\le(\varepsilon+|w_l|_0)\,|u_\varepsilon|_0\,,$$
soit $|u_\varepsilon|_0\le\frac{1}{A}(\varepsilon+|w_l|_0)$. Ainsi, u_ε appartient à U_ε. Fixons $\varepsilon>0$. Il résulte de ce qui précède que, pour tout ε_0 tel que $0<\varepsilon_0\le\varepsilon$, il existe u_{ε_0} dans U_{ε_0}, sous-ensemble de U_ε, tel que $I(u_{\varepsilon_0})\le\varepsilon_0$. Ceci établit (3.46).

Le théorème est démontré. □

Discutons la validité de la résolution à ε près donnée par le théorème 3.5.

Dans ce dernier, la relation $\inf\{I(v)\,;v\in U_\varepsilon\}=0$ pour tout $\varepsilon>0$ n'assure pas l'existence de u dans U_0 tel que $I(u)=0$, c'est-à-dire, compte tenu de la proposition analogue à celle 2.7 en substituant Q_l à S_l, de u solution du problème 3.

La substitution de k à ρ a permis de s'affranchir de la condition $|u+v_\infty|^2 \le\mu_1$ sur G. Celle-ci resterait à vérifier.

La résolution à ε près repose de façon cruciale sur le lemme 3.2 qui donne les propriétés de la fonction k. En particulier, la propriété
$$\inf\{k(t)\,;t\in\mathbb{R}_+\}\ge k(\mu_2)>0$$
n'a pas lieu pour ρ. Cela motive, *a posteriori*, l'introduction d'un tel prolongement k de ρ.

La résolution à ε près a été effectuée sous l'hypothèse (H), à savoir :
$$\frac{k(\mu_2)}{2\sup\{|k'(t^2)|\,t;t\in\mathbb{R}_+\}}>u_\infty.$$
Cela n'est pas sans incidence sur le caractère transsonique de l'écoulement ainsi déterminé. En effet, les valeurs de $|u+v_\infty|^2$ pour lesquelles le problème modifié 3 coïncide avec le problème initial (§ 1) sont $|u+v_\infty|^2\ \le\mu_1$. Elles croîssent avec μ_1 tel que $\mu_1<\mu_2<1$. Mais on montrerait que cette variation entraîne, corrélativement, une diminution de la vitesse à l'infini u_∞ admissible pour la validité de l'hypothèse (H) [20].

3.3 Approche borné / non borné

Historiquement, la méthode de résolution à ε près donnée dans le théorème 3.5 a d'abord été appliquée à un problème du type 3 posé sur un ouvert borné G_R [13] [14]. Notons que dans ce cas l'hypothèse restrictive (H) n'apparaît pas.

Ces problèmes en borné G_R sont obtenus par l'adjonction de l'une ou l'autre des deux conditions aux limites suivantes (voir fig. 1) :

(Be) $Q(u) \cdot n_e = 0$ sur Γ_R ;

(Bi) $u \cdot \tau = 0$ sur Γ_R.

Il est naturel de chercher à déterminer dans quelle mesure une solution (à ε près) du *problème en borné* G_R peut constituer, lorsque R est assez grand, une solution "approchée", par exemple à ε près, du *problème en non borné* G. On convient d'appeler *approche borné / non borné externe* le cas de la condition aux limites (Be) ci-dessus et *approche borné / non borné interne* celui de (Bi).

Soit $W(G)_R =$

$$\left\{v; v \in L^2\left(G, \mathbb{R}^2\right), \mathrm{rot}\,(v) = 0 \text{ sur } G_R, \langle v \cdot \tau, 1\rangle_\Gamma = 0, v = 0 \text{ sur } G \setminus G_R\right\}.$$

Le vocabulaire précédent s'explique par le fait qu'une fonction de $W(G)_R$ satisfaisant (Be) n'appartient pas nécessairement à $V(G)$ alors que, comme cela a été établi dans le lemme 2.12, une fonction de $V(G)_R$, qui satisfait donc (Bi), appartient à $V(G)$.

On montrerait alors les deux théorèmes suivants [20], dans lesquels on convient de noter $\widetilde{v_R}$ le prolongement par zéro sur $G \setminus G_R$ d'une fonction $v_R \in L^2(G_R)$:

Théorème 3.6: (du borné vers le non-borné, pour le problème 3) *Sous l'hypothèse (H) du 2 du lemme 3.3, il existe une famille* $(\widetilde{u_{\varepsilon,R}})_{\varepsilon>0, R\geq R_0}$ *dans* $W(G)_R$ *(resp.* $V(G)_R$*) de solutions à* ε *près, après restriction à* G_R, *du problème en borné* G_R *pour la condition aux limites (Ge) (resp. (Gi)) telle que*

$$P\left(Q_l\left(\widetilde{u_{\varepsilon,R}}\right)\right) \underset{(\varepsilon,R)\to(0,\infty)}{\overset{L^2(G)}{\rightharpoonup}} 0 \quad \textit{(convergence faible).} \tag{3.47}$$

Par comparaison, le théorème 3.5 a donné une famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $V(G)$, de solutions à ε près du problème 3 en borné G telle que

$$P\left(Q_l\left(u_\varepsilon\right)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^2(G)}{\longrightarrow}} 0 \quad \text{(convergence forte).} \tag{3.48}$$

Théorème 3.7: (du non-borné vers le borné, pour le problème 3) *On fait l'hypothèse (H) du 2 du lemme 3.3. Soit u_ε une solution à ε près du problème 3 en non borné G et soit f_ε la fonction de $V(G)$ qui lui est associée par le théorème 3.5. Ces fonctions satisfont les relations (I), (II), (III) (voir § 3.1) du problème en borné G_R à ε près, mais peut-être pas l'une ou l'autre des relations supplémentaires suivantes :*

1. *$(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) \cdot n_e = 0$ sur Γ_R, correspondant à (Be) pour une approche externe ; toutefois, celle-ci est satisfaite de façon approchée, au sens suivant :*
$$\lim_{R\to\infty} \left|(Q(u_\varepsilon) - f_\varepsilon) \cdot n_e\right|_{-\frac{1}{2},\Gamma_R} = 0 \ ;$$
2. *$u_\varepsilon \cdot \tau = 0$ et $f_\varepsilon \cdot \tau = 0$ sur Γ_R, correspondant à (Bi) pour une approche interne ; toutefois, celle-ci est satisfaite de façon approchée, au sens suivant :*
$$\lim_{R\to\infty} |u_\varepsilon \cdot \tau|_{-\frac{1}{2},\Gamma_R} = 0 \quad , \quad \lim_{R\to\infty} |f_\varepsilon \cdot \tau|_{-\frac{1}{2},\Gamma_R} = 0.$$

4 Conclusion

Les *solutions à ε près* obtenues au paragraphe 3 pour le problème sans condition d'entropie sont plus conformes à la notion habituelle de *solutions* que les *solutions généralisées à ε près* obtenues au paragraphe 2 pour le problème avec condition d'entropie. Cependant, pour ces solutions à ε près d'une part une hypothèse restrictive (H) est apparue et d'autre part les contraintes-inégalités n'ont pas été traitées. Les solutions généralisées à ε près échappent à ces restrictions. Leur détermination a en outre l'avantage d'être compatible avec une approche borné / non borné naturelle dans un cadre numérique. Dans le cas de l'ouvert borné G_R, les relations avec le problème discrétisé posé en dimension finie conduisent à des convergences analogues aux points 1, 2, et 3 donnés au paragraphe 2.8 [8]. Dans ces conditions, la notion de solutions généralisées à ε près est à la base de méthodes fonctionnelles pour une approche globale, qui permet une étude depuis le problème 1 posé dans l'ouvert non borné G jusqu'à celui posé en dimension finie.

Remerciements. *J'exprime ma reconnaissance au professeur Marc Pogu pour m'avoir proposé ce travail et pour m'avoir guidé et soutenu lors de sa réalisation. Je remercie également le professeur Jacques Burger pour ses encouragements et sa contribution à la rédaction de cet article.*

Bibliographie

[1] M. Amara. Analyse de méthodes d'éléments finis pour les écoulements transsoniques. Thèse, Université de Paris 6, 1983.

[2] O.-P. Bhutani and L. Roy-Chowdhury. Applications of some recent techniques for the exact solutions of the small disturbance potential flow equation of nonequilibrium transonic gas dynamics. *Computers and Mathematics with Applications*, 40(12): 1349–1361, 2000.

[3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications.* Masson, Paris, 1987.

[4] J.-S. Le Brizaut. Méthodes à ε près et applications à des problèmes aux limites. *Bull. Sci. math*, 125(5): 363–370, 2001.

[5] J.-S. Le Brizaut and M. Pogu. Numerical solution by optimisation of mixed nonlinear boundary value problems. Research report 06-1 UMR 6629, E.C.Nantes, 2000.

[6] J.-S. Le Brizaut et M. Pogu. Approche fonctionnelle et numérique d'un problème mixte non linéaire elliptique-hyperbolique (modèle de Karman-Guderley). Rapport de recherche 10-1 UMR 6629, E.C.Nantes, 1999.

[7] J.-S. Le Brizaut et M. Pogu. Étude numérique de l'influence d'un paramètre d'entropie dans un modèle transsonique. Rapport de recherche 03-2 UMR 6629, E.C.Nantes, 2001.

[8] J.-S. Le Brizaut et M. Pogu. Modèle de Karman-Guderley avec entropie. Relation entre étude fonctionnelle et discrétisation. Rapport de recherche 09-2 UMR 6629, E.C.Nantes, 2001.

[9] G. Choquet. *Cours de topologie*. Masson, Paris, 1984.

[10] J.-D. Cole and L.-P. Cook. *Transonic aerodynamics*. North Holland, Paris, 1986.

[11] I. Ekeland and R. Teman. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, Paris, 1974.

[12] B. Héron et F. Issard-Roch. *Analyse numérique*. Dunod, Paris, 1999.

[13] M. Pogu et G. Tournemine. Une méthode fonctionnelle de résolution approchée d'un problème transsonique. *C.R. Acad. Sc., Paris*, 312(II), 1991.

[14] M. Pogu et G. Tournemine. *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*. Ellipses, Paris, 1992.

[15] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques, 3, Transformations, Sobolev, Opérateurs*. Masson, Paris, 1987.

[16] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques, 5, Spectre des opérateurs*. Masson, Paris, 1988.

[17] H.-P. Gittel. Local entropy conditions in transonic potential flows problems. *Math. Nachr.*, 154, 1991.

[18] H.-P. Gittel. A variational approach to transonic potential flow problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 23: 1347–1372, 2000.

[19] C. Jacob. *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[20] J.-C. Jolly. Sol. méromorphes sur $\mathbb{C}$ des syst. d'au moins deux équ. aux différences à coeff. cts et à deux pas récurrents (première partie) ; sol. à ε près de systèmes d'edp nl de type mixte posés sur des ouverts non bornés (deuxième partie). Thèse, Université d'Angers, 2001.

[21] A.-G. Kuz'min. *Non classical equations of mixed type*. Birkhaüser, Basel, 1992.

[22] N.-A. Larkin. On the solvability of the steady-state transonic equations in an unbounded domain. *Math. USSR Sbornik*, 70(1), 1991.

[23] C.S. Morawetz. On a weak solution for a transonic flow problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37(6): 797–818, 1985.

[24] F. Murat. L'injection du cône positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q > 2$. *Journal de math. pures et appl.*, 60: 309–321, 1981.

[25] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967.

[26] J. Necas. *Écoulement de fluide : compacité par entropie*. Masson, Paris, 1989.

[27] J.-W. Neuberger. Sobolev gradients and differential equations. In *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1997.

[28] D.E. Panayotounakos and M. Markakis. Ad hoc closed form solutions of the two-dimensional non-linear steady small perturbation equation in fluid mechanics. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 30: 597–608, 1995.

[29] M.-O. Bristeau, O. Pironneau, R. Glowinski, J. Periaux and P. Perrier. On the numerical solution of non linear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods (I) Least squares formulations and conjugate gradient solution of the continuous problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18: 619–657, 1979.

[30] M.-N. Le Roux. Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2. *R.A.I.R.O. Analyse numérique*, 11(1): 27–60, 1977.

SOLUTIONS À ε PRÈS D'EDP

JEAN-CLAUDE JOLLY
UNIVERSITÉ D'ANGERS
LISA UPRES EA 2168
ISTIA, 62, AV. NOTRE-DAME DU LAC
49000 ANGERS
FRANCE
jean-claude.jolly@univ-angers.fr