ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Nicolas Marie

Sur une application de l'analyse complexe aux trajectoires rugueuses

Volume 21, n^{o} 2 (2014), p. 69-80.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2014__21_2_69_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **21**, 69-80 (2014)

Sur une application de l'analyse complexe aux trajectoires rugueuses

Nicolas Marie

Abstract

La manipulation d'une trajectoire géométrique au-dessus d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est moins aisée dans le cas $d = 2$ que dans le cas $d = 1$, notamment car le produit tensoriel n'est pas commutatif pour $d > 1$. Afin de contourner cette difficulté dans le cas $d = 2$, cette note introduit une notion de trajectoires géométriques pour les fonctions à valeurs complexes, aussi simple à manipuler que dans le cas $d = 1$, en remplaçant le produit tensoriel par le produit (commutatif) usuel sur $\mathbb{C}$ dans les définitions. Le lien avec l'intégrale des trajectoires rugueuses dans le cas $d = 2$ est étudié, et une application du théorème de Cauchy est proposée.

Complex Analysis and Rough Paths

Résumé

Working with a geometric rough path over a $\mathbb{R}^d$-valued function is more difficult for $d = 2$ than for $d = 1$, because the tensor product isn't commutative for $d > 1$. In order to bypass that difficulty for $d = 2$, a notion of geometric rough paths for $\mathbb{C}$-valued functions, easier as for $d = 1$, is defined by replacing the tensor product by the usual (commutative) product on $\mathbb{C}$ in definitions. The link with the rough integral for $d = 2$ is studied, and an application of Cauchy's theorem is provided.

Contents

Keywords: Trajectoires rugueuses, analyse complexe, théorème de Cauchy.

1. Introduction

Il est proposé dans ce travail d'utiliser l'analyse complexe pour simplifier la manipulation des trajectoires α-géométriques au-dessus de fonctions κ-höldériennes de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^2$; $T > 0$ et $\alpha, \kappa \in]1/3, 1/2]$ tels que $\alpha < \kappa$.
Afin d'étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien fractionnaire (mBf) analytique, S. Tindel et J. Unterberger ont introduit dans [6] une théorie des trajectoires rugueuses complexes en adaptant l'approche par incréments de M. Gubinelli [3]. Dans ce contexte, les auteurs ont notamment construit une trajectoire géométrique prolongeant les propriétés probabilistes du mBf analytique, y compris pour des valeurs de l'indice de Hurst inférieures ou égales à 1/4. Ce n'est pas le cas de la trajectoire géométrique construite par approximations linéaires au-dessus du mBf à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; $d > 1$ (cf. P. Friz et N. Victoir [2], Theorem 15.33).
S. Tindel et J. Unterberger [6], ainsi que B.M. Werness [8] sur les évolutions de Schramm-Loewner, illustrent l'intérêt d'une théorie des trajectoires rugueuses complexes, notamment pour résoudre des problèmes d'analyse stochastique.
Dans le cas particulier mentionné au début, le présent article se concentre sur une relation entre l'intégrale des trajectoires géométriques et l'intégrale des trajectoires géométriques complexes. Un théorème de Cauchy rugueux est ensuite démontré. Enfin, l'existence de l'intégrale des trajectoires géométriques pour une classe de champs de vecteurs ne satisfaisant pas les conditions habituelles est établie via le théorème de Cauchy rugueux.
Ce travail se concentre donc sur l'apport de la théorie des trajectoires géométriques complexes à l'intégration des trajectoires géométriques. Les approches des trajectoires rugueuses employées sont celles de T. Lyons (cf. p.ex. T. Lyons et Z. Qian [4]), ainsi que P. Friz et N. Victoir (cf. p.ex. P. Friz et N. Victoir [2]).

Notations :

- L'application identité de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est notée θ.

- L'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels (resp. des endomorphismes de $\mathbb{C}$) est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{C})$).

- L'algèbre tensorielle d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}$) est notée
$$T^2(\mathbb{R}^2) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus (\mathbb{R}^2)^{\otimes 2} \text{ (resp. } T^2(\mathbb{C}) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$$
et munie de la distance produit $d_{T^2(\mathbb{R}^2)}$ (resp. $d_{T^2(\mathbb{C})}$), associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ (resp. au module sur $\mathbb{C}$).

- Les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^2$ (resp. $X \in T^2(\mathbb{K})$; $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont notées x_1, x_2 (resp. X^0, X^1, X^2).

- L'espace des fonctions κ-höldériennes de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}$) est noté $C_{\kappa,T}(\mathbb{R}^2)$ (resp. $C_{\kappa,T}(\mathbb{C})$) et muni de la (semi-)norme κ-höldérienne $\|.\|_{\kappa,T}$ (resp. $\|.\|_{\kappa,\mathbb{C},T}$).

- $\Delta_T := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant s < t \leqslant T\}$.

- Pour toute fonction $z : [0, T] \to \mathbb{C}$ et tout $(s,t) \in \Delta_T$,
$$R(z)_{s,t} := \Re(z_t) - \Re(z_s) \text{ et } I(z)_{s,t} := \Im(z_t) - \Im(z_s).$$

Proposition 1.1. *Soient*
$$\mathcal{R}_T(\mathbb{R}^2) := \{S_2(x)_{0,.} ; x \in C_{1,T}(\mathbb{R}^2)\}$$
où
$$S_2(x)_{s,t} := \left(1, x_t - x_s, \int_{s<r_1<r_2<t} dx_{r_1} \otimes dx_{r_2}\right) ;\ (s,t) \in \Delta_T$$
définit la signature d'ordre 2 de $x \in C_{1,T}(\mathbb{R}^2)$, et $d_{\alpha,T} : C^2_{\alpha,T}[T^2(\mathbb{R}^2)] \to \mathbb{R}_+$ l'écart tel que :
$$d_{\alpha,T}(X,Y) := \sup_{(s,t)\in\Delta_T} \left[\frac{\|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\|}{|t-s|^{\alpha}} + \frac{\|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\|_{(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}}}{|t-s|^{2\alpha}}\right].$$
L'espace métrique complet des trajectoires α-géométriques est l'adhérence de $\mathcal{R}_T(\mathbb{R}^2)$ dans $C_{\alpha,T}[T^2(\mathbb{R}^2)]$ pour la distance $d_{\alpha,T}$:
$$G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2) := \overline{\mathcal{R}_T(\mathbb{R}^2)}^{d_{\alpha,T}}.$$

Remarques :

(1) Sur la complétude de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ muni de la distance (*inhomogène*) $d_{\alpha,T}$, se référer à P. Friz et N. Victoir [2], Theorem 8.13(ii). L'espace $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ est muni de la distance $d_{\alpha,T}$.

(2) L'espace $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ sera parfois muni de la distance uniforme $d_{\infty,T}$ telle que :

$$d_{\infty,T}(X,Y) = \sup_{t\in[0,T]} [\|X_t^1 - Y_t^1\| + \|X_t^2 - Y_t^2\|_{(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}}].$$

Sur $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$, la distance $d_{\infty,T}$ est dominée par la distance $d_{\alpha,T}$. La réciproque est fausse.
Sauf mention du contraire, $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ est muni de la distance $d_{\alpha,T}$.

Definition 1.2. Un procédé de construction est une application $\mathbf{P}$: $C_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_{1,T}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}^2)$ telle que, pour tout $\kappa \in]\alpha, 1/2]$ et toute fonction $x \in C_{\kappa,T}(\mathbb{R}^2)$, il existe $X \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant $X^1 = x$ et

$$\lim_{n\rightarrow\infty} d_{\alpha,T}[S_2[\mathbf{P}_n(x)], X] = 0.$$

Le sous-espace des trajectoires α-géométriques construites au-dessus des fonctions κ-höldériennes via $\mathbf{P}$ est noté $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa,\mathbf{P})$; $\kappa \in]\alpha, 1/2]$.

Exemples, remarques et notations :

(1) T. Lyons et N. Victoir [5], Corollary 17 fournit un procédé de construction par approximations géodésiques.
Le corollaire de J. Unterberger [7], Main theorem en fournit un autre, usant de l'algorithme *Fourier Normal Ordering.*

(2) Tout procédé de construction est injectif par unicité de la limite dans un espace séparé. Dans la suite, $\mathbf{P}$ désigne n'importe quel procédé de construction.

(3) Le sous-espace des trajectoires α-géométriques construites au-dessus des fonctions κ-höldériennes est noté $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa)$; $\kappa \in]\alpha, 1/2]$. Alors,

$$G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa,\mathbf{P}) \subset G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa) \subset G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2).$$

2. Intégrale des trajectoires géométriques complexes

Par analogie avec la construction de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ à la Proposition 1.1, la notion de trajectoire α-géométrique complexe est définie comme suit.

Proposition 2.1. *Soient*

$$\mathcal{R}_T(\mathbb{C}) := \{S_2(z)_{0,.}; z \in C_{1,T}(\mathbb{C})\}$$

où,

$$S_2(z)_{s,t} := \left(1, z_t - z_s, \int_{s<r_1<r_2<t} dz_{r_1} dz_{r_2}\right);\ (s,t) \in \Delta_T$$

définit la signature d'ordre 2 *de* $z \in C_{1,T}(\mathbb{C})$*, et* $d_{\alpha,\mathbb{C},T} : C^2_{\alpha,T}[T^2(\mathbb{C})] \to \mathbb{R}_+$ *l'écart tel que :*

$$d_{\alpha,\mathbb{C},T}(X,Y) := \sup_{(s,t)\in\Delta_T} \left(\frac{|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}}\right).$$

L'espace métrique complet des trajectoires α*-géométriques complexes est l'adhérence de* $\mathcal{R}_T(\mathbb{C})$ *dans* $C_{\alpha,T}[T^2(\mathbb{C})]$ *pour la distance* $d_{\alpha,\mathbb{C},T}$ *:*

$$G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C}) := \overline{\mathcal{R}_T(\mathbb{C})}^{d_{\alpha,\mathbb{C},T}}.$$

Remarques :

(1) Dans un cas plus général avec l'approche par incréments de M. Gubinelli [3], se référer à S. Tindel et J. Unterberger [6], sections 1.2 et 2.1 sur la signature et les trajectoires géométriques complexes.

(2) L'analogie de la Proposition 2.1 avec la Proposition 1.1 entraîne que la complétude de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ muni de la distance $d_{\alpha,\mathbb{C},T}$ s'obtient en adaptant la démarche de P. Friz et N. Victoir [2], Theorem 8.13(ii).

(3) L'espace $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ sera parfois muni de la distance uniforme $d_{\infty,\mathbb{C},T}$ telle que :

$$d_{\infty,\mathbb{C},T}(X,Y) = \sup_{t\in[0,T]} (|X^1_t - Y^1_t| + |X^2_t - Y^2_t|).$$

Sur $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$, la distance $d_{\infty,\mathbb{C},T}$ est dominée par la distance $d_{\alpha,\mathbb{C},T}$. La réciproque est fausse.
Sauf mention du contraire, $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ est muni de la distance $d_{\alpha,\mathbb{C},T}$.

Lemma 2.2. *Soit* $\Theta : T^2(\mathbb{R}^2) \to T^2(\mathbb{C})$ *telle que :*

$$\Theta\left[1, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\right] := (1, v_1 + iv_2, v_{11} - v_{22} + i(v_{12} + v_{21})).$$

L'application Θ est linéaire de $T^2(\mathbb{R}^2)$ dans $T^2(\mathbb{C})$. Ces espaces vectoriels étant de dimension finie, Θ est lipschitzienne.

Proposition 2.3. *L'espace $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ satisfait :*

$$G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C}) = \{(1, z, z^2/2); z \in C_{\alpha,T}(\mathbb{C})\}.$$

Il existe une application lipschitzienne $\Phi : G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2) \to G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ telle que :

(1) *Pour tout $\kappa \in]\alpha, 1/2]$, Φ est une surjection de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2; \kappa)$ dans $G\Omega_{\kappa,T}(\mathbb{C})$.*

(2) *Pour tout $\kappa \in]\alpha, 1/2]$, $\Phi_{\kappa,\mathbf{P}} := \Phi_{|G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa,\mathbf{P})}$ est une bijection de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2; \kappa, \mathbf{P})$ dans $G\Omega_{\kappa,T}(\mathbb{C})$.*

Proof. D'une part, soient $z \in C_{1,T}(\mathbb{C})$ et $(s,t) \in \Delta_T$:

$$S_2^2(z)_{s,t} = \int_s^t [R(z)_{s,r} + iI(z)_{s,r}]\dot{R}(z)_r dr + \int_s^t [iR(z)_{s,r} - I(z)_{s,r}]\dot{I}(z)_r dr.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_s^t [R(z)_{s,r} + iI(z)_{s,r}]\dot{R}(z)_r dr &= \frac{1}{2}R^2(z)_{s,t} + i\int_s^t I(z)_{s,r}\dot{R}(z)_{s,r} dr \text{ et} \\
\int_s^t [iR(z)_{s,r} - I(z)_{s,r}]\dot{I}(z)_r dr &= -\frac{1}{2}I^2(z)_{s,t} + i\int_s^t R(z)_{s,r}\dot{I}(z)_{s,r} dr.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
S_2^2(z)_{s,t} &= \Theta^2[S_2[R(z), I(z)]_{s,t}] &(2.1)\\
&= R^2(z)_{s,t}/2 - I^2(z)_{s,t}/2 + iR(z)_{s,t}I(z)_{s,t} \\
&= z_{s,t}^2/2 &(2.2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C}) &= \overline{\{(1, z, z^2/2); z \in C_{1,T}(\mathbb{C})\}}^{d_{\alpha,\mathbb{C},T}} \\
&= \{(1, z, z^2/2); z \in C_{\alpha,T}(\mathbb{C})\}.
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\Phi : \mathcal{R}_T(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{R}_T(\mathbb{C})$ telle que $\Phi[S_2(x_1, x_2)] := S_2(x_1 + ix_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in C_{1,T}(\mathbb{R}^2)$. Puisque $S_2(z) = (1, z, z^2/2)$ pour tout $z \in C_{1,T}(\mathbb{C})$ d'après (2.2), Φ est une bijection de $\mathcal{R}_T(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{R}_T(\mathbb{C})$. Soit $X \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$. D'après la Proposition 1.1, il existe une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$

d'éléments de $C_{1,T}(\mathbb{R}^2)$ telle que $d_{\alpha,T}[S_2(x^n), X] \to 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d_{\alpha,\mathbb{C},T}[\Phi[S_2(x^m)], \Phi[S_2(x^n)]] \leqslant C d_{\alpha,T}[S_2(x^m), S_2(x^n)]$$

d'après (2.1) et le Lemme 2.2. Par conséquent, $(\Phi[S_2(x^n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (pour la distance $d_{\alpha,\mathbb{C},T}$), de limite nécessairement égale à $(1, z, z^2/2)$ avec $z := x_1 + ix_2$ et $(x_1, x_2) := X^1$. Il est naturel d'étendre Φ à $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ en posant $\Phi(X) := (1, z, z^2/2) \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$.

(1) **Régularité.** Soient $X, Y \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$. La Proposition 1.1 entraîne l'existence de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $C_{1,T}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}^2)$, telles que :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\alpha,T}[S_2(x^n), X] = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} d_{\alpha,T}[S_2(y^n), Y] = 0.$$

D'après (2.1) et le Lemme 2.2, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$d_{\alpha,\mathbb{C},T}[\Phi[S_2(x^n)], \Phi[S_2(y^n)]] \leqslant C d_{\alpha,T}[S_2(x^n), S_2(y^n)].$$

L'application Φ est donc lipschitzienne par passage à la limite dans l'inégalité précédente.

(2) **Surjectivité.** Soient $\kappa \in]\alpha, 1/2]$, $Z \in G\Omega_{\kappa,T}(\mathbb{C})$ et la fonction $x := (R(Z^1), I(Z^1))$. D'après [5] et [7], il existe au moins un élément $X \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2; \kappa)$ tel que $X^1 = x$. Par construction de Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= (1, x_1 + ix_2, (x_1 + ix_2)^2/2) \\ &= Z. \end{aligned}$$

La surjectivité de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2; \kappa, \mathbf{P})$ dans $G\Omega_{\kappa,T}(\mathbb{C})$ s'obtient de la même façon, en *fixant* le procédé de construction $\mathbf{P}$.

(3) **Injectivité.** Soient $X, Y \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2; \kappa, \mathbf{P})$ tels que $\Phi(X) = \Phi(Y)$. Par définition :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\alpha,T}[S_2[\mathbf{P}_n(X^1)], X] = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} d_{\alpha,T}[S_2[\mathbf{P}_n(Y^1)], Y] = 0.$$

Or, par construction de Φ, nécessairement $X^1 = Y^1$; d'où $\mathbf{P}_n(X^1) = \mathbf{P}_n(Y^1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $X = Y$.

$\square$

Contre-exemple. L'application Φ n'est pas injective de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ dans $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$. En effet, soient $X := (1,0,0)$ et $Y \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\alpha,T}[S_2(1/n\cos(2n^2.), 1/n\sin(2n^2.)); Y] = 0.$$

Pour tout $t \in]0,T]$,

$$Y_t = \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}\right) \neq X_t$$

et cependant, $\Phi(X) = \Phi(Y) = (1,0,0)$.

Definition 2.4. Soient $Z \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ et $\widehat{V} \in C^0[\mathbb{C}; \mathcal{L}(\mathbb{C})]$. S'il existe une suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_{1,T}(\mathbb{C})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} d_{\alpha,\mathbb{C},T}[S_2(z^n), Z] = 0$$

et

$$\left(S_2\left[\int_0^. \widehat{V}(z_s^n).dz_s^n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente dans $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ muni de la distance $d_{\infty,\mathbb{C},T}$, alors

$$\widehat{Z}(z) := \lim_{n\to\infty} S_2\left[\int_0^. \widehat{V}(z_s^n).dz_s^n\right]$$

est une intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z.

Remarques :

(1) Avec les notations de la Définition 2.4, si $\widehat{Z}(\zeta) = \widehat{Z}(z)$ pour toute suite $(\zeta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_{1,T}(\mathbb{C})$ vérifiant les mêmes conditions que $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z est notée :

$$\int \widehat{V}(Z)dZ.$$

(2) L'analogie de la Définition 2.4 avec P. Friz et N. Victoir [2], Definition 10.44 entraîne que si $\widehat{V} \in C^2[\mathbb{C}; \mathcal{L}(\mathbb{C})]$ est bornée et de différentielles bornées, alors l'existence et l'unicité de l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z s'obtient en adaptant la démarche de P. Friz et N. Victoir [2], Theorem 10.47.
Pour éviter d'introduire la distance α-höldérienne homogène sur $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$, il est également possible d'adapter la démarche de T. Lyons et Z. Qian [4], Section 5.5.

(3) Sur une construction plus générale de l'intégrale des trajectoires géométriques complexes, se référer à S. Tindel et J. Unterberger [6], Section 2.2.

Corollary 2.5. *Soient* $X \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa)$*,* $Z := \Phi(X)$*, ainsi que* $V \in C^2[\mathbb{R}^2;\mathcal{M}_2(\mathbb{R})]$ *bornée, de différentielles bornées, et* $\widehat{V} \in C^0[\mathbb{C};\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ *tels que :*

$$\widehat{V}(z).\zeta := [(V_{1.} \circ \theta^{-1})(z) + i(V_{2.} \circ \theta^{-1})(z)]\theta^{-1}(\zeta).$$

Alors, il y a existence et unicité de l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ *par rapport à* Z*, et*

$$\int \widehat{V}(Z)dZ = \Phi\left[\int V(X)dX\right].$$

Proof. D'une part, d'après P. Friz et N. Victoir [2], Theorem 10.47, il y a existence et unicité de l'intégrale de $V(X)$ par rapport à X. D'où, d'après P. Friz et N. Victoir [2], Definition 10.44, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_{1,T}(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\int V(X)dX = \lim_{n\to\infty} S_2\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]$$

dans $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ muni de la distance $d_{\infty,T}$.

D'autre part, il y a existence et unicité de l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z, car $\widehat{V} \in C^2[\mathbb{C};\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ est bornée et de différentielles bornées par construction. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Phi\left[S_2\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]\right] &= S_2\left[\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]_1 + i\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]_2\right]\\ &= S_2\left[\int_0^{\cdot} \widehat{V}(z_s^n).dz_s^n\right]\end{aligned}$$

avec $z^n := x_1^n + ix_2^n$.

Donc, Φ étant lipschitzienne de $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$ dans $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ d'après la Proposition 2.3 et $d_{\infty,T}$ étant dominée par $d_{\alpha,T}$ sur $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2)$, la suite

$$\left(S_2\left[\int_0^{\cdot} \widehat{V}(z_s^n).dz_s^n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente (car de Cauchy) dans $G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C})$ muni de la distance $d_{\infty,\mathbb{C},T}$, et

$$\begin{aligned}\Phi\left[\int V(X)dX\right] &= \Phi\left[\lim_{n\to\infty} S_2\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\Phi\left[S_2\left[\int_0^{\cdot} V(x_s^n)dx_s^n\right]\right]\\ &= \int \widehat{V}(Z)dZ.\end{aligned}$$

□

3. Application : un théorème de Cauchy rugueux

Par le théorème de Cauchy-Goursat (cf. E. Amar et E. Matheron [1], sections 4.2 et 4.3), une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, donc indéfiniment différentiable au sens de Fréchet de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et holomorphes.

Proposition 3.1. *Soient $Z\in G\Omega_{\kappa,T}(\mathbb{C})$, $F\in\mathcal{H}$, $f:=F'$ et $\widehat{V}\in C^2[\mathbb{C};\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ définie par $\widehat{V}(z).\zeta:=f(z)\zeta$. Alors, il y a existence et unicité de l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z, et*

$$\left[\int\widehat{V}(Z)dZ\right]_{s,t}=\left(1,F(Z_t^1)-F(Z_s^1),[F(Z_t^1)-F(Z_s^1)]^2/2\right)$$

pour tout $(s,t)\in\Delta_T$.

Proof. Soit $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_{1,T}(\mathbb{C})$ telle que. lorsque $n\to\infty$, $d_{\kappa,\mathbb{C},T}[S_2(z^n),Z]\to 0$. Le chemin $z^n:[0,T]\to\mathbb{C}$ étant continûment différentiable et f étant une fonction holomorphe, par le théorème de Cauchy (cf. E. Amar et E. Matheron [1], Théorème 3.3.1), pour tout $(s,t)\in\Delta_T$,

$$\begin{aligned}\int_s^t\widehat{V}(z_r^n).dz_r^n &= \int_{z^n|_{[s,t]}} f(\zeta)d\zeta\\ &= F(z_t^n)-F(z_s^n).\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction F étant lipschitzienne de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$S_2\left[\int_0^{\cdot} \widehat{V}(z_s^n).dz_s^n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{d_{\infty,\mathbb{C},T}} \left(1, F(Z^1) - F(Z_0^1), [F(Z^1) - F(Z_0^1)]^2/2\right) \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{C}).$$

La suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été choisie arbitrairement ; il y a existence et unicité de l'intégrale de $\widehat{V}(Z)$ par rapport à Z, et

$$\left[\int \widehat{V}(Z)dZ\right]_{s,t} = \left(1, F(Z_t^1) - F(Z_s^1), [F(Z_t^1) - F(Z_s^1)]^2/2\right).$$

$\square$

Application. Le procédé $\mathbf{P}$ est supposé fixé. Soient $X \in G\Omega_{\alpha,T}(\mathbb{R}^2;\kappa,\mathbf{P})$, $Z := \Phi_{\kappa,\mathbf{P}}(X)$, $F \in \mathcal{H}$, $f := F'$, ainsi que $V \in C^2[\mathbb{R}^2;\mathcal{M}_2(\mathbb{R})]$ et $\widehat{V} \in C^2[\mathbb{C};\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ respectivement définies par :

$$V(x,y) := \begin{bmatrix} \Re[(f\circ\theta)(x,y)] & -\Im[(f\circ\theta)(x,y)] \\ \Im[(f\circ\theta)(x,y)] & \Re[(f\circ\theta)(x,y)] \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{V}(z).\zeta := f(z)\zeta.$$

Bien que les différentielles successives de V ne soient pas nécessairement bornées, la Proposition 3.1 permet de définir l'intégrale de $V(X)$ par rapport à X en posant :

$$\int V(X)dX := \Phi_{\kappa,\mathbf{P}}^{-1}\left[\int \widehat{V}(Z)dZ\right].$$

De plus, pour tout $(s,t) \in \Delta_T$,

$$\left[\int V(X)dX\right]_{s,t}^1 = (R(F\circ Z^1)_{s,t}, I(F\circ Z^1)_{s,t}).$$

References

[1] E. Amar et E. Matheron – *Analyse complexe*, Collection Enseignement des Mathématiques, Cassini, 2004.

[2] P. Friz et N. Victoir – *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications*, Cambridge Studies in Applied Mathematics 120, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] M. Gubinelli – "Controlling Rough Paths", *J. Funct. Anal.* **216** (2004), p. 86–140.

[4] T. Lyons et Z. Qian – *System Control and Rough Paths*, Oxford University Press, 2002.

[5] T. Lyons et N. Victoir – "An Extension Theorem to Rough Paths", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **24(5)** (2007), p. 835–847.

[6] S. Tindel et J. Unterberger – "The Rough Path Associated to the Multidimensional Analytic FBM with any Hurst Parameter", *Collect. Math.* **62(2)** (2011), p. 197–223.

[7] J. Unterberger – "Hölder Continuous Rough Paths by Fourier Normal Ordering", *Communications in Mathematical Physics* **298(1)** (2010), p. 1–36.

[8] B. M. Werness – "Regularity of Schramm-Loewner Evolutions, Annular Crossing, and Rough Paths Theory", *Electronic Journal of Probability* **17(81)** (2012), p. 1–21.

Nicolas Marie
Laboratoire Modal'X
Université Paris-Ouest
92000 Nanterre
FRANCE
nmarie@u-paris10.fr