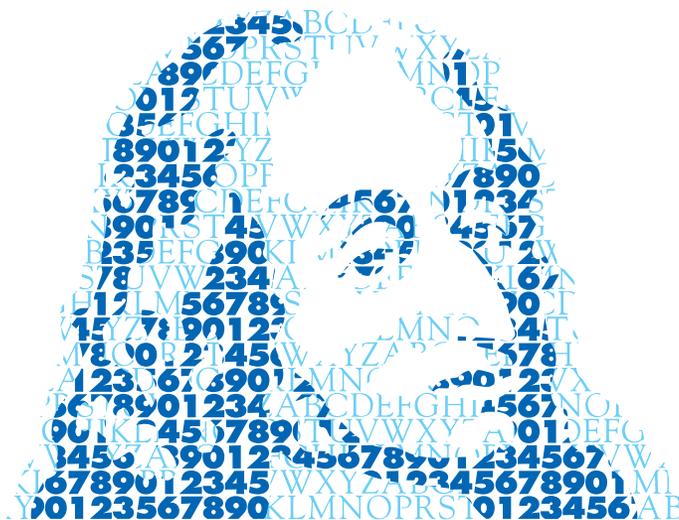


# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

HAMIDOU DATHE ET CÉDRIC TARQUINI

Sur les feuilletages des variétés fibrées

Volume 15, n° 2 (2008), p. 211-232.

<[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2008\\_\\_15\\_2\\_211\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2008__15_2_211_0)>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Sur les feuilletages des variétés fibrées

HAMIDOU DATHE  
CÉDRIC TARQUINI

## Résumé

Nous construisons un feuilletage exotique de classe  $C^1$  sur tout fibré hyperbolique de genre 1. Nous montrons également des théorèmes de rigidité des feuilletages modèles sur certains fibrés pseudo-Anosov.

## *About the foliations of fibered manifolds*

### Abstract

We build an example of  $C^1$ -foliation which are not conjugated to a model foliation on a hyperbolic three manifold. We also prove some rigidity theorems of model foliations on pseudo-Anosov fibered manifolds.  $\LaTeX$  class file.

## 1. Introduction

Dans cet article nous appellerons fibré hyperbolique<sup>1</sup> fermé de genre 1, une variété  $V$  compacte sans bord de dimension 3 fibrant sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  avec fibre un tore  $\mathbb{T}^2$  et un difféomorphisme de monodromie  $\varphi$  qui est hyperbolique (i.e induisant en homologie une application linéaire  $\varphi_*$  de trace en valeur absolue  $> 2$ ). Il est bien connu qu'une telle variété porte deux feuilletages sans feuille compacte appelés les feuilletages modèles ou simplement les modèles (voir [4]). Rappelons cette construction : on considère sur  $\mathbb{R}^2$  les feuilletages  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_1$  donnés par les directions propres de  $\varphi_*$ , ces

---

Ce travail a été fait pendant que le premier auteur effectuait un séjour de recherches au LMAM, Vannes, France.

Ce travail a été en grande partie fait lorsque le second auteur était à École Normale Supérieure de Lyon, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, CNRS UMR 5669, 46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07 FRANCE..

*Mots-clés* : Feuilletage, hyperbolique, lamination,  $\LaTeX$ .

*Classification math.* : 00X99.

<sup>1</sup>Ce mot n'est pas à prendre au sens usuel qui est que la 3-variété est hyperbolique.

feuilletages induisent sur  $\mathbb{T}^2$  deux feuilletages minimaux encore notés  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_1$  qui sont visiblement invariants par  $\varphi$ . Prenons ensuite sur  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  les feuilletages produit  $\mathcal{G}_i \times [0, 1]$ , ( $i = 0, 1$ ). En identifiant les deux composantes du bord par  $\varphi$ , on obtient sur  $V$  deux feuilletages minimaux transversalement affines. Ghys et Sergiescu ont montré dans [4] que tout feuilletage sur une telle variété de codimension 1 sans feuille compacte et de classe  $C^r$  (avec  $r \geq 2$ ) est  $C^{r-2}$ -conjugué à l'un des modèles. Un feuilletage de codimension 1, sans feuille compacte qui n'est conjugué à aucun des modèles sera qualifié d'exotique (bien sûr il ne peut être qu'au plus de classe  $C^1$ ). Dans cet article nous construisons un exemple de feuilletage exotique de classe  $C^1$ , ce qui prouve que le résultat de Ghys et Sergiescu est optimal pour la classe de différentiabilité.

Remarquons que pour obtenir un feuilletage exotique de classe  $C^0$  il suffit de faire une «ouverture de Denjoy» sur l'un des modèles comme suit : fixons  $\mathcal{F}$  un modèle de  $V$ , soit  $\mathcal{L}$  un feuilletage de dimension 1 transverse à  $\mathcal{F}$  et  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$ . Remplaçons  $L$  par un ouvert  $W$  saturé de feuilles de  $\mathcal{F}$ . L'ouvert  $W$  est choisi de façon que  $\mathcal{L}$  le fibre en intervalles au dessus de  $L$ . Cette opération fournit un nouveau feuilletage  $\mathcal{F}'$  qui contient un minimal exceptionnel qui est le complémentaire de  $W$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}'$  est alors exotique et est a priori seulement de classe  $C^0$ . Sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , il est bien connu que ce procédé est de classe  $C^1$  ([1]). Dans cet article on montre qu'il est aussi effectivement de classe  $C^1$  sur les fibrés hyperboliques fermés de genre 1. Nous étudions également quelques propriétés des feuilletages sans feuille compacte sur des fibres sur  $\mathbb{S}^1$  dont les fibres sont des surfaces fermées de genre  $> 1$  et la monodromie un «difféomorphisme» pseudo-Anosov au sens de [3].

## 2. Feuilletages sur les fibrés hyperboliques fermés de genre 1

Dans cette partie on montre plusieurs résultats sur les fibrés hyperboliques de genre 1. Le théorème essentiel étant la construction d'un exemple exotique de feuilletage de classe  $C^1$  sur tout fibré hyperbolique fermé de genre 1.

**Théorème 2.1.** *Sur tout fibré hyperbolique fermé de genre 1 il existe un feuilletage exotique de classe  $C^1$  sans feuille compacte.*

*Démonstration.* On part d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique  $A$  de  $\mathbb{T}^2$  de valeurs propres  $0 < \lambda < 1 < 1/\lambda$ . On note  $\mathcal{F}_s$  et  $\mathcal{F}_u$  les feuilletages

SUR LES FEUILLETAGES DES VARIÉTÉS FIBRÉES

stables et instables de  $A$ , leurs champs de droites tangentes sont donnés par les directions propres de  $A$ . On va modifier  $A$  en un difféomorphisme isotope  $F$  tout en préservant le feuilletage stable. Pour cela considérons une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{T}^2$  où  $U$  est un disque ouvert de coordonnées locales  $(x_u, x_s)$  autour de 0 tel que  $\mathcal{F}_u$  (resp.  $\mathcal{F}_s$ ) soit donné dans  $U$  par « $x_u = \text{constante}$ » (resp. « $x_s = \text{constante}$ »). On choisit  $U$  tel que le disque  $D_\lambda$  centré en l'origine et de rayon  $1/\lambda$  soit inclus dans  $U$ , enfin on note  $D$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$  (en particulier  $D \subset U$ ). Ainsi dans  $U$ , on a :

$$\forall (x_u, x_s) \in D, \quad A(x_u, x_s) = \left( \frac{x_1}{\lambda}, \lambda x_s \right) \in U$$

**Rappel 1.** Comme  $A$  est hyperbolique à valeurs propres positives  $0 < \lambda < 1 < 1/\lambda$ , l'entier  $\lambda + 1/\lambda$  est strictement supérieur à 2 donc  $1/\lambda > 2$ .

Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (1)  $f$  est paire,  $f(t) = 0$  si  $|t| \geq 1$ ,  $f(t) = 2 - \lambda$  dans un voisinage de 0.
- (2)  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) > -\lambda$  et  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ .
- (3) il existe un réel  $a$  ( $0 < a < 1$ ) tel que  $f(a) = 1 - \lambda$ ,  $f(t) < 1 - \lambda$  si  $|t| > a$  et  $f(t) > 1 - \lambda$  si  $|t| < a$ .
- (4) il existe un unique point  $m$  dans  $]a, 1[$  tel que  $f$  soit décroissante sur  $[0, m]$  et croissante sur  $[m, +\infty[$ .

Posons  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\psi(x) = \lambda x + \int_0^x f(t) dt.$$

Comme d'après la condition 2,  $\psi'(t) = \lambda + f(t) > 0$  pour tout  $t$ ,  $\psi$  est un difféomorphisme croissant. De plus en utilisant la condition 1 et 2,  $\psi(t) = \lambda t$  si  $|t| \geq 1$  et  $\psi(t) = 2t$  dans un voisinage de 0.

Soit  $b = \min(1, a/\lambda)$  et considérons une fonction positive  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  décroissante sur  $[0, +\infty[$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq b, \\ 1 & \text{si } |x| \leq a, \end{cases} \quad (2.1)$$

Définissons  $F$  de la façon suivante : sur  $\mathbb{T}^2 \setminus \phi(D)$ ,  $F = A$  et sur  $\phi(D)$  :

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(F(\phi(x_u, x_s))) &= \left( \frac{1}{\lambda}x_u, \psi(x_s)g(x_u) + \lambda x_s(1 - g(x_u)) \right) \\ &= \left( \frac{1}{\lambda}x_u, g(x_u) \int_0^{x_s} f(t)dt + \lambda x_s \right) \end{aligned}$$

L'application  $F$  est bien définie : si  $(x_u, x_s)$  est dans le disque unité  $D$  alors :

$$\left| g(x_u) \int_0^{x_s} f(t)dt + \lambda x_s \right| < 2|x_s| < \frac{|x_s|}{\lambda} \quad (\text{d'après le rappel 1}).$$

Ainsi l'image de  $(x_u, x_s)$  est dans  $D_\lambda \subset U$ . De plus comme  $\psi(x) = \lambda x$  pour  $|x| \geq 1$ ,  $F$  coïncide avec  $A$  au bord de  $\phi(D)$ .

**Lemme 2.2.** *L'application  $F$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^2$ .*

*Démonstration.* L'application  $F$  est  $C^\infty$  par construction. Montrons que  $\phi^{-1}F\phi = (F_u, F_s)$  est une immersion. Il suffit de voir que

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_s}(x_u, x_s) = \psi'(x_s)g(x_u) + \lambda(1 - g(x_u)) = f(x_s)g(x_u) + \lambda$$

est partout non nul sur  $U$ .

Si  $\frac{\partial F_s}{\partial x_s}(x_u, x_s) = 0$  alors  $(\psi'(x_s) - \lambda)g(x_u) = f(x_s)g(x_u) = -\lambda$ . Or  $g$  est positive inférieure à 1 et  $f > -\lambda$  (condition 2) donc l'égalité précédente est impossible. Puisque  $\frac{\partial F_s}{\partial x_s}(0, 0) = 2$  cela montre en particulier que  $\frac{\partial F_s}{\partial x_s}$  est strictement positive sur  $U$ , donc que la fonction  $x \rightarrow F_s(x_u, x)$  est strictement croissante sur les ensembles de la forme  $U \cap \{x_u\} \times \mathbb{R}$ .

Nous allons montrer que l'application  $F$  est injective. Soient  $z$  et  $z'$  deux points de  $\mathbb{T}^2$  tels que  $F(z) = F(z')$ .

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $z = \phi(x_u, x_s)$  et  $z' = \phi(x'_u, x'_s)$  sont deux points de  $\phi(D)$  alors  $x_u = x'_u$  et

$$\lambda(x_s - x'_s)[1 - g(x_u)] + g(x_u)[\psi(x_s) - \psi(x'_s)] = 0$$

supposons par exemple  $x_s \geq x'_s$ , comme  $\psi$  est strictement croissante et que  $g$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ , on a  $\lambda(x_s - x'_s)[1 - g(x_u)] = 0$  et  $g(x_u)[\psi(x_s) - \psi(x'_s)] = 0$  et donc  $x_s = x'_s$ .

**2<sup>e</sup> cas :** Par exemple  $z' \notin \phi(D)$  donc  $F(z') = A(z')$ .

• Soit  $z \notin \phi(D)$  et dans ce cas  $F(z) = A(z)$  donc par injectivité de  $A$  on a  $z = z'$ .

• Soit  $z = \phi(x_u, x_s)$  avec  $(x_u, x_s) \in D$  et  $\phi^{-1}(F(z)) = \phi^{-1}(F(z')) = (y_u, y_s) \in U$ . Cela implique  $\lambda y_u = x_u$  et  $y_s = F_s(x_u, x_s)$ . Par croissance de  $x \rightarrow F_s(x_u, x)$  sur  $U \cap \{x_u\} \times \mathbb{R}$  on obtient l'inégalité  $|y_s| < F_s(x_u, \sqrt{1-x_u^2}) = \lambda \sqrt{1-x_u^2}$ . Cela montre que  $(\lambda y_u, (1/\lambda)y_s)$  appartient à  $D$ . Or  $\phi^{-1}A^{-1}\phi(y_u, y_s) = \phi(\lambda y_u, (1/\lambda)y_s) = z'$  donc on est ramené au cas précédent.

Cela montre que  $F$  est un difféomorphisme sur son image. Celle-ci est ouverte et fermée (par compacité de  $\mathbb{T}^2$ ) donc  $F$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^2$ . □

Cette perturbation de  $A$  en un difféomorphisme  $F$  est appelée *dérivation d'Anosov* (voir [8] et aussi [5, 11, 2]).

**Lemme 2.3.** *Les points fixes de  $F$  contenus dans  $\phi(D)$  sont au nombre de trois :  $\phi(0)$  qui est attractif,  $\phi(0, x_f)$  et  $\phi(0, -x_f)$  qui sont des points selles avec  $a < x_f < 1$ , où  $a$  est la constante définie dans la condition 3 portant sur  $f$ .*

*Démonstration.* Soit  $(x_u, x_s) \in D$  vérifiant  $\phi^{-1}F\phi(x_u, x_s) = (x_u, x_s)$ . Alors  $x_u = 0$  et  $x_s = \psi(x_s)$ . D'où trois solutions pour  $x_s$  :  $0, x_f$  et  $-x_f$  avec  $a < x_f < 1$  et :

$$d_{(0,0)}(F_u, F_s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_{(0,x_f)}(F_u, F_s) = d_{(0,-x_f)}(F_u, F_s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda + f(x_f) \end{pmatrix}.$$

L'encadrement  $a < x_f < 1$  assure que :  $0 < \lambda + f(x_f) < 1$ . □

**Lemme 2.4.** *L'application  $F$  préserve le feuilletage  $\mathcal{F}_s$  des directions stables de  $A$ .*

*Démonstration.* C'est immédiat, puisque la différentielle de  $F$  préserve la direction propre stable. □

**Proposition 2.5.** *L'application  $F$  préserve un champ de vecteurs  $\xi$  continu supplémentaire à la direction stable de  $A$ .*

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{T}^2$  et notons  $D_z^u = T_z\mathcal{F}_u$  (resp.  $D_z^s = T_z\mathcal{F}_s$ ) la direction instable (resp. stable) de  $z$  pour  $A$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{T}^2$  on a :

$$T_z F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ h(z) & k(z) \end{pmatrix}$$

où  $h(z)$  et  $k(z)$  sont des fonctions numériques de classe  $C^\infty$  et où la matrice est donnée dans une base propre  $(u, s)$  de  $A$ . Cette base donne deux sections encore appelée  $s$  (resp.  $u$ ) de  $D^s$  (resp. de  $D^u$ ) par transport parallèle pour la métrique plate.

$$d_z F(s(z)) = k(z)s(F(z)) \quad \text{et} \quad d_z F(u(z)) = \frac{1}{\lambda}u(F(z)) + h(z)s(F(z))$$

L'ensemble des supplémentaires à  $D^s$  s'identifie à l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{T}^2$  par l'application qui à une fonction  $p$  associe le champ de droites engendré par le champ de vecteurs  $z \rightarrow u(z) + p(z)s(z)$ .

**Lemme 2.6.** *Le difféomorphisme  $F$  définit une contraction  $\tilde{F}$  sur l'espace des fonctions continues  $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$  munie de la norme  $C^0$  de la façon suivante :*

$$\forall p \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}), \quad \tilde{F}(p)(F(z)) = \lambda(h(z) + k(z)p(z))$$

*Démonstration.* Pour tout  $p \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ , on pose :

$$\tilde{F}(p)(F(z)) = \lambda(h(z) + k(z)p(z)).$$

On a

$$\begin{aligned} d_z F(p(z)s(z) + u(z)) &= p(z)k(z)s(F(z)) + \frac{1}{\lambda}u(F(z)) + h(z)s(F(z)) \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda(p(z)k(z) + h(z))s(F(z)) + u(F(z))) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité suivante, pour la norme uniforme :

$$\|\tilde{F}(p_1) - \tilde{F}(p_2)\| \leq \lambda\|k\| \cdot \|p_1 - p_2\|.$$

Et comme pour  $(x_u, x_s) \in U$ ,  $0 < k(\phi(x_u, x_s)) = f(x_s)g(x_u) + \lambda \leq 2 < 1/\lambda$  (voir le rappel 1) et que sur  $\mathbb{T}^2 \setminus \phi(D)$  la fonction  $k$  est égale à  $\lambda$ , on a  $\lambda\|k\| = \lambda \sup k < 1$ . Ainsi  $\tilde{F}$  est une contraction.  $\square$

Il y a donc un unique point fixe pour l'action de  $\tilde{F}$  sur  $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ , on le notera  $\sigma$ . Cela donne un champ de droites  $\xi = u + \sigma s$  qui est supplémentaire à  $D^s$  et invariant par  $F$ .  $\square$

**Proposition 2.7.** *Le champ de vecteurs  $\xi$  est de classe  $C^1$ .*

Tout d'abord en vue de préparer la démonstration de cette proposition, équipons le fibré tangent de  $\mathbb{T}^2$  de la norme suivante :  $\|x\xi(z) + ys(z)\|_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Comme  $d_z F(x\xi(z) + ys(z)) = \frac{1}{\lambda}x\xi(F(z)) + k(z)ys(F(z))$  et que  $\lambda \sup k < 1$  (preuve du lemme 2.6), nous avons les égalités :

$$\|d_z F\| = \sup_{\|X\|=1} \|d_z F(X)\| = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \|d_z F^{-1}\| = \frac{1}{k(F^{-1}(z))}$$

Cette norme dépend continûment du point et induit une distance sur  $\mathbb{T}^2$  en posant  $d(z, z') = \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt$  où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins  $\gamma, C^1$  par morceaux, satisfaisant  $\gamma(0) = z$  et  $\gamma(1) = z'$ . Cette distance est équivalente à la distance donnée par la métrique plate de  $\mathbb{T}^2$ .

*Démonstration.* Reprenons la preuve de l'existence de  $\xi$  (la proposition 2.5). Le champ de vecteurs  $\xi$  est  $C^1$  si et seulement si la fonction  $\sigma$ , invariante par  $\tilde{F}$ , est  $C^1$ .

Première étape : montrons tout d'abord que  $\sigma$  est lipschitzienne. Rappelons que  $k$  est  $C^1$  et strictement positive sur  $\mathbb{T}^2$ , donc il existe deux constantes  $C, D > 0$  telles que  $k$  soit  $C$ -lipschitzienne et  $\inf k > D$ .

Fixons deux réels  $l' > \frac{\lambda\|h\|}{1 - \lambda\|k\|}$  et  $l > \frac{2\lambda Cl'}{D(1 - 2\lambda)}$  et soit  $\eta > 0$  tel que si  $d(z, z') < \eta$  alors  $k(F^{-1}(z)) \leq 2k(F^{-1}(z'))$ .

Par le théorème des accroissement finis cela implique que si  $d(z, z') < \eta$  alors  $d(F^{-1}(z), F^{-1}(z')) \leq \frac{2}{k(F^{-1}(z))} d(z, z')$ .

Enfin notons  $UL_{\eta, l, l'}(\mathbb{T}^2)$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{T}^2$  qui sont bornées par  $l'$  (i.e.  $\|p\| < l'$ ) et  $\eta$ -uniformément localement  $l$ -lipschitziennes i.e les fonctions  $p$  vérifiant :

$$\forall z, z' \in \mathbb{T}^2, d(z, z') < \eta \Rightarrow |p(z) - p(z')| < l d(z, z')$$

C'est un fermé pour la topologie  $C^0$ . Nous avons choisi  $\eta, l$  et  $l'$  pour que cet ensemble soit  $\tilde{F}$  invariant.

En effet soit  $p$  une fonction de  $UL_{\eta, l, l'}(\mathbb{T}^2)$ . Alors tout d'abord  $\|\tilde{F}(p)\| \leq \lambda(\|h\| + \|k\|l') \leq l'$  par choix de  $l'$ . De plus pour tout  $z, z' \in \mathbb{T}^2$ , tels que

$d(z, z') < \eta$ , si on pose  $F(y) = z$  et  $F(y') = z'$  :

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(p)(z) - \tilde{F}(p)(z')| &= |\lambda(k(y)p(y) - k(y')p(y'))| \\ &\leq \lambda(|k(y) - k(y')||p(y')| + k(y)|p(y) - p(y')|) \\ &\leq \lambda(C d(y, y')l' + k(y)l d(y, y')) \\ &\leq \lambda\left(\frac{2Cl'}{k(F^{-1}(z))} + 2l\right) d(z, z') < l d(z, z') \end{aligned}$$

L'unique fonction  $\sigma$  invariante par  $\tilde{F}$  est donc continue dans l'ensemble  $UL_{\eta, l, l'}(\mathbb{T}^2)$  (en vertu du théorème du point fixe, toute suite d'itérés d'une fonction continue  $p$  converge vers  $\sigma$ ). L'uniformité du caractère localement lipschitzien et la compacité de  $\mathbb{T}^2$  montrent sans difficulté que toute application de  $UL_{\eta, l, l'}(\mathbb{T}^2)$ , donc en particulier  $\sigma$ , est lipschitzienne.

Deuxième étape : nous allons faire agir  $F$  sur  $\Omega^1\mathbb{T}^2$  l'ensemble des 1-formes continues de  $\mathbb{T}^2$  de la manière suivante : si  $P$  est une 1-forme de  $\mathbb{T}^2$ ,  $z$  un point de  $\mathbb{T}^2$  et  $X$  un vecteur tangent en  $z$ , alors

$$\bar{F}(P)_{F(z)}(d_z F(X)) = \lambda(d_z h(X) + d_z k(X)\sigma(z) + k(z)P_z(X))$$

L'espace  $\Omega^1\mathbb{T}^2$  muni de la norme  $\|P\| = \sup_{z \in \mathbb{T}^2, \|X\|=1} |P_z(X)|$  est un espace de Banach et l'application  $\bar{F}$  est contractante :

$$\begin{aligned} |\bar{F}(P)_z(X) - \bar{F}(Q)_z(X)| &\leq \lambda k(F^{-1}(z))|(P - Q)_{F^{-1}(z)}(d_z F^{-1}(X))| \\ &\leq \lambda\|P - Q\| \|X\| \end{aligned}$$

donc elle admet une unique 1-forme continue invariante. On la note  $\Sigma$ .

Troisième étape : on montre que la 1-forme  $\Sigma$  est la différentielle de  $\sigma$ . Pour  $z \in \mathbb{T}^2$  et  $X$  tangent en  $z$  nous noterons  $z + X = \exp_z(X)$  pour la métrique plate sur le tore. Cela a un sens puisque  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  et l'exponentielle est l'application quotient  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$  qui à  $(z, X)$  associe  $(z, z + X)$ . Par équivalence des normes, il existe une constante  $\alpha > 0$  tel que  $d(z, z + X) \leq \alpha\|X\|$ . Formons le taux d'accroissement de  $\sigma$  :

$$T(z, X) = \sigma(z + X) - \sigma(z) - \Sigma_z(X)$$

Comme  $F$  est  $C^1$  et que  $\sigma$  est lipschitzienne, la quantité

$$\sigma(F(z) + d_z F(X)) - \sigma(F(z + X))$$

est un  $o(\|X\|)$ . Et par invariance de  $\sigma$  et  $\Sigma$  par  $F$  :

$$\begin{aligned} T(F(z), d_z F(X)) &= \sigma(F(z+X)) - \sigma(F(z)) - \Sigma_{F(z)}(d_z F(X)) + o(\|X\|) \\ &= \lambda \left( h(z+X) - h(z) - d_z h(X) + k(z+X)\sigma(z+X) \right. \\ &\quad \left. - k(z)\sigma(z) - d_z k(X)\sigma(z) - k(z)\Sigma_z(X) \right) + o(\|X\|) \end{aligned}$$

Comme  $h$  est  $C^1$ , la quantité  $h(z+X) - h(z) - d_z h(X)$  est un  $o(\|X\|)$ . Il en va de même de  $(k(z+X) - k(z) - d_z k(X))\sigma(z)$ . En effet, par continuité,  $\sigma$  est bornée sur le compact  $\mathbb{T}^2$ . Il reste à considérer

$$\begin{aligned} k(z+X)[\sigma(z+X) - \sigma(z)] - k(z)\Sigma_z(X) &= k(z)[\sigma(z+X) - \sigma(z) - \Sigma_z(X)] \\ &\quad + d_z k(X)[\sigma(z+X) - \sigma(z)] + o(\|X\|) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Comme  $k$  est  $C^1$  et que  $\sigma$  est lipschitzienne on en déduit :

$$T(F(z), d_z F(X)) = \lambda k(z)T(z, X) + o(\|X\|)$$

la quantité  $\frac{|T(z, X)|}{\|X\|}$  est majorée par  $\|(\alpha l + \|\Sigma_z\|)X\|$  donc sa limite supérieure à  $z$  fixé et quand  $X$  tend vers 0 est finie. En se rappelant de l'inégalité  $\|d_z F(X)\| \geq k(z)\|X\|$ , on en déduit :

$$\sup_{z \in \mathbb{T}^2} \limsup_{X \rightarrow 0} \frac{|T(z, X)|}{\|X\|} \leq \lambda \sup_{z \in \mathbb{T}^2} \limsup_{X \rightarrow 0} \frac{|T(z, X)|}{\|X\|}$$

et donc pour tout  $z$  dans  $\mathbb{T}^2$ ,  $\limsup_{X \rightarrow 0} \frac{|T(z, X)|}{\|X\|} = 0$ .

Cela signifie que  $\sigma(z+X) - \sigma(z) - \Sigma_z(X) = o(\|X\|)$  donc  $\Sigma$  est la différentielle de  $\sigma$  en  $z$ . Comme la 1-forme  $\Sigma$  est continue, nous venons de montrer que la fonction  $\sigma$  est de classe  $C^1$ .  $\square$

La conséquence immédiate est la :

**Proposition 2.8.** *Le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  tangent à  $\xi$  est de classe  $C^1$ .*

Nous allons voir que le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  contient un unique minimal exceptionnel. Pour cela désignons par

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ p \in \mathbb{T}^2 \text{ tel que } \text{dist}(F^{-n}(p), 0) \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty \right\}$$

la variété instable globale du point fixe 0. Comme la différentielle de  $F^{-1}$  est de norme  $\lambda$  en 0, elle est contractante au voisinage de 0. Si  $V$  est un voisinage assez petit de 0, la suite  $F^{-n}$  converge uniformément vers l'application constante égale à 0 sur  $V$ , on a donc  $\mathcal{W}_0 = \bigcup_{n \geq 0} F^n(V)$ . Cela montre que  $\mathcal{W}_0$  est un ouvert. De plus par définition, il est invariant par  $F^{-1}$  et par  $F$  (i.e.  $F(\mathcal{W}_0) = \mathcal{W}_0$ ).

Posons  $\mathcal{K} = \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{W}_0$  le complémentaire de  $\mathcal{W}_0$  dans  $\mathbb{T}^2$ . C'est un compact invariant par  $F$  (et  $F^{-1}$ ). Il existe un voisinage fermé  $V_{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{K}$  tel que

$$F(V_{\mathcal{K}}) \subset V_{\mathcal{K}} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 0} F^n(V_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$$

(en effet il suffit de poser  $V_{\mathcal{K}} = \mathbb{T}^2 \setminus V$  où  $V$  est définie ci-dessus par exemple comme un disque centré en 0 de rayon assez petit). En particulier  $\mathcal{K}$  est connexe comme intersection décroissante de compacts connexes.

**Proposition 2.9.** *Le compact  $\mathcal{K}$  est un minimal exceptionnel pour le feuilletage  $\mathcal{F}_0$ . C'est un ensemble hyperbolique invariant par  $F$ .*

*Remarque 2.10.* D'après un résultat classique de Denjoy [1], cette proposition nous informe que le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  est au plus de classe  $C^1$ .

Nous allons montrer cette proposition en quatre lemmes.

**Lemme 2.11.** *L'application  $k$  est strictement inférieure à 1 sur  $\mathcal{K}$ .*

*Démonstration.* Reprenons les fonctions  $f$  et  $g$  introduites au début avec le réel  $a$  de la condition (3) portant sur  $f$  et  $b = \min(1, a/\lambda)$ .

Il suffit de montrer que  $k$  est strictement inférieure à 1 sur  $\phi(D) \cap \mathcal{K}$  car en dehors  $k$  est égale à  $\lambda < 1$  puisque  $F$  est égale à  $A$ .

Soit  $(x_u, x_s)$  dans  $D$  tel que  $k(\phi(x_u, x_s)) = f(x_s)g(x_u) + \lambda \geq 1$ . Alors  $|x_s| \leq a$  (car sinon  $f(x_s) < 1 - \lambda$  et  $f(x_s)g(x_u) + \lambda < 1$ ). Donc  $2 - \lambda \geq f(x_s) \geq 1 - \lambda$  et  $g(x_u) \geq \frac{1 - \lambda}{f(x_s)} \geq \frac{1 - \lambda}{2 - \lambda}$ . D'où  $|x_u| \leq \alpha$  où  $\alpha \in ]a, b[$  est

$$\text{tel que } g(\alpha) = \frac{1 - \lambda}{2 - \lambda}.$$

Comme  $F^{-1}$  envoie le bord de  $\phi(D)$  dans  $\phi(U)$ , on a  $F^{-1}(\phi(D)) \subset \phi(U)$ . Soit  $(x'_u, x'_s) \in U$  tel que  $\phi(x'_u, x'_s) = F^{-1}(\phi(x_u, x_s))$  alors  $|x'_u| \leq \lambda b \leq a$  (par choix de  $b$ ). Donc  $g(x'_u) = 1$  et  $\psi(x'_s) = x_s$  ce qui implique l'inégalité  $|x'_s| \leq |x_s| \leq a$  et finalement  $k(x'_u, x'_s) \geq 1$ .

L'ensemble  $\{(x_u, x_s) \in D \text{ tel que } k(\phi(x_u, x_s)) \geq 1\}$  est invariant par  $F^{-1}$ . Le seul point fixe de  $F$  dans  $\phi(D)$  vérifiant cette inégalité est l'origine

(voir le lemme 2.3 en remarquant que sur  $D$ ,  $k \circ \phi = \frac{\partial F_s}{\partial x_s}$ ). Et l'origine ne peut être contenue dans  $\mathcal{K}$ . Donc sur  $\mathcal{K}$  l'application  $k$  est strictement inférieure à 1. □

**Lemme 2.12.** *Le compact  $\mathcal{K}$  est hyperbolique pour  $F$ .*

*Démonstration.* En effet par compacité de  $\mathcal{K}$  et à l'aide du lemme précédent il existe un réel  $\kappa$ ,  $0 < \kappa < 1$  tel que sur  $\mathcal{K}$  on ait l'inégalité :  $0 < k \leq \kappa < 1$ . Et  $F$  préserve les deux directions portées par  $s$  et par  $\xi$ . L'application  $F$  est contractante de facteur  $\kappa$  suivant  $s$  et dilatante de facteur  $1/\lambda$  suivant  $\xi$ . □

**Lemme 2.13.** *Le compact  $\mathcal{K}$  est saturé pour le feuilletage tangent à  $\xi$ .*

*Démonstration.* Rappelons la définition de la variété instable généralisée pour  $F$  du point  $x \in \mathbb{T}^2$  :

$$\mathcal{W}_x = \left\{ y \in \mathbb{T}^2, \lim_{i \rightarrow +\infty} d(F^{-i}(x), F^{-i}(y)) = 0 \right\}$$

Ces ensembles forment une partition de  $\mathbb{T}^2$ . Pour tout point  $x$  dans  $\mathcal{K}$ , on en déduit immédiatement, l'inclusion  $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{K}$ , puisque  $\mathcal{K} = \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{W}_0$ . Autrement dit le compact  $\mathcal{K}$  est partitionné par variétés instables.

Soit  $z$  un point de  $\mathcal{K}$  et soit  $L_z$  la feuille de  $\mathcal{F}_0$  passant par  $z$ . cette feuille est égale à l'orbite de  $z$  par  $\theta_\xi^t$ , le flot de  $\xi$ . Soit  $y \in F_z$ , rappelons que  $dF \circ \xi = (1/\lambda)\xi \circ F$ , donc pour un certain  $r$  on a  $y = \theta_\xi^r(z)$  et pour tout entier  $i$  on a

$$d(F^{-i}(z), F^{-i}(y)) \leq \left| \int_0^r \lambda^i \|\xi(F^{-i}(\theta_\xi^t(z)))\| dt \right| = \lambda^i |r|$$

Ce qui montre que  $y$  appartient à  $\mathcal{W}_z$ . On vient de prouver que  $L_z \subset \mathcal{W}_z \subset \mathcal{K}$ . Le compact  $\mathcal{K}$  est saturé par le feuilletage  $\mathcal{F}_0$ . □

**Lemme 2.14.** *Le compact  $\mathcal{K}$  est un minimal exceptionnel.*

*Démonstration.* Le compact  $\mathcal{K}$  est connexe (comme intersection décroissante de compacts connexes). La théorie des feuilletages de codimension 1 montre que  $\mathcal{K}$  contient une feuille compacte ou un minimal exceptionnel.

Toutes les feuilles de  $\mathcal{F}_\mathcal{K}$  sont denses dans  $\mathcal{K}$  [5]. Donc comme  $\mathcal{K}$  n'est pas une feuille compacte, l'ensemble  $\mathcal{F}_\mathcal{K}$  est un minimal exceptionnel. □

**Fin de la preuve du théorème 2.1.** Le champ  $\xi$  est de classe  $C^1$ . Ce qui montre que  $\mathcal{F}_0$  est un feuilletage de classe  $C^1$ . La suspension de  $F$  fournit alors un fibré hyperbolique fermé  $M$  de genre 1 sur lequel le feuilletage suspension de  $\mathcal{F}_0$  est un feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $C^1$  d'après la proposition 2.9, qui contient une lamination non triviale donnée par la suspension de  $\mathcal{F}_K$ . Donc  $\mathcal{F}_0$  ne peut être minimal. Comme les modèles de  $M$  sont minimaux,  $\mathcal{F}$  n'est conjugué à aucun des modèles et est donc exotique.  $\square$

La proposition suivante décrit tous les feuilletages transverses à la fibration sur les fibrés hyperboliques fermés de genre 1.

**Proposition 2.15.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1 de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) transversalement orientable sur un fibré  $M$  hyperbolique  $\mathbb{T}^2 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Soit  $r : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$  le revêtement cyclique de  $M$ . Si  $\mathcal{F}$  est transverse à toutes les fibres de  $M$ , alors  $\tilde{\mathcal{F}} = r^*\mathcal{F}$  induit sur  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  un feuilletage  $C^{r-1}$ -isotope au feuilletage produit  $\tilde{\mathcal{F}}_0 \times [0, 1]$ , où  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire du tore  $\mathbb{T}^2$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{F}$  est transverse à la fibration de  $M$  sur  $\mathbb{S}^1$ , alors  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\mathbb{T}^2 \times \{t\}$  est transverse à  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Notons

$$\mu : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

la projection canonique. Par transversalité des fibres de  $\mu$ , l'application :

$$\mu_* : T_{(x,t)}\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow T_t[0, 1]$$

est surjective et

$$\text{Ker } \mu_{*(x,t)} = T_{(x,t)}\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^2 \times t}$$

pour tout  $(x, t) \in \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ .

On cherche une section  $X$  du fibré tangent  $T\tilde{\mathcal{F}}$  telle que :  $\mu_*X = \partial/\partial t$ . En fait comme  $T\tilde{\mathcal{F}}$  est localement trivial, on construit un tel champ dans tout ouvert distingué et on recolle au moyen d'une partition de l'unité.

Notons  $\varphi_t(x, 0)$  le flot de  $X$  passant par  $(x, 0)$ . Puisque  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  est compacte, le flot  $\varphi_t(x, 0)$  est défini pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in \mathbb{T}^2$ .

La courbe intégrale  $\varphi_\bullet(x, 0)$  reste dans la feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$  passant par  $(x, 0)$ . Cette courbe rencontre toutes les fibres  $\mathbb{T}^2 \times \{t\}$ . En particulier  $\varphi_t$  envoie  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}}$  sur  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^2 \times \{t\}}$ . L'isotopie cherchée est alors :

$$\psi(x, t) = \rho(\varphi_t(x, 0))$$

où  $\rho$  est la projection  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{T}^2$ .

Ainsi  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^2 \times \{t\}}$  est  $C^{r-1}$ -isotope à  $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}}$ . Le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est alors  $C^{r-1}$ -isotope au feuilletage produit  $\tilde{\mathcal{F}}_0 \times [0, 1]$  sur  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ . Le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  étant invariant par le difféomorphisme hyperbolique  $\varphi$  de  $\mathbb{T}^2$  est sans feuille compacte. En effet, s'il existe une feuille compacte  $\gamma$ , elle n'est pas homotope à 0. Et comme il n'y a qu'un nombre fini de classes d'homotopie de feuilles compactes, il existe un entier  $n > 0$  tel que, si  $[\gamma]$  est la classe d'homotopie de la feuille  $\gamma$ , on ait :  $\varphi^n[\gamma] = [\gamma]$ . Ce qui est impossible pour un difféomorphisme hyperbolique de  $\mathbb{T}^2$ .

Comme  $\mathcal{F}$  est de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ), la feuille  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  est topologiquement conjuguée au feuilletage linéaire de  $\mathbb{T}^2$  défini par une des directions propres de  $\varphi_*$ . □

### 3. Feuilletages sur des fibrés de genre $> 1$

Soit  $\Sigma$  une surface fermée de genre  $> 1$  et  $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$  un difféomorphisme.

**Définition 3.1.** Le difféomorphisme  $\varphi$  est dit pseudo-Anosov à 4 branches s'il existe deux feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sur  $\Sigma$  vérifiant les propriétés suivantes :

i)  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont transversalement orientés et mesurés.  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre séparatrices, ils ont le même ensemble singulier  $K$  et transverses sur  $\Sigma - K$ .

ii) Il existe une constante  $\lambda > 1$  telle que :

$$\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \mu^s)$$

$$\varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u).$$

Les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  seront appelés respectivement le *feuilletage stable* et le *feuilletage instable* de  $\varphi$ .

*Remarque 3.2* ([3]). Un feuilletage d'une surface muni d'une mesure transverse invariante régulière par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e tout point régulier possède un voisinage distingué de coordonnées lisses  $(x, y)$  dans lequel le feuilletage est défini par  $dy$  et la mesure est induite par  $dy$ ) de support total est défini par une 1-forme fermée si et seulement si il est transversalement orienté.

On supposera donc que les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont définis par des 1-formes fermées singulières  $\omega^s$  et  $\omega^u$ . Ces 1-formes sont de classe  $C^\infty$  sauf aux singularités.

Soit  $V$  un  $\Sigma$ -fibré sur  $\mathbf{S}^1$  avec une monodromie  $\varphi$  pseudo-Anosov. Notons  $\omega^s$  et  $\omega^u$  les 1-formes fermées définissant respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de  $\varphi$  et  $\lambda$  le coefficient de dilatation de  $\varphi$ . Les premiers exemples de feuilletages non singuliers sur  $V$  sont ceux qu'on obtient par suspension du feuilletage stable et du feuilletage instable de  $\varphi$  suivie d'une désingularisation. Voici cette construction :

Sur  $\Sigma \times [0, 1]$ , on considère la 1-forme  $\Omega_\sigma = \lambda^{\epsilon(\sigma)t} \omega^\sigma + dt$ , avec  $\sigma = s$  ou  $\sigma = u$  et  $\epsilon(\sigma) = 1$  si  $\sigma = s$  et  $-1$  si  $\sigma = u$ . La 1-forme  $\Omega_\sigma$  définit un feuilletage  $H^\sigma$  sur  $V$  ayant un nombre fini de cercles de contact  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  avec la fibration de  $V$  sur  $\mathbf{S}^1$ . Chaque cercle  $\gamma_i$  possède un voisinage tubulaire  $V_i$  feuilleté comme dans la figure 1.

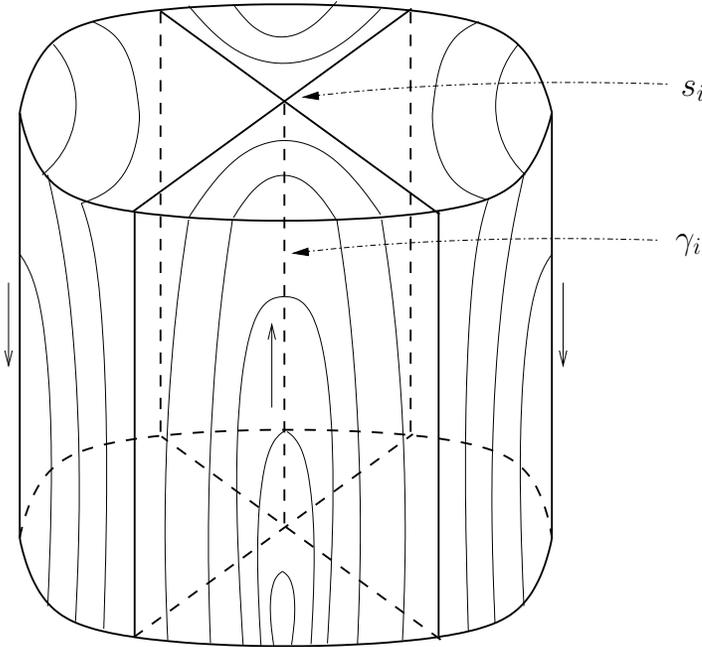


FIGURE 1. Voisinage tubulaire  $V_i$

Découpons les  $V_i$ , on obtient une 3-variété compacte  $M$  et  $H^\sigma$  induit sur le bord de  $M$  quatre composantes de Reeb planes  $R_i^j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  qui

sont deux à deux parallèles. On remplace  $V_i$  par un voisinage  $U_i$  munie d'un feuilletage obtenu en ouvrant  $V_i$  suivant  $\gamma_i$  et recollant chaque feuille de  $R_i^j$  avec une feuille de la face opposée.

Le feuilletage  $H^\sigma$  s'étend ainsi en un feuilletage transversalement affine tendu  $\mathcal{F}^\sigma$  sur  $V$ . Les  $\mathcal{F}^\sigma$  ont même classe d'Euler (voir [9]) que la fibration appelons les *modèles positifs*. De même il existe dans la classe d'Euler opposée de celle de la fibration deux *modèles négatifs*. On dira *modèle* tout court pour désigner un modèle positif ou négatif.

Contrairement aux fibrés hyperboliques de genre 1, les 3-variétés suspension des difféomorphismes pseudo-Anosov ont en général leur premier nombre de Betti différent de 1. Si le premier nombre de Betti d'un fibré pseudo-Anosov est 1, on le qualifie de *cyclique*.

Le théorème suivant exprime une rigidité des modèles de certains fibrés pseudo-Anosov dans l'espace des feuilletages transversalement affines. Mais précisons d'abord les topologies.

Soit  $M$  une variété compacte,  $G$  un groupe de Lie connexe et  $X$  un espace homogène de  $G$ . L'ensemble  $\mathcal{F}(M, G, X)$  de tous les feuilletages homogènes de structure transverse  $(G, X)$  peut être muni d'une topologie de la manière suivante : Prenons  $\mathcal{D}(M, G, X)$  l'ensemble de toutes les submersions  $\tilde{D} : \tilde{M} \rightarrow X$  (où  $\tilde{M}$  est le revêtement universel de  $M$ ) telles qu'il existe au moins une représentation  $H_{\tilde{D}} : \pi_1(M) \rightarrow G$  pour laquelle  $\tilde{D}$  soit équivariante ( $H$  est alors unique). Munissons  $\mathcal{D}(M, G, X)$  de la topologie  $C^1$ . L'ensemble  $\mathcal{F}(M, G, X)$  peut être vu comme le quotient de  $\mathcal{D}(M, G, X)$  par l'action de  $G$  à gauche définie par :

$$\forall g \in G, \forall D \in \mathcal{D}(M, G, X); (g.D)(\tilde{x}) = g.D(\tilde{x}).$$

Munissons  $\mathcal{F}(M, G, X)$  de la topologie quotient.

L'ensemble  $\mathcal{R}$  des morphismes de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  peut être muni de la topologie suivante : On choisit une partie génératrice finie  $\Gamma = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  de  $\pi_1(M)$  et on identifie un élément de  $\mathcal{R}$  à un élément de  $G^p = G \times G \times G \times \dots \times G$  ( $p$  fois) en considérant les images des éléments de  $\Gamma$ . Ainsi  $\mathcal{R}$  se plonge dans  $G^p$  et on le munit de la topologie induite par celle de  $G^p$ . On vérifie que cette topologie ne dépend pas de  $\Gamma$ .

**Théorème 3.3.** *Soit  $V$  un fibré pseudo-Anosov cyclique de monodromie  $\varphi$ , de coefficient de dilatation  $\lambda$ . Si  $\lambda$  et  $1/\lambda$  sont des valeurs propres simples de l'isomorphisme induit par  $\varphi$  en homologie, tout feuilletage*

transversalement affine de  $V$  suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.

Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.4.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sur un fibré pseudo-Anosov cyclique  $V$ . On suppose que  $\mathcal{F}$  est non isotope à la fibration  $p$  de  $V$  sur  $S^1$ . Alors la restriction du morphisme d'holonomie  $\rho$  de  $\mathcal{F}$  sur chaque fibre  $F$  définit un vecteur propre de valeur propre réelle pour l'isomorphisme  $\varphi_*$  induit par la monodromie  $\varphi$  sur  $H^1F$ . De plus, l'holonomie linéaire de  $\mathcal{F}$  est triviale sur chaque fibre de  $V$ .*

*Démonstration.* Soit donc  $F \hookrightarrow V \rightarrow \mathbf{S}^1$  un fibré cyclique de fibre une surface fermée  $F$  et de monodromie  $\varphi$ . On note  $p$  la fibration et  $p_*$  le morphisme induit par  $p$  sur les groupes fondamentaux. On a la suite exacte suivante au niveau des groupes fondamentaux :

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Le morphisme  $p_*$  admet une section ; celle-ci permet de relever le générateur  $1 \in \pi_1(\mathbf{S}^1)$  en un élément  $t \in \pi_1(V)$ . On note  $GA$  le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}$  préservant l'orientation. Le groupe  $GA$  est vu comme produit semi-direct de  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{R}_+^*$ , ce dernier agissant sur le premier par multiplication. A chaque nombre réel  $b$  faisons correspondre la translation  $u : x \rightarrow x + b$  et soit  $v$  le morphisme qui à chaque élément  $ax + b$  de  $GA$  fait correspondre son rapport  $a$ . On obtient ainsi une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow GA \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow 1$$

Choisissons  $x_0$  un point fixe de  $\varphi$  et  $\gamma \in \pi_1(F, x_0)$ , on a :

$$i_* \circ \varphi_*(\gamma) = t^{-1} \cdot (i_*\gamma) \cdot t$$

Pour montrer que  $\rho \circ i_*(\pi_1 F) \subset \mathbb{R}$  il suffit de montrer que

$$v \circ \rho \circ i_*(\gamma) = 1$$

i.e.

$$\text{Log}.v \circ \rho \circ i_*(\gamma) = 0.$$

On a :

$$\text{Log}.v \circ \rho \circ i_* \circ \varphi_*(\gamma) = \text{Log}.v[\rho(t)^{-1} \cdot \rho(i_*\gamma) \cdot \rho(t)] = \text{Log}.v \circ \rho \circ i_*(\gamma).$$

Donc si  $[\text{Log}.v \circ \rho \circ i_*]$  est l'élément de  $H^1F$  donné par

$$\text{Log}.v \circ \rho \circ i_*$$

alors

$$[Log.v \circ \rho \circ i_*]$$

est un point fixe de l'isomorphisme  $\varphi_*$ . Comme  $V$  est cyclique,

$$[Log.v \circ \rho \circ i_*] = 0$$

ce qui entraîne que

$$v \circ \rho \circ i_* = 1.$$

D'autre part  $\rho(t) \in \mathbb{R}_+^*$  sinon  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme fermée non singulière et est alors isotope à la fibration de  $V$  sur  $S^1$  (voir [6]), ce qui est impossible.  $\square$

*Preuve du théorème 3.3.* Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement affine suffisamment proche du modèle instable, alors la représentation d'holonomie  $\rho$  de  $\mathcal{F}$  est suffisamment proche de celle du modèle instable. D'après ce qui précède l'holonomie linéaire est un multiple de la représentation évidente à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et d'après le lemme ci-dessus, la restriction de  $\rho$  à une fibre  $F$  définit un vecteur propre  $W$  de valeur propre réelle  $\mu$  de  $\varphi_*$ , où  $\varphi_*$  est l'isomorphisme induit par  $\varphi$  en homologie. Le réel  $\mu$  est suffisamment proche du coefficient  $\lambda$  de  $\varphi$ , donc  $\mu = \lambda$ . Soit  $\omega^u$  le feuilletage instable de  $\varphi$  sur  $F$ . Comme  $\lambda$  est simple  $W$  est proportionnel à la classe  $[\omega^u]$  de  $\omega^u$ . La représentation  $\rho$  est alors conjuguée dans  $GA$  au morphisme d'holonomie du modèle instable et  $\mathcal{F}$  est alors conjugué au modèle instable. On montre de même que si  $\mathcal{F}$  est suffisamment proche du modèle stable, alors il est conjugué à ce modèle.  $\square$

Nous donnons dans ce qui suit un exemple de fibré pseudo-Anosov qui suggère que le théorème précédent se généralise à tous les feuilletages transversalement projectifs. Il s'agit de donner un exemple de fibré pseudo-Anosov dont les feuilletages modèles n'admettent pas de perturbation transversalement projective non affine. Cet exemple de fibré est construit par Nakayama dans [7]. Nous le reprenons en calculant explicitement l'action de la monodromie sur le groupe fondamental de la fibre, ce qui permet d'examiner les déformations des modèles dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

**Théorème 3.5.** *Il existe un fibré pseudo-Anosov cyclique dont les feuilletages modèles n'admettent pas de perturbation transversalement projective non affine.*

*Démonstration.* Soit  $\Sigma$  la surface fermée de genre 2 et  $\phi$  un difféomorphisme pseudo-Anosov de  $\Sigma$ .

i) Il existe deux feuilletages mesurés orientables  $(\mathcal{F}^s, \mu^s)$  et  $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$  singuliers, de même ensemble singulier commun  $K$  et transverses en tout point de  $\Sigma - K$ .

ii) Il existe un réel  $\lambda > 1$  tel que :

$$\begin{aligned}\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) &= (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s) \\ \varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) &= (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)\end{aligned}$$

Soit  $V$  la 3-variété suspension de  $\varphi$ . Notons  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$ , les feuilletages suspension respectifs de  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$ . Il est connu d'après ce qui précède que  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$  sont des feuilletages minimaux transversalement affines. On montre que l'on ne peut pas en général par de petites perturbations rendre ces feuilletages transversalement projectifs.

On garde les notations précédentes et on considère  $\psi$  le difféomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  induit par la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si  $\Sigma$  est la surface fermée de genre 2, on sait qu'il existe un revêtement  $p$  ramifié (avec deux points de ramification) de  $\Sigma$  sur  $\mathbb{T}^2$ . On sait d'après ce qui précède (paragraphe 3.2) qu'en relevant  $\psi$  par  $p$ , on obtient un difféomorphisme pseudo-Anosov  $\varphi$ .

Nous allons examiner l'action de  $\varphi$  sur  $\pi_1(\Sigma)$ . Les points fixes de  $\psi$  sont :

$$Fix(\psi) = \{(0, 0), (1/5, 2/5), (2/5, 4/5), (3/5, 1/5), (4/5, 3/5)\}$$

où  $Fix(\psi)$  est le sous-ensemble des points fixés par  $\psi$ .

On choisit  $p$  tel que les points de ramification soient  $(1/5, 2/5), (4/5, 3/5)$ .

Posons :

$$T = \mathbb{T}^2 \setminus \{(1/5, 2/5), (4/5, 3/5)\}$$

$\pi_1(T)$  est le groupe libre engendré par trois bouquets de cercles  $\alpha, \beta$  et  $\varepsilon$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont générateurs de  $\pi_1(\mathbb{T}^2)$  et  $\varepsilon$  entoure le trou  $(1/5, 2/5)$ . Soit  $S$  le revêtement régulier de  $T$  correspondant à  $\text{Ker } \mu$  où :

$$\mu : \pi_1(T) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

est la représentation qui envoie  $\alpha, \beta$  et  $\varepsilon$  sur 1.

$\pi_1(S)$  est le groupe libre à 5 générateurs  $a, b, c, d, e$ .

On a les relations suivantes :

$$\psi_*\alpha = \alpha^5\beta^3$$

$$\psi_*\beta = \alpha^3\beta^2$$

Si  $\psi_T$  est la restriction de  $\psi$  à  $\mathbb{T}$ , on a :

$$(\psi_T)_*\alpha = \alpha\beta\alpha^2\beta\varepsilon\alpha\beta\alpha$$

$$(\psi_T)_*\beta = \alpha\beta\alpha\beta\alpha$$

$$(\psi_T)_*\varepsilon = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon\alpha\beta\alpha$$

En choisissant une base convenable de  $\pi_1 S$ , on obtient :

$$\varphi_*a = adac(bc)^2$$

$$\varphi_*b = adcbc$$

$$\varphi_*c = c^{-1}b^{-1}c^{-1}adacbcadcbc$$

$$\varphi_*d = c^{-1}b^{-1}c^{-1}adac(bc)^2$$

Le groupe fondamental  $\pi_1(V)$  de la 3-variété suspension est engendré par  $\pi_1(\Sigma)$  et un élément  $t$  avec les relations suivantes :

$$\varphi_*a = tat^{-1} \tag{3.1}$$

$$\varphi_*b = tbt^{-1} \tag{3.2}$$

$$\varphi_*c = tct^{-1} \tag{3.3}$$

$$\varphi_*d = tdt^{-1} \tag{3.4}$$

$$[a, b][c, d] = Id \tag{3.5}$$

La représentation d'holonomie  $\rho^1$  de  $\mathcal{F}^1$  est à valeurs dans le groupe affine de  $\mathbb{R}$  et est telle que :  $\rho^1(\pi_1(\Sigma)) \subset \mathbb{R}$ ;  $\rho^1(t) \in \mathbb{R}_+^*$ , où  $t$  est l'élément de  $\pi_1 V$  qui est un relèvement du générateur  $1 \in \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$  par une section de la fibration de  $V$  sur  $S^1$ .

Le problème de la déformation du feuilletage  $\mathcal{F}^1$  se ramène via le «lemme de déformation» (voir [10]) à une déformation de la représentation  $\rho^1$ .

Supposons que  $\mathcal{F}^1$  admette une déformation transversalement projective, alors il existe une famille à un paramètre réel positif  $m$  de représentations  $\rho_m$  vérifiant :

$$\forall \gamma \in \pi_1 V, \exists \alpha(\gamma) \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ tel que : } \rho_m^1(\gamma) = \rho(\gamma)[Id + m\alpha(\gamma)] \quad (\text{I})$$

Posons :

$$\rho^1(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons : } \alpha(a) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

En écrivant la condition la condition  $\det \rho_m^1(a) = 1$  et en la linéarisant par rapport à  $m$ , on obtient  $y_1 = -y_4$ , ainsi :

$$\alpha(a) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & -y_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(c) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(d) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(b) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

D'après l'égalité (I), on a :

$$A = \rho_m^1(a) = \begin{pmatrix} my_1 + amy_3 + 1 & a + my_2 - amy_1 \\ my_3 & -my_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \rho_m^1(b) = \begin{pmatrix} mz_1 + bmz_3 + 1 & b + mz_2 - bmz_1 \\ mz_3 & -mz_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \rho_m^1(c) = \begin{pmatrix} mu_1 + cmu_3 + 1 & c + mu_2 - cmu_1 \\ mu_3 & -mu_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \rho_m^1(d) = \begin{pmatrix} mv_1 + dm v_3 + 1 & d + mv_2 - dm v_1 \\ mv_3 & -mv_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \rho_m^1(t) = \begin{pmatrix} (-mx_1 + 1)/\lambda & -m\lambda x_2 \\ (-mx_3)/\lambda & \lambda + m\lambda x_1 \end{pmatrix}$$

Le fait que  $\rho_m^1$  soit un homomorphisme de groupes nous donne le système suivant obtenu à partir des équations (1), (2), (3), (4), et (5).

$$\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(a)\rho_m^1(c)[\rho_m^1(b)\rho_m^1(c)]^2 = \rho_m^1(t)\rho_m^1(a)[\rho_m^1(t)]^{-1} \quad (1')$$

$$\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c) = \rho_m^1(t)\rho_m^1(b)[\rho_m^1(t)]^{-1} \quad (2')$$

$$[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1}[\rho_m^1(c)]^{-1}\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(a)\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c) \\ \rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c) = \rho_m^1(t)\rho_m^1(c)[\rho_m^1(t)]^{-1} \quad (3')$$

$$[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1}[\rho_m^1(c)]^{-1}\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(a)\rho_m^1(c)[\rho_m^1(b)\rho_m^1(c)]^2 \\ = \rho_m^1(t)\rho_m^1(d)[\rho_m^1(t)]^{-1} \quad (4')$$

$$\rho_m^1(a)\rho_m^1(b)[\rho_m^1(a)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1}\rho_m^1(c)\rho_m^1(d)[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(d)]^{-1} \\ = Id \quad (5')$$

Les équations (1'), (2'), (3'), (4') et (5') linéarisées par rapport à  $m$  fournissent un système linéaire avec 15 inconnus. Une résolution de ce système par un logiciel de calcul formel (Maple) donne un espace de solutions de dimension 3. Ce qui signifie que les seules déformations possibles pour  $\mathcal{F}^1$  sont les conjugaisons. De même pour  $\mathcal{F}^2$ . Donc les modèles n'admettent pas de déformations transversalement projectives.  $\square$

On note par  $V_\psi^3$  un tel fibré pseudo-Anosov.

**Corollaire 3.6.** *Tout feuilletage transversalement projectif sur  $V_\psi^3$  suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.*

**Question 1 :** Le théorème précédent est-il vrai pour tous les fibrés pseudo-Anosov cycliques dont les coefficients de dilation et contraction  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$  sont des valeurs propres simples de l'isomorphisme induit en homologie ?

**Question 2 :** Tout feuilletage transversalement projectif sans feuille compacte et ayant même classe d'Euler qu'un modèle sur  $V_\psi^3$  est-il conjugué à ce modèle ?

## Références

- [1] A. DENJOY – « Les trajectoires à la surface du tore. », *C. R. Acad. Sci., Paris* **223** (1946), p. 5–8 (French).

- [2] C. ENNIS, M. W. HIRSCH et C. PUGH – « Foliations that are not approximable by smoother ones », *Geometric dynamics* (Rio de Janeiro, 1981), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, p. 146–176.
- [3] A. FATIHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU – *Travaux de Thurston sur les surfaces*, S.M.F, France, 1979.
- [4] E. GHYS et V. SERGIESCU – « Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages », *Topology* **19** (1980), p. 179–197.
- [5] B. HASSELBLATT et A. KATOK – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [6] F. LAUDENBACH et S. BLANK – « Sur l’isotopie des formes fermées en dimension 3 », *Invent. Math* **54** (1979), p. 103–177.
- [7] H. NAKAYAMA – « Transversely affine foliations of some surface bundles over  $S^1$  of pseudo-Anosov type », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **41** (1991), no. 3, p. 755–778.
- [8] S. SMALE – « Differentiable dynamical systems », *Bull. Amer. Math. Soc* **73** (1967), p. 747–817.
- [9] W. THURSTON – « Norm on the homology of 3-manifolds », *Memoirs of the A.M.S* **339** (1986), p. 99–130.
- [10] ———, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton university press, 1997.
- [11] R. F. WILLIAMS – « The dynamics of Smale and structural stability », *Global analysis, Proc. Sym. Pure and Appl. Math* **15** (1970), p. 329–334.

HAMIDOU DATHE  
Département de Mathématiques et  
Informatique  
Faculté des Sciences et Techniques  
Université Cheikh Anta Diop  
Dakar  
Sénégal  
hdathe@ucad.sn

CÉDRIC TARQUINI  
Lycée Chrestien de Troyes  
FRANCE  
tarquini3@free.fr