

FRANÇOIS GRAMAIN

Lemme de Schwarz pour des produits cartésiens

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 8, n° 2 (2001), p. 67-75

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2001__8_2_67_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LEMME DE SCHWARZ POUR DES PRODUITS CARTÉSIENS

François GRAMAIN

Abstract. We prove the best known Schwarz Lemma for analytic functions of several variables which take on zero values with multiplicity on each point of a Cartesian product.

Résumé. On donne la preuve du meilleur lemme de Schwarz connu pour les fonctions analytiques de plusieurs variables qui s'annulent avec multiplicité aux points d'un produit cartésien.

0. Introduction et notations

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le (poly)disque (ouvert) $D(0, r)$ de centre $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ et de rayon $r = (r_1, \dots, r_n) \in [0, +\infty[^n$ est l'ensemble des $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $|z_i| < r_i$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$). Son adhérence est le polydisque fermé $\bar{D}(0, r)$, ensemble des points z tels que $|z_i| \leq r_i$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$). On dit que la fonction f à valeurs complexes est analytique sur le polydisque fermé de rayon r si elle est continue sur le polydisque fermé $\bar{D}(0, r)$ et analytique en tout point du polydisque ouvert $D(0, r)$. On note $|f|_r$ le maximum de $|f|$ sur le bord distingué $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z_i| = r_i, 1 \leq i \leq n\}$ du polydisque. Le principe du maximum dit que $|f|_r$ est le maximum de $|f|$ sur le polydisque fermé $\bar{D}(0, r)$. Pour $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{N}^n$ on note $D^\tau f$ la dérivée $z \mapsto \frac{\partial^{\tau_1}}{\partial z_1^{\tau_1}} \cdots \frac{\partial^{\tau_n}}{\partial z_n^{\tau_n}} f(z)$.

Les lemmes de Schwarz classiques (dans le cas des fonctions d'une variable) sont des énoncés du type suivant

Théorème. Soient r et R des nombres réels tels que $0 \leq r \leq R$. Si la fonction f analytique dans le disque fermé de rayon R admet (au moins) N zéros de multiplicité au moins t dans le disque fermé de rayon r , alors on a

$$|f|_r \leq E^{-tN} |f|_R.$$

où E est un nombre réel positif ne dépendant que de r et R (supérieur à 1 sous certaines conditions), mais dépendant de la preuve utilisée.

Dans [Wal2] (Lemme 7.1.3), M. Waldschmidt prouve ce résultat avec $E = \frac{R-r}{2r}$ et dit que le Théorème est vrai avec $E = \frac{R^2+r^2}{2rR}$ (ce qui est vrai!). On peut raffiner un tel énoncé en introduisant un troisième paramètre ρ tel que le disque fermé de rayon ρ contienne les zéros considérés de f , le nombre r étant alors un nombre quelconque au plus égal à R (voir le Lemme 6.2.1 de [Wal1] et le Lemma 2.2 de [Wal4]), voire en précisant la multiplicité de chacun des zéros de f . C'est ce que nous ferons au paragraphe 1, retrouvant un cas particulier du *principe de Schwarz approché* de P. Philippon [Phi]. Outre la preuve naturelle, nous donnerons une preuve démarquée de la *deuxième démonstration du Lemme 7.1.3* de [Wal2] et qui permet de passer aux fonctions de n variables s'annulant sur un produit cartésien, ce que nous ferons au paragraphe n . Nous obtiendrons ainsi l'énoncé qui semble le plus précis actuellement connu, mais dont aucune preuve complète n'est publiée.

1. Lemme de Schwarz en 1 variable

La valeur optimale de la constante E du lemme de Schwarz est obtenue à l'aide des facteurs de Blaschke (isomorphismes du disque) dont le Lemme suivant (Lemma 2.1 de [Wal4] dont nous reproduisons la preuve) donne les principales estimations.

Lemme.

(a) Soient z et $\zeta \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ et $\rho = |\zeta|$. On suppose $r \leq R$, $\rho \leq R$ et $r\rho < R^2$.

Alors

$$\frac{|r-\rho|}{R^2-r\rho} \leq \left| \frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}} \right| \leq \frac{r+\rho}{R^2+r\rho}.$$

(b) Soient $\zeta \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ tels que $|\zeta| \leq R$. La fonction $z \mapsto \frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}}$ se prolonge en une fonction analytique sur le disque fermé de rayon R et on a $\left| \frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}} \right| = \frac{1}{R}$ pour $|z| = R$.

Démonstration. (a) L'énoncé est symétrique en z et ζ , car $|R^2-z\bar{\zeta}| = \overline{|R^2-z\bar{\zeta}|}$, et il est trivial pour $r = 0$. On peut donc supposer $r\rho \neq 0$. Alors

$$\left| \frac{z-\zeta}{R^2-z\bar{\zeta}} \right|^2 = \frac{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})}{(R^2-z\bar{\zeta})(R^2-\bar{z}\zeta)} = \frac{r^2+\rho^2-(\bar{z}\zeta+z\bar{\zeta})}{R^4-R^2(\bar{z}\zeta+z\bar{\zeta})+r^2\rho^2} = f\left(\frac{\bar{z}\zeta+z\bar{\zeta}}{r\rho}\right),$$

où $f(x) = \frac{r^2+\rho^2-r\rho x}{R^4-R^2r\rho x+r^2\rho^2}$. La fonction rationnelle f est définie sur $[-2, 2]$, car $r\rho < R^2$ donne $R^4-R^2r\rho x+r^2\rho^2 \geq (R^2-r\rho)^2 > 0$ pour $x \geq -2$. Sa dérivée est du

signe de $-r\rho(R^4 - R^2r\rho x + r^2\rho^2 - R^2(r^2 + \rho^2 - r\rho x)) = -r\rho(R^2 - r^2)(R^2 - \rho^2) \leq 0$. Ainsi f est décroissante sur $[-2, 2]$ de sorte que $f(2) \leq f(x) \leq f(-2)$ pour tout $x \in [-2, 2]$. Cette double inégalité écrite pour $x = \frac{\bar{z}\zeta + z\bar{\zeta}}{r\rho}$, qui est un nombre réel de valeur absolue au plus 2, donne le résultat (a).

(b) Pour $|\zeta| = \rho < R$ il est inutile de prolonger la fonction considérée pour qu'elle soit analytique sur le disque ouvert de rayon $R^2/\rho > R$. Alors le (a) pour $r = R$ donne le (b). Si $|\zeta| = R$, sur le disque ouvert de rayon R on a $\frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}} = \frac{z - \zeta}{\zeta\bar{\zeta} - z\bar{\zeta}} = \frac{-1}{\bar{\zeta}}$, donc la fonction peut être considérée comme constante sur \mathbb{C} , de module $1/R$. Cela achève la preuve de (b). \diamond

On en déduit le lemme de Schwarz suivant.

Théorème 1. Soient r, ρ et R des nombres réels tels que $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \rho \leq R$. Soient $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ une partie à $N (\geq 1)$ éléments du disque de centre 0 et de rayon ρ et $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{N}^N$. Si f est une fonction analytique sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R qui s'annule à l'ordre t_i au point σ_i pour tout $i (1 \leq i \leq N)$, alors on a

$$|f|_r \leq |f|_R \prod_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{R^2 + r|\sigma_i|}{R(r + |\sigma_i|)} \right)^{-t_i} \leq \left(\frac{R^2 + r\rho}{R(r + \rho)} \right)^{-\sum_{1 \leq i \leq N} t_i} |f|_R.$$

Démonstration. Le résultat étant trivial pour $r = R$, on suppose que $r < R$. La preuve naturelle consiste à appliquer le principe du maximum ($|g|_r \leq |g|_R$) à la fonction $z \mapsto g(z) = f(z) \prod_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{R^2 - z\bar{\sigma}_i}{z - \sigma_i} \right)^{t_i}$ qui est analytique sur le disque fermé de rayon R . Le Lemme (b) donne $|g|_R \leq R^{\sum t_i} |f|_R$ et il suffit d'appliquer la deuxième inégalité du Lemme (a) pour minorer $|g|_r$, ce qui donne le résultat annoncé, la deuxième inégalité résultant de la croissance sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction $\rho \mapsto \frac{R + \rho}{R^2 + r\rho}$. \diamond

On peut aussi utiliser une formule d'interpolation. On part de l'identité

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{R^2 - u\bar{u}}{(R^2 - \bar{u}z)(\zeta - u)} + \frac{R(z - u)}{R^2 - \bar{u}z} \frac{R^2 - \bar{u}\zeta}{R(\zeta - u)} \frac{1}{\zeta - z}$$

que l'on vérifie facilement [en prenant $(R^2 - \bar{u}z)(\zeta - u)(\zeta - z)$ comme dénominateur du second membre, le numérateur obtenu est $(R^2 - u\bar{u})(\zeta - z) + (z - u)(R^2 - \bar{u}\zeta)$ qui n'est autre que $(R^2 - \bar{u}z)(\zeta - u)$].

Soit $(u_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite finie de nombres complexes. On écrit l'identité précédente avec $u = u_0$; puis, dans le dernier terme, on remplace $\frac{1}{\zeta - z}$ par sa valeur donnée par l'identité écrite pour $u = u_1$. L'itération de ce procédé fournit l'identité fondamentale suivante :

$$(1) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0 \leq j < n} \frac{R^2 - u_j \bar{u}_j}{R^2 - \bar{u}_j z} \frac{1}{\zeta - u_j} \prod_{0 \leq i < j} \frac{R(z - u_i)}{R^2 - \bar{u}_i z} \frac{R^2 - \bar{u}_i \zeta}{R(\zeta - u_i)} + \frac{1}{\zeta - z} \prod_{0 \leq i < n} \frac{R(z - u_i)}{R^2 - \bar{u}_i z} \frac{R^2 - \bar{u}_i \zeta}{R(\zeta - u_i)}.$$

En effet, pour $n = 0$ c'est l'identité de départ (le produit vide vaut 1). Le passage de n à $n + 1$ consiste à remplacer dans le dernier terme du second membre $\frac{1}{\zeta - z}$ par sa valeur donnée par l'identité de départ

$$\frac{R^2 - u_n \bar{u}_n}{(R^2 - \bar{u}_n z)(\zeta - u_n)} + \frac{R(z - u_n)}{R^2 - \bar{u}_n z} \frac{R^2 - \bar{u}_n \zeta}{R(\zeta - u_n)} \frac{1}{\zeta - z},$$

ce qui fournit bien la formule (1) à l'ordre supérieur.

Pour démontrer le Théorème 1, on écrit l'identité (1) pour la suite (u_i) formée des σ_j ($1 \leq j \leq N$) où chaque σ_j est répété t_j fois (l'ordre étant sans importance), de sorte que $n = \sum_{1 \leq j \leq N} t_j$. On multiplie alors chacun des deux membres de (1) par $\frac{1}{2i\pi} f(\zeta)$ et on intègre l'égalité obtenue sur le bord du disque $\{\zeta \in \mathbf{C}; |\zeta| \leq R\}$. Le premier membre vaut $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Tous les termes de la somme $\sum_{0 \leq j < n}$ sont nuls car la fonction à intégrer $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - u_j} \prod_{0 \leq i < j} \frac{R^2 - \bar{u}_i \zeta}{R(\zeta - u_i)} f(\zeta)$ est analytique sur le disque fermé de rayon R . On obtient donc

$$f(z) = \varphi(z) \prod_{0 \leq i < n} \frac{R(z - u_i)}{R^2 - \bar{u}_i z} = \varphi(z) \prod_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{R(z - \sigma_j)}{R^2 - \bar{\sigma}_j z} \right)^{t_j},$$

$$\text{où } \varphi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \prod_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{R^2 - \bar{\sigma}_j \zeta}{R(\zeta - \sigma_j)} \right)^{t_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Or, pour $|\zeta| = R$ on a $\left| \frac{R^2 - \bar{\sigma}_j \zeta}{R(\zeta - \sigma_j)} \right| = 1$ (Lemme (b)), donc la formule intégrale donnant

$$\varphi \text{ fournit } |\varphi|_r \leq \frac{R}{R-r} |f|_R.$$

Pour $|z| = r$ on a $\left| \frac{R(z - \sigma_j)}{R^2 - \bar{\sigma}_j z} \right| \leq \frac{R(r + |\sigma_j|)}{R^2 + r|\sigma_j|}$ d'après le Lemme (a). Il en résulte que

$$|f|_r \leq |\varphi|_r \prod_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{R(r + |\sigma_j|)}{R^2 + r|\sigma_j|} \right)^{t_j} \leq \frac{R}{R-r} |f|_R \prod_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{R^2 + r|\sigma_j|}{R(r + |\sigma_j|)} \right)^{-t_j}, \text{ c'est-à-dire}$$

le résultat annoncé au facteur parasite $\frac{R}{R-r}$ près. On se débarrasse de ce facteur grâce à l'astuce de Landau : pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction f^k admet un zéro d'ordre kt_j au point σ_j , donc le résultat que l'on vient d'obtenir appliqué à la fonction f^k s'écrit

$$|f^k|_r = |f|_r^k \leq \frac{R}{R-r} |f|_R^k \prod_{1 \leq j \leq N} \left(\frac{R^2 + r|\sigma_j|}{R(r + |\sigma_j|)} \right)^{-kt_j}.$$

Il suffit alors de prendre la racine k -ième de cette inégalité et de remarquer que $\left(\frac{R}{R-r}\right)^{1/k}$ a pour limite 1 lorsque k tend vers l'infini pour obtenir l'inégalité désirée. \diamond

n. Lemme de Schwarz en n variables

L'itération de cette méthode de démonstration du Théorème 1, comme dans la preuve du Lemme 2 de [Wal3], conduit à l'énoncé suivant.

Théorème n. Soient f une fonction de n variables complexes analytique dans le polydisque fermé de rayon $R = (R_1, \dots, R_n)$ et, pour chaque i ($1 \leq i \leq n$) une partie S_i à N_i éléments du disque $\{z_i \in \mathbb{C}; |z_i| \leq \rho_i\}$. On suppose que, pour tout i ($1 \leq i \leq n$) on a

$$0 \leq r_i \leq R_i, \quad 0 \leq \rho_i \leq R_i \quad \text{et} \quad \frac{R_i^2 + r_i \rho_i}{R_i(r_i + \rho_i)} \geq E \geq 1.$$

Si l'on a $D^r f(x) = 0$ pour tout $x \in \prod_{1 \leq i \leq n} S_i$ et pour tout $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i N_i < T$ (où T est un nombre réel), alors $|f|_r \leq E^{-T} |f|_R$.

Remarquons tout de suite que le Lemme 2 de [Wal3] contient la Proposition 7.2.1 de [Wal2] (dont la preuve complète utilise le travail d'Abdelhak Azhari [Azh]), qui, elle-même, entraîne la Proposition 4.7 de [Wal6]. L'introduction dans la preuve du Lemme 2 de [Wal3] des facteurs de Blaschke donne un Théorème n qui est donc plus précis que tous les énoncés que nous venons de citer. Pour $r_i = \rho_i$ et $N_i = N = T$ ($1 \leq i \leq n$) on retrouve le Lemme 1.3 de [Wal5], où les détails de la preuve sont laissés au lecteur. La comparaison avec le principe de Schwarz de [Phi] (dans le cas où la fonction considérée a des zéros, et non pas des petites valeurs) est plus difficile à faire. Il semble que le présent énoncé améliore le résultat en supprimant des termes parasites dans la majoration, tout en affaiblissant un peu l'hypothèse. Enfin, le paramètre T du Théorème est un nombre

réel (positif) quelconque, mais il est clair que l'on a intérêt à le choisir entier et multiple du pgcd des N_i . Cela dit, on peut passer à la

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'énoncé est conséquence du Théorème 1.

Soit donc n un nombre entier fixé ≥ 2 et supposons le Théorème $n - 1$ démontré. Notons $S_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{N_1}\}$ et $T_1 = [T/N_1]$ de sorte que $N_1 T_1 \geq T$ et que, pour $\tau \in \mathbb{N}$ on a $\tau < T_1$ si et seulement si $N_1 \tau < T$. On définit la suite $(u_j)_{0 \leq j < N_1 T_1}$ comme étant la suite ordonnée des σ_j répétés T_1 fois : on a $u_{qN_1+r} = \sigma_{r+1}$ si $0 \leq q < T_1$ et $0 \leq r < N_1$.

On multiplie la formule (1) de la preuve du Théorème 1

$$\frac{1}{\zeta - z_1} = \sum_{0 \leq j < N_1 T_1} \frac{R_1^2 - u_j \bar{u}_j}{R_1^2 - \bar{u}_j z_1} \frac{1}{\zeta - u_j} \prod_{0 \leq i < j} \frac{R_1(z_1 - u_i)}{R_1^2 - \bar{u}_i z_1} \frac{R_1^2 - \bar{u}_i \zeta}{R_1(\zeta - u_i)} + \frac{1}{\zeta - z_1} \prod_{0 \leq i < N_1 T_1} \frac{R_1(z_1 - u_i)}{R_1^2 - \bar{u}_i z_1} \frac{R_1^2 - \bar{u}_i \zeta}{R_1(\zeta - u_i)}$$

par $\frac{1}{2i\pi} f(\zeta, z_2, \dots, z_n)$ et on intègre sur le bord du disque $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq R_1\}$, ce qui donne

$$(2) \quad f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{0 \leq j < N_1 T_1} f_j(z_2, \dots, z_n) \frac{R_1^2 - u_j \bar{u}_j}{R_1^2 - \bar{u}_j z_1} \prod_{0 \leq i < j} \frac{R_1(z_1 - u_i)}{R_1^2 - \bar{u}_i z_1} + \varphi(z_1, \dots, z_n) \left(\prod_{\sigma \in S_1} \frac{R_1(z_1 - \sigma)}{R_1^2 - \bar{\sigma} z_1} \right)^{T_1},$$

$$\text{où } f_j(z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R_1} \left(\prod_{0 \leq i < j} \frac{R_1^2 - \bar{u}_i \zeta}{R_1(\zeta - u_i)} \right) \frac{f(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - u_j} d\zeta$$

$$\text{et } \varphi(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R_1} \left(\prod_{\sigma \in S_1} \frac{R_1^2 - \bar{\sigma} \zeta}{R_1(\zeta - \sigma)} \right)^{T_1} \frac{f(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

On va vérifier, par récurrence sur j ($0 \leq j < N_1 T_1$), que

$$(3) \quad D^\tau f_j(x) = 0 \text{ pour tout } x = (x_2, \dots, x_n) \in \prod_{2 \leq i \leq n} S_i \text{ et tout } \tau = (\tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \text{ tel que } \sum_{2 \leq i \leq n} \tau_i N_i < T - j.$$

On a $f_0(z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - u_0} d\zeta = f(\sigma_1, z_2, \dots, z_n)$, puisque $u_0 = \sigma_1$. Par hypothèse on a $D^\tau f(\sigma_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pour tout $(x_2, \dots, x_n) \in \prod_{2 \leq i \leq n} S_i$ et tout $\tau = (0, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{2 \leq i \leq n} \tau_i N_i < T$, ce qui donne la propriété (3) pour $j = 0$.

Fixons l'entier j ($1 \leq j < N_1 T_1$) et supposons (3) vraie jusqu'à l'ordre $j - 1$. Fixons $(x_2, \dots, x_n) \in \prod_{2 \leq i \leq n} S_i$ et $\tau = (\tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tel que $\sum_{2 \leq i \leq n} \tau_i N_i < T - j$. Par division euclidienne on obtient $j = qN_1 + r$ ($q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < N_1$), de sorte que

$$\prod_{0 \leq i < j} (z_1 - u_i) = (z_1 - \sigma_1)^{q+1} \dots (z_1 - \sigma_r)^{q+1} (z_1 - \sigma_{r+1})^q \dots (z_1 - \sigma_{N_1})^q$$

et que, pour $k > j$, le produit $\prod_{0 \leq i < k} (z_1 - u_i)$ admet un zéro d'ordre $\geq q + 1$ au point $z_1 = \sigma_{r+1}$. En dérivant q fois la formule d'interpolation (2) et en spécialisant au point $(\sigma_{r+1}, z_2, \dots, z_n)$ on obtient donc

$$\frac{\partial^q}{\partial z_1^q} f(\sigma_{r+1}, z_2, \dots, z_n) = \sum_{0 \leq k \leq j} f_k(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial^q}{\partial z_1^q} \frac{R_1^2 - u_k \bar{u}_k}{R_1^2 - \bar{u}_k z_1} \prod_{0 \leq i < k} \frac{R_1 (z_1 - u_i)}{R_1^2 - \bar{u}_i z_1} \Bigg|_{z_1 = \sigma_{r+1}},$$

puisque les coefficients de φ et des f_k pour $k > j$ ont un zéro d'ordre $\geq q + 1$ au point $z_1 = \sigma_{r+1}$. Dans cette formule, le coefficient de $f_j(z_2, \dots, z_n)$ est une constante non nulle car σ_{r+1} est un zéro d'ordre exactement q du coefficient de f_j dans la formule (2). Ainsi f_j est combinaison linéaire à coefficients complexes de $\frac{\partial^q}{\partial z_1^q} f(\sigma_{r+1}, z_2, \dots, z_n)$ et des $f_k(z_2, \dots, z_n)$ pour $0 \leq k < j$. Il en résulte que $D^r f_j(x_2, \dots, x_n)$ est combinaison linéaire de $D^{(q, \tau)} f(\sigma_{r+1}, x_2, \dots, x_n)$, qui est nul car $qN_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \tau_i N_i < j - r + T - j = T - r \leq T$, et des $D^r f_k(x_2, \dots, x_n)$ (pour $k < j$) qui sont nuls par l'hypothèse de récurrence, du fait que $\sum_{2 \leq i \leq n} \tau_i N_i < T - j < T - k$. Cela achève la preuve de la propriété (3).

Cette propriété permet d'appliquer le lemme de Schwarz (Théorème $n - 1$) à chacune des f_j pour obtenir $|f_j|_r \leq E^{-T+j} |f_j|_R$. La formule d'interpolation (2) fournit alors

$$|f|_r \leq \sum_{0 \leq j < N_1 T_1} \frac{R_1^2 + \rho_1^2}{R_1^2 - \rho_1^2} \left(\frac{R_1 (r_1 + \rho_1)}{R_1^2 + \rho_1 r_1} \right)^j E^{-T+j} |f_j|_R + \left(\frac{R_1 (r_1 + \rho_1)}{R_1^2 + \rho_1 r_1} \right)^{T_1 N_1} |\varphi|_r.$$

Les intégrales définissant φ et les f_j et le Lemme (b) donnent $|f_j|_R \leq \frac{R_1}{R_1 - \rho_1} |f|_R$ et $|\varphi|_R \leq \frac{R_1}{R_1 - \rho_1} |f|_R$. De $0 \leq E \leq \frac{R_1^2 + \rho_1 r_1}{R_1 (r_1 + \rho_1)}$ on déduit $E^j \left(\frac{R_1 (r_1 + \rho_1)}{R_1^2 + \rho_1 r_1} \right)^j \leq 1$, et comme $N_1 T_1 \geq T$, on a

$$|f|_r \leq E^{-T} |f|_R \left(N_1 T_1 \frac{R_1^2 + \rho_1^2}{R_1^2 - \rho_1^2} + 1 \right) \frac{R_1}{R_1 - \rho_1}.$$

On utilise alors l'astuce de Landau pour supprimer le facteur parasite : pour $k \in \mathbb{N}$, on applique le résultat obtenu à la fonction f^k , avec T remplacé par kT .

Pour cela, il suffit de vérifier que $D^\tau f^k(x) = 0$ pour tout $x \in \prod_{1 \leq i \leq n} S_i$ et pour tout $\tau \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i N_i < kT$. D'après la formule de Leibniz, $D^\tau f^k$ est combinaison linéaire de produits $D^{\tau^{(1)}} f \dots D^{\tau^{(k)}} f$ où $\tau^{(1)} + \dots + \tau^{(k)} = \tau$, de sorte que $\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i N_i = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq k} \tau_i^{(j)} N_i$. Le produit $D^{\tau^{(1)}} f(x) \dots D^{\tau^{(k)}} f(x)$ ne peut être différent de 0 que si l'on a $\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i^{(j)} N_i \geq T$ pour tout j , ce qui impose $\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i N_i \geq kT$. On a donc bien le résultat cherché et on obtient l'inégalité

$$|f|_r^k = |f^k|_r \leq E^{-kT} |f|_R^k \left(N_1 k T_1 \frac{R_1^2 + \rho_1^2}{R_1^2 - \rho_1^2} + 1 \right) \frac{R_1}{R_1 - \rho_1}$$

car $[kT/N_1]$ (le T_1 de cette nouvelle situation) est majoré par kT_1 (la double inégalité de définition $a \leq [a] < a + 1$ donne $ka \leq k[a] < ka + k$, donc $[ka] \leq k[a]$). Comme $(ak + b)^{1/k}$ a pour limite 1 quand k tend vers l'infini (puisque $\frac{1}{k} \log k$ a pour limite 0), en prenant la racine k -ième de cette inégalité, on obtient, pour $k \rightarrow +\infty$, le Théorème n . \diamond

Bibliographie

- [Azh] A. AZHARI. – *Lemmes de Schwarz en plusieurs variables*; Pub. Math. Univ. P. et M. Curie (Paris VI) n° 73, Problèmes diophantiens (D. Bertrand et M. Waldschmidt ed.) 1984–1985, I1–I6.
- [Phi] P. PHILIPPON. – *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques*; J. Number Theory 64 (1997), 291–338.
- [Wal1] M. WALDSCHMIDT. – *Nombres Transcendants*; L. N. in Math. 402, Springer-Verlag, Berlin... , 1974.
- [Wal2] M. WALDSCHMIDT. – *Nombres transcendants et groupes algébriques*; Soc. Math. France, Astérisque 69–70, 1987/1979.
- [Wal3] M. WALDSCHMIDT. – *Lemme de Schwarz pour des produits cartésiens*; tapuscrit préparatoire pour Approximation Diophantienne sur les Groupes Algébriques Commutatifs I; J. reine angew. Math. 493 (1997), 61–113.

[Wal4] M. WALDSCHMIDT. – *Integer valued functions on products*; J. Ramanujan Math. Soc. vol 12, n° 1, 1997, 1–24.

[Wal5] M. WALDSCHMIDT. – *Integer Valued Entire Functions on Cartesian Products*; Proceedings of the Zakopane Number Theory Conference, Jerzy Urbanovicz ed., W. de Gruyter, 553–576.

[Wal6] M. WALDSCHMIDT. – *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables*; Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 326, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

François GRAMAIN
Laboratoire d'ARithmétique et d'ALgèbre
Faculté des Sciences
23, rue du Docteur Paul Michelon
42023 ST ETIENNE CEDEX 2