MESSAOUD HANNACHI

Géométrie asymptotique des courbes algébriques

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 6, n° 2 (1999), p. 21-28
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1999__6_2_21_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 6, N° 2, 1999, pp.21-28

Géométrie asymptotique des courbes algébriques

Messaoud HANNACHI

Résumé : L'objet de cet article est de reprendre une question très classique - *l'étude des branches infinies d'une courbe algébrique* - en utilisant les possibilités qu'offre l'analyse non standard pour explorer le halo d'un point illimité. On commence par donner une décomposition d'un vecteur $\vec{V}$ illimité de $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie usuelle, on fait *dire* (selon une approche typique de l'A N S) à chaque point à l'infini toute la géométrie asymptotique de la branche sur laquelle il est *assis.*

Abstract : The purpose of this paper is to take up a very classic matter : the study of infinit branches of an algebraic curve using the possibilities offered by non-standard analysis to explore the halo of a point at infinity. We first give the decomposition of an unlimited point of $\mathbb{C}^n$. Then, according to a typical method of non-standard analysis , we make every point at infinity express all the asymptotic geometry of the branch witch it belongs.

On commence par rappeler le théorème de décomposition de Goze

Soit $\vec{V}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ limité et soit $\vec{V_0}$ son ombre. Il existe une base standard $\vec{V_1}, \vec{V_2}, ..., \vec{V_n}$ et n infinitésimaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tels que

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \varepsilon_1\vec{V_1} + \varepsilon_1\varepsilon_2\vec{V_2} + ... + \varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n\vec{V_n}.$$

Théorème 1 : Soit n un entier standard. Pour tout $\vec{V}$ de $\mathbb{C}^n$ illimité, il existe une base standard $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots\ldots, \vec{V}_n, n-1$ infinitésimaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots.., \varepsilon_{n-1}$ et $\omega \cong \infty$ tels que

$$\vec{V} = \omega\vec{V}_1 + \omega\varepsilon_1\vec{V}_2 + \ldots. + \omega\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\vec{V}_n.$$

Démonstration : Soit $\vec{V} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où l'une au moins des coordonnées est illimitée. Soit $\omega = \max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} |a_i|$; ainsi les $\dfrac{a_i}{\omega}$ sont limités et admettent chacun une ombre : $\alpha_i = {}^0\left(\dfrac{a_i}{\omega}\right)$

On a donc les relations : $a_i = \omega\alpha_i + \omega\varepsilon_i$, avec α_i standard et $\varepsilon_i \cong 0$.

Considérons les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ et } \vec{W}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n).$$

Le vecteur $\vec{V}_1$ est standard et le vecteur $\vec{W}_1 \in hal(0)$. Ils vérifient la relation :

$$\vec{V} = \omega\vec{V}_1 + \omega\vec{W}_1.$$

Si $\vec{W}_1$ est nul, on obtient une décomposition de longueur 1 et le procédé s'arrête.

Si $\vec{W}_1$ est non nul, alors les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{W}_1$ sont linéairement indépendants; en effet si l'on considère une combinaison linéaire : $a\vec{V}_1 + b\vec{W}_1 = 0$, $\exists i_0$ tel que $\omega = |a_{i_0}|$, ce qui implique $\alpha_{i_0} = e^{i^\theta}$ et $\varepsilon_{i_0} = 0$, donc $a = 0$.

D'autre part $\vec{W}_1$ étant non nul, il existe un indice j tel que $\varepsilon_j \neq 0$, d'où $b = 0$.

$\vec{W}_1$ appartient alors à l'hyperplan $\mathbb{C}^{n-1}$, d'après la décomposition de Goze, il existe une base standard $\vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots, \vec{V}_n$ et $n-1$ infinitésimaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_{n-1}$ tels que

$$\vec{W}_1 = \varepsilon_1\vec{V}_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\vec{V}_3 + \ldots + \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\vec{V}_n.$$

Finalement, on a : $\vec{V} = \omega\vec{V}_1 + \omega\varepsilon_1\vec{V}_2 + \ldots + \omega\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\vec{V}_n$.

Si on se place dans $\mathbb{R}^2$, on a alors une démonstration beaucoup plus simple.

Proposition : *Soit un vecteur illimité $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe une base standard $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ orthonormale, $\omega \cong \infty$, et $\varepsilon \cong 0$, tels que $\vec{V} = \omega\vec{V}_1 + \omega\varepsilon\vec{V}_2$.*

Démonstration : Soit $\overrightarrow{OM} = \vec{V}$ un vecteur illimité $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, d'après le principe du tiers exclu, on a alors seulement deux possibilités :

- M se trouve dans une droite Δ_0 standard passant par l'origine des axes; dans ce cas on peut écrire : $\overrightarrow{OM} = \omega\vec{V}_1$ où $\vec{V}_1$ est un vecteur unitaire porté par Δ_0.

- M se trouve sur une droite Δ' non standard passant par l'origine des axes ; soit Δ_0 l'ombre de Δ' et α l'angle des deux droites Δ_0 et Δ'(α est nécessairement un infinitésimal), on a ainsi : $\overrightarrow{OM}= \omega \vec{V_1} + \omega\varepsilon \vec{V_2}$, où $\vec{V_1}$ est un vecteur unitaire porté par $\Delta_0, \vec{V_2}$ un vecteur qui forme avec $\vec{V_1}$ une base orthonormale standard, et $\varepsilon = tg(\alpha)$.

Remarque : On utilisera dorénavant une décomposition orthonormale.

Rappel : Soit C une courbe définie paramétriquement par $r(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \in I \subset \mathbb{R}$.

On dit que C présente une branche infinie pour $t = 0$ $\left(t \in \overset{0}{I}\right)$, si on a $\lim_{t \to 0}(|x(t)| + |y(t)|) = +\infty$.

Dans ce cas, on fait l'hypothèse suivante : *il existe un entier $m > 0$ tel que la fonction $t \to t^m r(t)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur I.*

On désigne par p le plus petit des entiers m vérifiant cette condition et par $f(t)$ le prolongement correspondant de la fonction : $t \to t^p r(t)$.

Pour tout entier $n > 0$, on a :

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \cdots + \frac{t^{p+n}}{(p+n)!} f^{p+n}(0) + o\big(t^{p+n}\big)$$

d'où en posant

$$\vec{V_j} = \frac{1}{(p+j)!} f^{(p+j)}(0) \text{ pour } j \geq -p$$

$$r(t) = \sum_{j=-p}^{n} t^j \vec{V_j} + o(t^n) = t^{-p}\vec{V}_{-p} + \cdots + t^n \vec{V_n} + o(t^n).$$

La direction définie par le vecteur $\vec{V}_{-p}$ est appelée direction asymptotique relative à la valeur 0 du paramètre [9].

Lemme : *Soient C une courbe algébrique et M un point illimité de C. On suppose que M s'écrit $M = \omega\vec{V_1} + \omega\varepsilon\vec{V_2}$ où $\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right)$ est une base standard orthonormale, $\omega \cong \infty$ et $\varepsilon \cong 0$; le vecteur $\vec{V_1}$ définit une direction asymptotique.*

Démonstration :

Soit C la courbe définie par $f(x, y) = 0$ où $f \in \mathbb{R}[x, y]$ est un polynôme standard à deux variables réelles de degré n. On suppose que C ne contient aucune droite.

Soit : $f = f_m + f_{m+1} + \ldots + f_n$, où f_k est le terme homogène de degré k avec :

$$f_k(x,y) = \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j. \qquad \text{(i)}$$

Soit M un point illimité de $\mathbb{R}^2$; d'après le théorème 1 ce point admet la décomposition orthonormale suivante

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$(\omega \cong \infty$ et $\varepsilon \cong 0)$. $M \in C$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation

$$\omega^n \sum_{i+j=n} a_{ij}(a+\varepsilon b)^i (b-\varepsilon a)^j + \ldots + \omega^m \sum_{i+j=m} a_{ij}(a+\varepsilon b)^i (b-\varepsilon a)^j = 0.$$

Après division par ω^n et par passage à l'ombre, on obtient : $f_n(a,b) = 0$. D'après un résultat classique, les vecteurs réels $\vec{V}_1$ solutions sont les directions asymptotiques réelles de la courbe C.

Remarque : Si le cône des directions asymptotiques réelles est vide, la courbe $\mathbb{C}$ n'a pas de point à l'infini réel; on a alors une courbe fermée, les branches infinies complexes correspondantes sont, du point de vue réel, des branches mortes.
A chaque vecteur du cône des directions asymptotiques de la courbe $\mathbb{C}$, il peut correspondre une ou plusieurs branches infinies.

Théorème 2 : *Soient C une courbe algébrique et M un point illimité de C. En reprenant les notations du lemme, on suppose que M s'écrit $M = \omega\vec{V}_1 + \omega\varepsilon\vec{V}_2$. Pour que C ait une asymptote de direction $\vec{V}_1$, il faut et il suffit que $\omega\varepsilon$ soit limité.*

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Si $\omega\varepsilon$ est un réel limité, on a ${}^0(\omega\varepsilon) = \alpha$, soit $\omega\varepsilon = \alpha + \varepsilon_1$,
α est un réel standard et $\varepsilon_1 \approx 0$
Sachant que :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega a + b\alpha + b\varepsilon_1 \\ \omega b - a\alpha - a\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

on a la relation : $ay - bx = -\alpha - \varepsilon_1$.
Ainsi le point M illimité est situé sur une droite Δ d'équation : $ay - bx = -\alpha - \varepsilon_1$. Cette droite Δ a pour ombre la droite ${}^0\Delta$ d'équation: $ay - bx + \alpha = 0$; cqfd.

$\Longleftarrow$ La courbe C a comme asymptote la droite Ω standard d'équation:

$$ay - bx + c = 0, \qquad \left(\sqrt{a^2+b^2} = 1\right).$$

Soit $M = (\lambda, \eta)$ un point illimité situé sur l'une des branches de la courbe C asymptotique à Ω; on a : $d(M, \Omega) \cong 0$.

Sachant que $d(M,\Omega) = |a\eta - b\lambda + c|$, on utilise la décomposition orthonormale de M; on a :

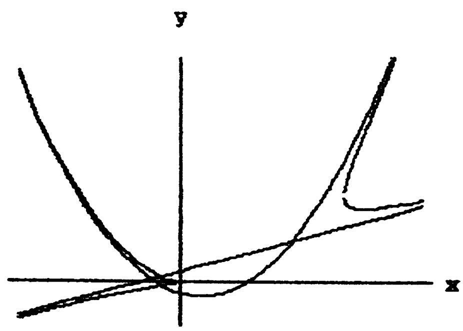
$$M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \eta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

En remplaçant les coordonnées de M par leurs valeurs, on obtient :

$$d(M,\Omega) = |a\eta - b\lambda + c| = |\omega(a\beta - b\alpha) - \omega\varepsilon(a\alpha + b\beta) + c| \cong 0.$$

Ce qui nous donne : $a\beta - b\alpha = 0$; donc le vecteur $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est une direction asymptotique à la courbe $\mathcal{C}$, avec : $-\omega\varepsilon + c \cong 0$; donc $\omega\varepsilon$ est un réel limité et ${}^0(\omega\varepsilon) = c$, cqfd.

<u>*Exemple*</u> : Soit la cubique nodale $\mathcal{C}$ d'équation : $x^3 - x^2y + y^2 = 0$.



Utilisons la décomposition d'un point illimité M_ω

$$M_\omega = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(a+\varepsilon b) \\ \omega(b-\varepsilon a) \end{pmatrix}.$$

$M_\omega \in \mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$, d'où :

$$\omega^3(a+\varepsilon b)^3 - \omega^3(a+\varepsilon b)^2(b-\varepsilon a) + \omega^2(b-\varepsilon a)^2 = 0.$$

Après division par ω^3 et passage à l'ombre, on obtient : $a^3 - a^2b = 0$; ainsi on a deux solutions : $a = 0$ et $a = b$.

Ce qui nous donne deux vecteurs dans le cône des directions asymptotiques :

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V'}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Etude dans la direction asymptotique $\vec{V_1}$:

On a la décomposition suivante du point à l'infini $M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix}$.

En reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe $\mathcal{C}$, on a :

$$\omega^3\varepsilon^3 - \omega^3\varepsilon^2 + \omega^2 = 0$$

Après division par ω^2, on a : $\omega\varepsilon^3 - \omega\varepsilon^2 + 1 = 0$ (1)

d'où : $\omega\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}$;

on a alors $M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon - \varepsilon^2} \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} \end{pmatrix}$.

L'utilisation du principe de permanence de Cauchy nous donne une paramétrisation rationnelle de la cubique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t - t^2} \\ \dfrac{1}{t^2 - t^3} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, le passage à l'ombre nous donne : ${}^0(\omega\varepsilon^2) = 1$, $\omega\varepsilon$ est illimité, la cubique n'a pas de droite asymptote de direction $\vec{V}_1$; on se propose de déterminer la courbe asymptote. Posons : $\omega\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon', \varepsilon'$ infinitésimal ; l'équation (1) devient :

$$\varepsilon + \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon' = 0\ . \qquad (2)$$

Divisons par ε, on obtient : $1 + \varepsilon - \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 0$. Le passage à l'ombre nous donne :

$${}^0\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) = 1.$$

Posons de nouveau : $\varepsilon' = \varepsilon(1 + \varepsilon''), \varepsilon''$ infinitésimal, on obtient une nouvelle équation : $\varepsilon\varepsilon'' - \varepsilon - \varepsilon'' = 0$, en divisant par ε et par passage à l'ombre, on obtient ${}^0\left(\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right) = -1$, on peut donc écrire : $\varepsilon' = -\varepsilon(1 + \varepsilon'''), \varepsilon'''$ infinitésimal.

Ce qui nous donne : $\omega\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^2\varepsilon'''$.

Finalement, cette procédure typiquement non standard nous donne l'expression des coordonnées du point M comme suit :

$$M_\omega = \begin{pmatrix} \omega\varepsilon \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon} + 1 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon''' \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2} + \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 - \varepsilon''' \end{pmatrix}.$$

Comme ε et ε''' sont des infinitésimaux , on peut écrire : $M_\omega \cong M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}+1 \\ \frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}-1 \end{pmatrix}$.

L'utilisation du principe de permancence nous donne alors les équations paramétriques de la courbe asymptote à la courbe $\mathcal{C}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2+t-1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le paramétrage obtenu n'est évidemment pas unique; en changeant de représentaιion de la décomposition associée à M, on trouve un autre paramétrage que l'on qualifiera d'équivalent. Contrairement à l'étude classique des courbes algébriques, on n'a pas à se préoccuper de l'existence de tels développements, ils apparaissent naturellement.

Etude dans la direction asymptotique $\vec{V_1}$:
Dans ce cas, le point illimité M_ω admet la décomposition :

$$M_\omega = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

En reportant ces valeurs dans l'équation de la courbe, et après simplification on a :

$$\sqrt{2}\omega\varepsilon(1+\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)^2 = 0 \ . \tag{3}$$

Le passage à l'ombre nous donne : ${}^0(\omega\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\omega\varepsilon$ est un réel limité; on a alors une asymptote oblique d'équation : $\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} = -{}^0(\omega\varepsilon)$, soit $y = x+1$.

De l'équation (3), on obtient $\omega = -\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{2}\varepsilon(1+\varepsilon)^2}$,

ce qui nous permet d'écrire les coordonnées du point à l'infini comme suit :

$$M_\omega = \begin{pmatrix} -\frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} \\ -\frac{(1-\varepsilon)^3}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2} \end{pmatrix}.$$

Le principe de permanence nous donne une paramétrisation rationnelle de la cubique :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(1-t)^3}{t(1+t)^2} \\ -\frac{(1-t)^2}{t(1+t)} \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] F. DIENER et G. REEB, *Cours d'analyse non standard*, Hermann, Paris 1989.

[2] M. GOZE, *Etude locale des courbes algébriques*, IRMA Strasbourg 1982.

[3] M. GOZE et R. LUTZ, *Non standard analysis: A practical guide with applications*, Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag 88 (1981).

[4] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés aux points singuliers d'une courbe réelle*, IRMA, Strasbourg, (1985).

[5] M. HANNACHI, *Courbure généralisée ou finesse des courbes planes* , Actes de l'école d'été OPU (Alger) CNRS (Paris) 1987, 181-185.

[6] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés à une courbe réelle*, Magrhreb Mathematica Rewiew, Vol.1 N°2 (1992), 161-166.

[7] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés à une courbe réelle dans* $\mathbb{R}^n$, Magrhreb Mathematica Rewiew, Vol.3 N°1 (1994), 65-68.

[8] M. HANNACHI, *Invariants métriques associés aux points singuliers, à distance finie ou infinie, d'une courbe réelle* , Thèse de doctorat d'état, Sétif 1996.

[9] J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNAUDIES, *Cours de mathématiques (tome 3)* , Dunod Université, Paris 1977.

Institut de Mathématiques
Université Ferhat Abbas, Sétif
1900 Algérie