

FRANCK MICHEL

Asymptotique de solutions oscillantes d'équations différentielles

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 69-79

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_69_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASYMPTOTIQUE DE SOLUTIONS OSCILLANTES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Franck MICHEL

1 Introduction

Durant la dernière décennie, plusieurs travaux de recherche (Isambert, Diener, Blais, Van den Berg, etc...) ont porté sur ce qui a été appelé le phénomène "fleuve" d'une équation différentielle. Les techniques d'asymptotique non standard ont été fréquemment utilisées, dans la continuité des premières études sur les canards.

Il est ressorti une description assez complète et satisfaisante du phénomène pour les équations différentielles à second membre polynomial (ou fraction rationnelle), et une description plus partielle pour les autres types d'équations. Il est d'autre part apparu sur les portraits de phase de certaines équations (en l'occurrence, des équations possédant des termes périodiques) des structures oscillantes a priori analogues aux fleuves (visuellement), mais ne correspondant pas mathématiquement aux définitions et théorèmes qui avaient été formulés. L'auteur a alors proposé une description asymptotique de ces "fleuves oscillants" (voir [7]), du moins, sous une condition dite de "régularité", qui permet de caractériser les cas génériques. Nous nous proposons d'explorer ici la grande richesse des cas de fleuves oscillants dégénérés qui s'offrent à nous, en illustrant sur des exemples les techniques de désingularisation à utiliser.

Le paragraphe 2 va établir un rappel succinct de la notion de "fleuve" d'une équation différentielle à second membre polynomial.

Le paragraphe 3 commencera par rappeler brièvement ce qu'est un fleuve oscillant dans le cas régulier, pour entrer ensuite dans le véritable but de ce papier, à savoir, l'étude des cas dégénérés de solutions oscillantes.

2 Fleuves des champs polynomiaux

2.1 Cas réguliers

La notion de fleuve régulier d'une équation à second membre polynomial a été développée par F. Diener, M. Diener et G. Reeb dans plusieurs articles (voir notamment [5],[3],[4]).

Les résultats mathématiques peuvent se résumer de la façon suivante.

Considérons une équation scalaire réelle de la forme:

$$\frac{dY}{dX} = P(X, Y) \quad (1)$$

où $P(X, Y) = \sum_{i \in I} a_i X^{m_i} Y^{n_i}$ est un polynôme. Soit $r \in \mathbb{Q}$ donné; on définit le rationnel $\mu_0(r) = \max_{i \in I} (m_i + r n_i)$ et le polynôme

$${}^r P(X, Y) = \sum_{m_i + r n_i = \mu_0(r)} a_i X^{m_i} Y^{n_i}$$

On a alors le théorème suivant (dans toute la suite, la notation $(F')_i$ désigne la dérivée première de la fonction F par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable).

Théorème 1 Soit (E) une équation de la forme (1) telle qu'il existe un couple $(k, r) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Q}$ vérifiant les hypothèses

(i) $c(r) = 1 - r + \mu_0(r) > 0$

(ii) k est une racine simple du polynôme $\lambda \rightarrow {}^r P(1, \lambda)$

Alors, si $({}^r P)'_2(1, k) > 0$ (resp. $({}^r P)'_2(1, k) < 0$), il existe une unique solution de (E) (resp. une infinité de solutions de (E)), asymptote en $+\infty$ à kX^r .

Une telle solution est alors appelée "fleuve régulier" (en $+\infty$) de type (k, r) de l'équation (E) , on parle de cas répulsif dans l'hypothèse $({}^r P)'_2(1, k) > 0$, et de cas attractif dans l'hypothèse $({}^r P)'_2(1, k) < 0$.

Nous renvoyons le lecteur aux références citées au début du paragraphe pour avoir la preuve de ce théorème; nous allons cependant le commenter d'une façon géométrique.

L'hypothèse (ii) signifie qu'il existe une unique courbe $G(X)$ asymptote à kX^r en $+\infty$, et telle que $P(X, G(X)) = 0$; en d'autres termes, $G(X)$ est une branche régulière d'isocline 0 de l'équation considérée, le champ s'annule en changeant de signe à son passage. La valeur de $c(r)$ est une mesure de l'importance de cette inversion; si celle-ci est suffisante (i.e. si $c > 0$), la branche d'isocline se comporte comme un attracteur de certaines solutions de l'équation. On peut alors montrer que ces solutions ont des propriétés d'exponentielle proximité vis à vis des solutions voisines, ce qui entraîne une apparence tout à fait particulière des "fleuves" sur le portrait de phase des équations (voir figure 1). Les valeurs de r susceptibles de convenir pour une certaine équation (E) s'obtiennent à l'aide d'une méthode de polygone de Newton, extraite de la théorie de Puiseux. Notons que les fleuves se développent asymptotiquement en puissances fractionnaires et décroissantes de X , que deux fleuves attractifs de type (k, r) partagent le même développement asymptotique (du

fait de l'exponentielle proximité), qui est naturellement différent de celui de la branche d'isocline 0 correspondante (en particulier, le développement des fleuves est très souvent divergent).

Il existe un résultat tout à fait analogue correspondant à la situation en $-\infty$, qui nous sera également utile:

Théorème 2 Soit (E) une équation de la forme (1) telle qu'il existe un couple $(k, r) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Q}$ vérifiant les hypothèses

(i) $c(r) = 1 - r + \mu_0(r) > 0$

(ii) k est une racine simple du polynôme $\lambda \rightarrow {}^r P(-1, \lambda)$

Alors, si $({}^r P)'_2(-1, k) < 0$ (resp. $({}^r P)'_2(-1, k) > 0$), il existe une unique solution de (E) (resp. une infinité de solutions de (E)), asymptote en $-\infty$ à kX^r .

On continue à parler de fleuve répulsif dans le cas où il y a unicité (donc ici $({}^r P)'_2(-1, k) < 0$) et de fleuve attractif dans l'autre cas.

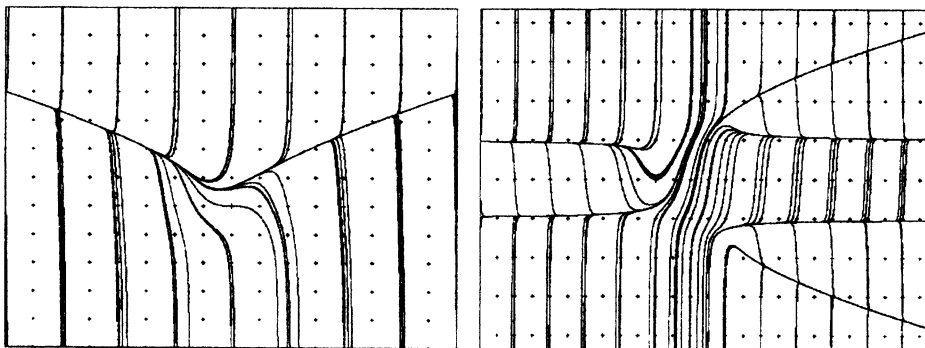


Figure 1: Partie gauche: équation $Y' = Y^3 - X^2$. Il y a une structure fleuve attractif en $-\infty$, et un fleuve répulsif en $+\infty$. Partie droite: équation $Y' = Y^4 - XY^2 + X$. Il y a deux structures "fleuve" en $-\infty$ (une attractive, une répulsive) et quatre structures "fleuve" en $+\infty$ (deux attractives, et deux répulsives).

2.2 Cas singuliers

Il apparut alors que la condition contenue dans l'hypothèse (ii) des théorèmes précédents, selon laquelle la racine k du polynôme ${}^r P(1, \lambda)$ devait être simple, était certes suffisante, mais pas du tout nécessaire à l'existence de solutions asymptotes à kX^r (qui plus est,

possédant les mêmes propriétés d'exponentielle proximité vis à vis des solutions voisines que les fleuves réguliers). On compléta donc le concept de "fleuve régulier" par celui de "fleuve singulier" (ou dégénéré). La méthode de recherche des fleuves singuliers, préconisée par F. Blais (voir [1]), est la suivante: si une équation (E) satisfait les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1 pour un couple (k, r) , à l'exception du fait que k est une racine multiple de ${}^r P(1, \lambda)$, alors, on réalise le changement de fonction $Z = Y - kX^r$, et on cherche à satisfaire les hypothèses du théorème 1 pour de nouveaux couples (k_1, r_1) , où $r_1 < r$. Trois possibilités peuvent alors se produire:

- soit le théorème 1 est vérifié, l'équation (E) est dite "désingularisée", on conclut à un fleuve régulier de type (k_1, r_1) en la fonction Z , qui correspond à un fleuve singulier de type (k, r) pour Y .
- soit il est impossible de trouver un couple (k_1, r_1) tel que $c(r_1)$ est strictement positif, ou que k_1 est une racine de ${}^{r_1} P(1, \lambda)$, on conclut alors à l'absence de fleuve singulier de type (k, r) .
- soit on trouve (k_1, r_1) satisfaisant les hypothèses (i) et (ii), à l'exception du fait que k_1 est une racine multiple de ${}^{r_1} P(1, \lambda)$; on itère alors le procédé, avec la nouvelle variable $Z_1 = Z - k_1 X^{r_1}$.

Toute équation polynomiale se "désingularise", d'après [1], en un nombre fini d'étapes. La figure 2 donne deux exemples d'équations qui se désingularisent chacune en une seule étape.

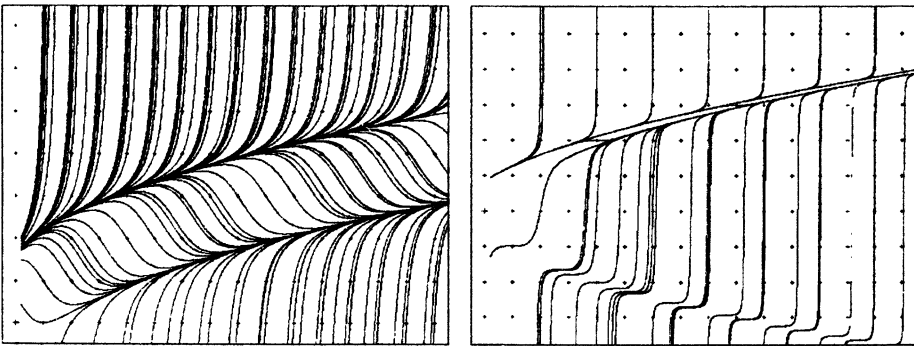


Figure 2: Partie gauche: équation $Y' = (Y - \sqrt{X} - 1)(Y - \sqrt{X} + 1)$. Il y a deux branches d'isocline 0, chacune d'elle correspond à une structure de type "fleuve singulier". Partie droite: équation $Y' = (Y^2 - X)^2$. Il y a deux branches d'isocline 0, une d'entre elle ne correspond à aucun fleuve, l'autre à une paire attractif/répulsif.

3 Fleuves oscillants

3.1 Cas réguliers

Considérons maintenant une équation scalaire réelle de la forme:

$$\frac{dY}{dX} = Q(X, X, Y) \quad (2)$$

où $Q(S, X, Y) = \sum_{i \in I} a_i(S) X^{m_i} Y^{n_i}$, $m_i \in \mathbb{Q}$, $n_i \in \mathbb{N}$, et $a_i \in \mathcal{C} = \{\text{Fonctions } 2\pi\text{-périodiques, de classe } C^\infty\}$.

Pour un certain $r \in \mathbb{Q}$ donné, on définit $\mu_0(r) = \max_{i \in I} (m_i + r n_i)$ et $\tilde{Q}(S, X, Y) = \sum_{m_i + r n_i = \mu_0(r)} a_i(X) X^{m_i} Y^{n_i}$. On dira de plus qu'une fonction $F(X)$ est asymptote à $k(X) X^r$, où $k(X) \in \mathcal{C}$, si $\lim_{X \rightarrow +\infty} (\frac{F(X)}{X^r} - k(X)) = 0$ (on notera $F(X) \sim k(X) X^r$).

Théorème 3 Soit (E) une équation de la forme (2) telle qu'il existe une fonction $k(X) \in \mathcal{C}$, non identiquement nulle, et un rationnel r , vérifiant les hypothèses:

(i) $c(r) > 1$

(ii) $\forall X$, $k(X)$ est une racine simple du polynôme $\lambda \rightarrow \tilde{Q}(X, 1, \lambda)$

Alors, si $\tilde{Q}'_3(X, 1, k(X)) < 0$ (resp. $\tilde{Q}'_2(X, 1, k(X)) > 0$), il existe une unique solution de (E) (resp. une infinité de solutions de (E)) telle que $\lim_{X \rightarrow +\infty} (Y(X)/X^r - k(X)) = 0$.

Une solution correspondant à ce théorème est appelée "fleuve oscillant régulier", on réalise les mêmes distinctions (attractif ou répulsif) qu'au paragraphe 2.

Commentaires: on s'intéresse a priori toujours à des équations à second membre polynomial, mais cette fois, les coefficients du polynôme sont des fonctions périodiques régulières. On cherche de même les branches régulières d'isocline 0; elles se décrivent asymptotiquement par une fonction $k(X) X^r$, où $k(X) \in \mathcal{C}$. Le théorème précise alors que moyennant l'existence d'une telle branche d'isocline (condition (ii)), et moyennant des conditions suffisantes d'inversion de signe à son voisinage (condition (i)), la courbe $k(X)$ se comporte comme un attracteur et décrit asymptotiquement une (ou une infinité) de solution de type "fleuve". Précisons que la condition (i) est un peu plus restrictive que précédemment ($c > 1$ au lieu de $c > 0$), et qu'il existe d'autres types de fleuves oscillants pour $c = 1$ et $0 < c < 1$. La preuve de ce théorème, et la description des autres types de fleuves oscillants peut être trouvée dans [7].

3.2 Cas singuliers

On peut maintenant s'interroger (comme on l'avait fait pour les fleuves polynomiaux) sur les possibilités d'affaiblir l'hypothèse (ii) du théorème 3; la situation est cette fois sensiblement plus complexe, du fait que l'on doit considérer pour chaque valeur de X de la période l'ensemble des racines réelles de $\tilde{Q}(X, 1, \lambda)$, et former à partir de celles-ci une fonction $k(X)$ susceptible de se comporter comme un attracteur. Nous n'allons pas établir ici un (ou plusieurs) théorème sur les fleuves oscillants singuliers, mais présenter des méthodes de désingularisation sur un certain nombre d'exemples caractéristiques.

Exemple 1 Equation

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{X} \left(Y - \sqrt{X} \left(1 + \frac{\sin X}{4} \right) \right)^2 - \sqrt{X} \quad (3)$$

(voir figure 3).

Il y a ici deux branches d'isoclines 0, chacune asymptote à $\sqrt{X} \left(1 + \frac{\sin X}{4} \right)$; on est cependant dans l'impossibilité d'appliquer le théorème 3, avec $r = 1/2$, bien que (i) soit vérifié ($c(1/2) = 2 > 1$), et que (ii) le soit partiellement: $\lambda \rightarrow \left(\lambda - \left(1 + \frac{\sin X}{4} \right) \right)^2$ possède une racine double $k(X) = 1 + \frac{\sin X}{4}$.

En fait, la situation est ici assez semblable à celle considérée dans le cas polynomial, puisque la racine est double quel que soit le point considéré de la période; on applique donc une désingularisation par le biais du changement de fonction $Z = Y - \left(1 + \frac{\sin X}{4} \right) \sqrt{X}$ qui donne l'équation:

$$\frac{dZ}{dX} = \sqrt{X} \left(Z^2 - 1 - \frac{\cos X}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{X}} \left(1 + \frac{\sin X}{4} \right)$$

On vérifie alors que les couples $(r, k(X))$ égaux à $(0, \sqrt{1 + \frac{\cos X}{4}})$ et à $(0, -\sqrt{1 + \frac{\cos X}{4}})$ vérifient les hypothèses du théorème 3, ce qui entraîne donc l'existence d'une (unique) solution de développement asymptotique $\left(1 + \frac{\sin X}{4} \right) \sqrt{X} + \sqrt{1 + \frac{\cos X}{4}} + \dots$, et d'une infinité de solutions de développement $\left(1 + \frac{\sin X}{4} \right) \sqrt{X} - \sqrt{1 + \frac{\cos X}{4}} + \dots$

La figure 3 représente le portrait de phase de l'équation (3), et celui d'une autre équation (voir légende de la figure) que l'on peut désingulariser suivant la même méthode.

Exemple 2 Equation:

$$\frac{dY}{dX} = X \left(-(1 + \sin X)Y + 1 \right) \quad (4)$$

C'est une équation a priori très simple, car linéaire, mais il est assez difficile de tirer de la quadrature l'asymptotique des solutions. Elle possède une courbe isocline 0, en l'occurrence $k(X) = \frac{1}{1 + \sin X}$ mais celle-ci présente des pôles en tout point congru à

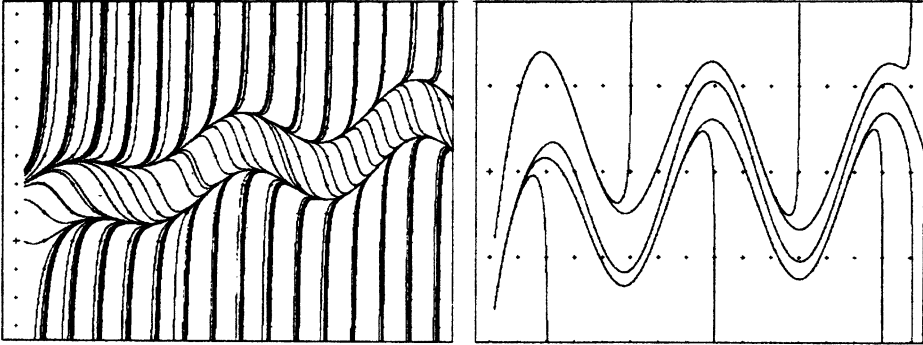


Figure 3: Partie gauche: equation $Y' = \sqrt{X}(Y - \sqrt{X}(1 + \sin X/4))^2 - \sqrt{X}$ Partie droite: equation $Y' = X(Y - \sin X)^3 + \cos X + \sin X - Y + \sin X/X$ Dans les deux cas, on désingularise l'équation par un changement de fonction, en une seule étape.

$3\pi/2 \pmod{2\pi}$, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème 3; celui-ci le serait pour toute équation $Y' = X(-(a + \sin X)Y + 1)$, avec $a > 1$.

Nous allons étudier l'asymptotique des solutions en utilisant deux modèles différents, transformant (4) en une équation singulièrement ou régulièrement perturbée. Nous introduisons pour cela un paramètre $\varepsilon > 0$ infiniment petit; rappelons que le signe \emptyset désigne classiquement une valeur infiniment petite quelconque; nous l'utiliserons plus bas pour désigner les termes d'une équation qui sont infinitésimaux pour des valeurs standard de x et y .

Modèle à perturbation singulière:

Le changement de variable $\begin{cases} X = 1/\varepsilon + x \\ Y = y \end{cases}$, où $1/\varepsilon = 0 \pmod{2\pi}$, transforme l'équation (4) en un champ lent-rapide:

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -(1 + \sin x)y + 1 + \emptyset \quad (5)$$

Modèle à perturbation régulière:

Le changement de variable $\begin{cases} X = 1/\varepsilon + x \varepsilon^{1/3} \\ Y = y \varepsilon^{-2/3} \end{cases}$, où $1/\varepsilon = 3\pi/2 \pmod{2\pi}$, transforme l'équation (4) en une équation à perturbation régulière:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{2} y + 1 + \emptyset \quad (6)$$

Il existe plusieurs résultats d'analyse non standard qui permettent d'étudier les solutions d'équations à perturbation régulière (cf. lemme de l'ombre courte) ou singulière (voir [9]). Il en résulte d'une part qu'une solution $y(x)$ de l'équation (5) de condition initiale $(0, 0)$, va vérifier la relation $y(x) \simeq \frac{1}{1+\sin x}$ pour tout $0 \lesssim x \lesssim 3\pi/2$. Il résulte d'autre part qu'une solution de (6), de condition initiale presque standard, va avoir pour ombre une solution de l'équation polynomiale non perturbée $y' = -x^2 y/2 + 1$ qui possède, d'après les théorèmes 1 et 2, un unique fleuve répulsif en $-\infty$, et une structure "fleuve attractif" en $+\infty$, asymptote chaque fois à $2/x^2$. La figure 4 (partie gauche) représente le portrait de phase de cette équation.

Soit $Y(X)$, une solution de l'équation (4) de condition initiale $(X_0, 0)$, où X_0 est i.g. et congru à 0 modulo 2π . On déduit de l'équation (5) la relation $Y(X) \simeq \frac{1}{1+\sin X}$ pour tout $X_0 \lesssim X \lesssim X_0 + 3\pi/2$; une fois X entré dans la $\varepsilon^{1/3}$ galaxie de $X_0 + 3\pi/2$, la solution $Y(X)$ correspond à l'une des solutions du modèle (6), qui s'avère avoir pour ombre l'unique fleuve répulsif en $-\infty$ de l'équation $y' = -x^2 y/2 + 1$; ce fleuve prend en $x = 0$ une certaine valeur que l'on désignera par la constante C . On répète alors le même processus pour les valeurs suivantes de X , alternant la description par (5) en dehors du halo des points $X = 3\pi/2 \pmod{2\pi}$, et la description par (6) autour de ces points. Il va de soi que le "matching" de la solution lente de (5) sur le fleuve répulsif de (6), même s'il est géométriquement naturel, n'est pas mathématiquement trivial. Le lecteur trouvera sa preuve rigoureuse dans [8] (elle fait appel à une technique non standard de loupes variables), de même que des informations sur les changements de variables à utiliser (exposants de ε en particulier) pour obtenir les modèles intéressants.

Il résulte de notre étude la description asymptotique d'une solution $Y(X)$ de l'équation (4) (voir figure 4): soit $X_n = X_0 + 2\pi n$, avec $X_0 \in [0, 2\pi[$; alors, si $X_0 \neq 3\pi/2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y(X_n) = \frac{1}{1+\sin X_0}$; si $X_0 = 3\pi/2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y(X_n) X_n^{-2/3} = C$.

Exemple 3 Equation

$$\frac{dY}{dX} = X (Y^2 - (1 + \sin X))^2 - X^{1/2}$$

Les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées avec $r = 0$, $k_1(X) = (1 + \sin X)^{1/2}$ et $k_2(X) = -(1 + \sin X)^{1/2}$, si ce n'est que chacune de ces racine est double en chaque point X , et que $k_1(X) = k_2(X)$ si $X = 3\pi/2 \pmod{2\pi}$. Cette équation présente une singularisation assez complexe, qui tient à la fois de celle de l'exemple 1 (puisque la singularisation est présente en chaque point de la période) et de l'exemple 2 (puisque la singularisation s'aggrave "ponctuellement", lorsque les deux racines se rencontrent). La désingularisation va donc se réaliser en utilisant conjointement les deux techniques présentées précédemment: d'une part une désingularisation que l'on pourra qualifier d'uniforme, qui consiste en fait à utiliser un changement de fonction pour se ramener à des racines simples $k(X)$; nous verrons que celle-ci va fonctionner en dehors des points congrus à $3\pi/2$. D'autre part, une désingularisation ponctuelle qui permet d'étudier asymptotiquement (à l'aide des

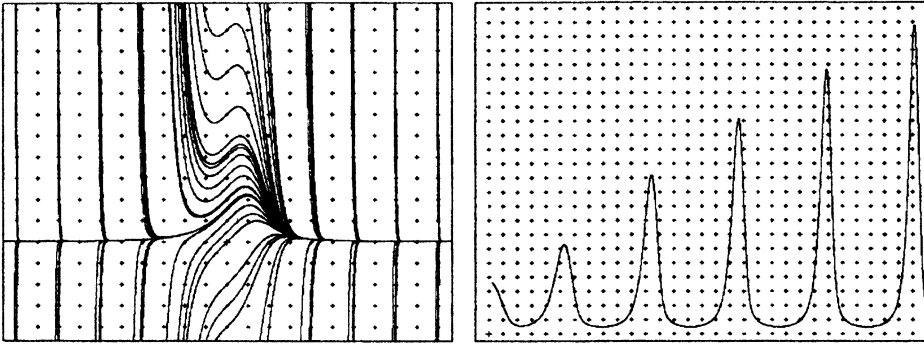


Figure 4: Partie gauche: équation $Y' = -X^2Y/2 + 1$. Partie droite: équation $Y' = X(-1 + \sin X)Y + 1$. La première équation est un modèle de la deuxième à l'emplacement des X qui annulent $1 + \sin X$.

modèles singulièrement et régulièrement perturbés) le "passage" par les solutions des points singuliers $3\pi/2 \bmod 2\pi$.

Désingularisation uniforme

La désingularisation le long de la racine $k_1(X)$ se fait comme précédemment par le changement $Z = Y - k_1(X)$, cette nouvelle variable vérifie l'équation (définie en tout point $X \neq 3\pi/2 \bmod 2\pi$):

$$\frac{dZ}{dX} = X Z^2 \left(Z + 2(1 + \sin X)^{1/2} \right)^2 - X^{1/2} - \frac{\cos X}{2(1 + \sin X)^{1/2}}$$

On pourrait alors appliquer le théorème 3 avec $r = -1/4$, $k(X) = -\frac{1}{2(1 + \sin X)^{1/2}}$ ou $k(X) = \frac{1}{2(1 + \sin X)^{1/2}}$ si, comme dans l'exemple 2, ces racines ne présentaient pas une discontinuité par période. Nous allons donc recourir à une étude asymptotique locale.

Désingularisation ponctuelle

Le changement $\begin{cases} X = 1/\varepsilon + x \varepsilon^{5/8} \\ Y = y \varepsilon^{1/8} \end{cases}$, où $1/\varepsilon = 3\pi/2 \bmod 2\pi$, permet de modéliser asymptotiquement notre équation à l'emplacement des singularités $3\pi/2 \bmod 2\pi$ par l'équation polynomiale perturbée régulièrement:

$$\frac{dy}{dx} = y^4 - 1 + \theta$$

Celle-ci possède deux structures de type "fleuve" (voir figure 5, partie gauche), une d'elle étant reliée à une solution oscillante asymptote à $k_1(X)$, l'autre à une solution asymptote à $k_2(X)$ (voir 5, partie droite).

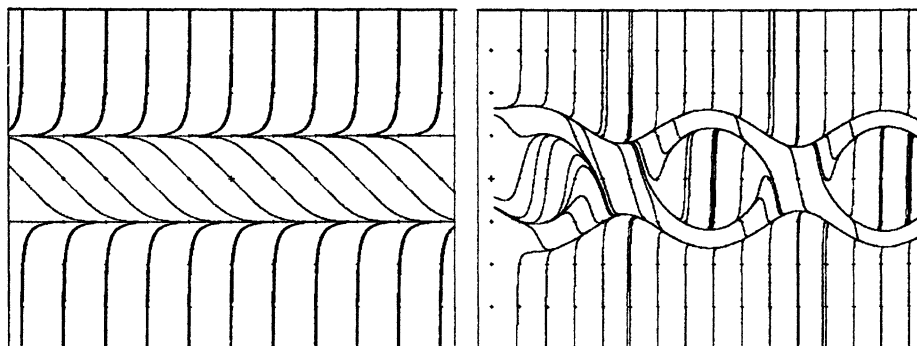


Figure 5: Parite gauche: $Y' = Y^4 - 1$. Partie droite: $Y' = X(Y^2 - (1 + \sin X))^2 - X^{1/2}$. Cette dernière équation possède deux structures fleuve oscillant, le "passage" des points $3\pi/2 \bmod 2\pi$ étant modélisé par l'équation polynomiale de la partie gauche.

References

- [1] F. Blais. Fleuves généralisés. Thèse de doctorat, Université Paris 7, U.F.R. de mathématiques, F75251 Paris Cedex 05, 1989.
- [2] B. Candelpergher, J.-C. Nosmas, and F. Pham. *Approche de la résurgence*. Hermann, 1993.
- [3] F. Diener. Propriétés asymptotiques des fleuves. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 302(Série 1):55–58, 1986.
- [4] F. Diener. Fleuves et variétés centrales. In *Singularités des équations différentielles, Dijon 1985*, pages 59–66. Astérisque 150-151, Société Mathématique de France, 1987.
- [5] M. Diener and G. Reeb. Champs polynomiaux : nouvelles trajectoires remarquables. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 38:131–150, 1987.
- [6] J.-H. Hubbard and B.-H. West. *Differential Equations, A Dynamical System Approach*, volume I. Springer, 1991.
- [7] F. Michel. Fleuves oscillants. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 2:127–141, 1995.
- [8] F. Michel. Trajectoires remarquables d'équations différentielles. Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose F06108 Nice Cedex 2, 1995.
- [9] I. P. Van den Berg. Macroscopic rivers. In E. Benoît, editor, *Dynamic Bifurcations*, pages 190–209. Springer Lecture Notes in Maths, 1493, 1991.

Franck MICHEL
Laboratoire de Mathématiques Jean-Alexandre Dieudonné
U.R.A. au CNRS N°168
Université de Nice-Sophia Antipolis
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02