ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

SCHÉRAZADE BENHABIB

Loi du « tout ou rien » dans un jeu de pile ou face

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, nº 1 (1997), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_1_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.1-7

LOI DU "TOUT OU RIEN" DANS UN JEU DE PILE OU FACE

BENHABIB Schérazade

Résumé

On considère les suites s formées de 0 et de 1 de longueur un entier ν. Chacune de ces suites s est formée d'une succession de blocs homogènes comprenant, uniquement, soit des 0, soit des 1. On désigne par $m(s)$ la variable aléatoire donnant la longueur maximale des blocs constituant s. Lorsque ν est illimité et λ un entier prenant des valeurs de 0 à ν, l'événement $[m(s) \leq \lambda]$ suit une loi de probabilité du type "tout ou rien". Plus précisément, on montre que le saut des valeurs $\simeq 1$ aux valeurs $\simeq 0$ est localisé dans un ensemble externe d'épaisseur $\frac{ln ln \nu}{\nu ln 2} + \frac{\mathbb{G}}{\nu}$, où $\mathbb{G}$ désigne la classe des nombres réels limités.

Abstract

We shall consider sequences of 0 and 1 of length an integer ν. If s is such a sequence, we define the random variable $m(s) = max(length(box))$ where box ranges in all the 0-blocks or 1-blocks of s. When ν is unlimited, and λ an integer less than ν, we shaw that the event $[m(s) \leq \lambda]$ has like a "zero or one" law of probability. More precisely, the jump from the values $\simeq 1$ to the values $\simeq 0$ is in an external set of thickness $\frac{ln ln \nu}{\nu ln 2} + \frac{\mathbb{G}}{\nu}$, where$\mathbb{G}$ is the galaxy of real limited numbers.

0. Introduction.

Cette étude utilise de manière essentielle le langage de l'analyse non standard dans la version I.S.T. développée par E. Nelson [2], [3], [4].
On se fixe un entier illimité ν et l'on considère le jeu de "pile ou face" où l'on lance ν fois de suite une pièce de monnaie non pipée. Autrement dit, on considère l'ensemble $\Omega = \{0, 1\}^\nu$ de toutes les suites de longueur ν formées avec des 0 et des 1. Bien entendu, le cardinal de Ω est égal à 2^ν et toutes les suites $s \in \Omega$ sont équiprobables avec une probabilité égale à $2^{-\nu}$.
Chacune de ces suites s est formée d'une succession de blocs homogènes comprenant, uniquement, soit des 0, soit des 1. On désigne par $m(s)$ la longueur maximum de ces blocs (c'est-à-dire la plus grande des longueurs des blocs de la suite s). On s'intéresse à la fonction de répartition de cette variable aléatoire et à celle de la moyenne $\frac{m(s)}{\nu}$. On a $1 \leq m(s) \leq \nu$ et $\frac{1}{\nu} \leq \frac{m(s)}{\nu} \leq 1$.
On se fixe un entier λ tel que $1 \leq \lambda \leq \nu$ et l'on considère la probabilité suivante :

$$p(\lambda) = P[m \leq \lambda] = P\{s \in \Omega \ : \ m(s) \leq \lambda\}.$$

On va alors montrer que l'on a :

$$\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right)^\nu \leq p(\lambda) \leq \left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right)^{\frac{\nu}{\lambda} - 1}. \tag{1}$$

On fera ensuite un "régionnement" de l'intervalle $I = [0, 1]$ en trois intervalles (externes)

$$I = A \cup B \cup C \quad \text{où} \quad A < B < C \tag{2}$$

tels que, pour $x \in I$, on ait

$$\begin{cases} x \in A & \text{ssi} \quad x2^{\nu x} \simeq 0, \\ x \in C & \text{ssi} \quad \dfrac{2^{\nu x}}{\nu} \simeq \infty . \end{cases}$$

On en déduira alors, aisément, ceci

$$\begin{cases} p(\lambda) \simeq 0 & \text{si } \dfrac{\lambda}{\nu} \in A, \\ \\ p(\lambda) \simeq 1 & \text{si } \dfrac{\lambda}{\nu} \in C. \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi, pour la fonction de répartition F définie par

$$F(x) = P\{s \in \Omega \; : \; \frac{m(s)}{\nu} \leq x\} = P\left[\frac{m}{\nu} \leq x\right],$$

on obtiendra les résultats suivants

$$\begin{cases} F(x) \simeq 0 & \text{pour } x \in A, \\ F(x) \simeq 1 & \text{pour } x \in C. \end{cases} \tag{4}$$

1. Quelques considérations sur la longueur des blocs.

Pour chaque suite $s \in \Omega$ et chaque entier $i \geq 1$, on désignera par $t_i(s)$la longueur du i-ème bloc de la suite s. On pourra poser $t_i(s) = 0$ lorsque la suite s possède moins de i blocs. on aura donc, en particulier, $t_i(s) = 0$ pour $i > \nu$.

On a ainsi $m(s) = max\{t_i(s) : i \geq 1\}$ par définition.

Pour toute suite $x_1, \cdots, x_j$ d'entiers supérieurs ou égaux à 1, on pose

$$L(x_1, \cdots, x_j) = \{s \in \Omega : t_i(s) = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq j\}.$$

Le résultat suivant précise le cardinal $\#L(x_1, \cdots, x_j)$ de l'ensemble $L(x_1, \cdots, x_j)$.

Lemme 1 *On a*

$$\#L(x_1, \cdots, x_j) = \begin{cases} 2^{\nu - (x_1 + \cdots + x_j)} & si \quad x_1 + \cdots + x_j < \nu \\ 2 & si \quad x_1 + \cdots + x_j = \nu \\ 0 & si \quad x_1 + \cdots + x_j > \nu \end{cases} \tag{5}$$

Autrement dit

$$P(L(x_1, \cdots, x_j)) = \begin{cases} (1/2)^{(x_1 + \cdots + x_j)} & si \quad x_1 + \cdots + x_j < \nu \\ (1/2)^{\nu - 1} & si \quad x_1 + \cdots + x_j = \nu \\ 0 & si \quad x_1 + \cdots + x_j > \nu \end{cases} \tag{6}$$

Démonstration. On commence par le cas $j = 1$. On se donne un entier $x \geq 1$ et on considère l'ensemble $L(x)$. Lorsque $x < \nu$, cet ensemble est constitué par les suites qui commencent par un bloc de longueur x formé par des 0 (resp. des 1) suivi d'une suite quelconque de longueur $\nu - x$ mais qui commence par 1(resp. par 0). Cela fait au total, $2 \times 2^{\nu-x-1} = 2^{\nu-x}$. Lorsque $x = \nu$, par contre, l'ensemble $L(x)$est constitué des seules deux suites constantes: son cardinal est donc égal à 2. Une simple récurence achève la démonstration. CQFD.

Lemme 2 *On se donne des entiers* $x_1, \cdots, x_j \geq 1$, *un entier* $\lambda \geq 1$, *et on considère la réunion* $M(x_1, \cdots, x_j, \lambda) = \bigcup_{x \leq \lambda} L(x_1, \cdots, x_j)$.
On a alors

$$P(M(x_1, \cdots, x_j, \lambda)) = \begin{cases} P(L(x_1, \cdots, x_j)) \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right) & si \quad x_1 + \cdots + x_j + \lambda < \nu \\ P(L(x_1, \cdots, x_j)) & si \quad x_1 + \cdots + x_j + \lambda \geq \nu \end{cases} \tag{7}$$

Démonstration. On utilise le lemme 1. On pose $x_1 + \cdots + x_j = n$. On a
$P(M(x_1, \cdots, x_j, \lambda)) = \sum\limits_{1 \leq x \leq \lambda} P(L(x_1, \cdots, x_j, x))$

$$= P(L(x_1, \cdots, x_j)). \begin{cases} \sum\limits_{1 \leq x \leq \lambda} \left(\frac{1}{2^x}\right) & \text{si} \quad n + \lambda < \nu \\ \sum\limits_{1 \leq x \leq \nu - n} \left(\frac{1}{2^x}\right) + \left(\frac{1}{2^{\nu-n-1}}\right) & \text{si} \quad n + \lambda \geq \nu \end{cases} \tag{8}$$

La première somme est égale à $\left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right)$ et la seconde à 1. CQFD.

2. Un encadrement de $p(\lambda)$**.**
On se fixe un entier λ tel que $1 \leq \lambda \leq \nu$ puis pour chaque entier $j \geq 0$, on considère l'événement suivant

$$E_j = \{s \in \Omega : t_i(s) \leq \lambda \text{ pour tout } i \leq j\}.$$

On considère également l'événement

$$E = \{s \in \Omega : \ \forall i \ t_i(s) \leq \lambda\} = \{s \in \Omega : m(s) \leq \lambda\}.$$

On observe que l'on a

$$E = E_{\nu-\lambda} \subset E_j \text{ pour tout } j \geq 0.$$

La probabilité de l'événement E est $p(\lambda)$, par définition. On a donc

$$P(E_{\nu-\lambda}) = p(\lambda) \leq P(E_j) \text{ pour tout } j \geq 0.$$

Le calcul exact de $p(\lambda)$ est un problème combinatoire intéressant qui conduit à une relation de récurrence linéaire remarquable.
Ici, on se contentera d'une estimation des $P(E_j)$ afin d'obtenir l'encadrement annoncé (1) pour $p(\lambda)$.

Lemme 3 *En posant* $t = \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right)$, *on a*

$$\begin{cases} P(E_j) = t^j & si \quad j\,\lambda < \nu\,, \\ P(E_j) = t^j + \dfrac{1}{2^{\nu+\lambda}} & si \quad j\,\lambda = \nu\,, \\ P(E_j) =\geq t^j & pour\ tout \quad j \geq 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Démonstration. Cela découle simplement du lemme 2 précédent, par récurrence. CQFD.

Théorème 1
1. En posant $t = \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right)$, *on a*

$$t^\nu \leq p(\lambda) \leq t^{\frac{\nu}{\lambda}-1}.$$

2. On a donc

$$\begin{cases} p(\lambda) \simeq 0 \quad si \quad \dfrac{\lambda 2^\lambda}{\nu} \simeq 0\,, \\ \\ p(\lambda) \simeq 1 \quad si \quad \dfrac{2^\lambda}{\nu} \simeq \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Démonstration.
1. D'après le lemme 3 et l'encadrement donné au 4, on a

$$t^{\nu-\lambda} \leq p(\lambda) \leq t^j \text{ pour tout entier } j \text{ tel que } j\,\lambda < \nu.$$

Pour l'unique entier k de l'intervalle $\left[\frac{\nu}{\lambda} - 1, \frac{\nu}{\lambda}\right[$, on a donc

$$t^\nu < t^{\nu-\lambda} \leq p(\lambda) \leq t^k \leq t^{\frac{\nu}{\lambda}-1}$$

puisque l'on a $0 < t < 1$.
2. On a toujours $0 << t^{2^\lambda} << 1$ ($x << y$ signifie $x < y$ et $x \not\simeq y$) : c'est clair si λ est limité et, lorsque λ est illimité, on sait que $t^{2^\lambda} = \left(1 - \frac{1}{2^\lambda}\right)^{2^\lambda} \simeq e^{-1}$.
Pour abréger, posons $r = t^{2^\lambda}$ et $\alpha = \frac{\nu}{\lambda 2^\lambda}$. On a ainsi

$$r^{\lambda\alpha} \leq p(\lambda) \leq r^\alpha t^{-1}.$$

Si $\alpha^{-1} \simeq 0$, on a $r^\alpha \simeq 0$ et, puisque t^{-1} est appréciable, le majorant de $p(\lambda)$ est infinitésimal donc $p(\lambda) \simeq 0$.
Si $\lambda^{-1}\alpha^{-1} \simeq \infty$, on a $r^{\lambda\alpha} \simeq 1$ donc $p(\lambda) \simeq 1$. CQFD.

Remarque. En passant, on peut observer ceci:
Lorsque $\frac{\lambda 2^\lambda}{\nu}$ est appréciable, l'exposant $\frac{\nu}{\lambda 2^\lambda} - \frac{1}{2^\lambda}$ est appréciable et on a donc $p(\lambda) << 1$.
Lorsque $\frac{2^\lambda}{\nu}$ est appréciable, l'exposant $\frac{\nu}{2^\lambda}$ est appréciable et on a donc $0 << p(\lambda)$.

3. Mise en place du régionnement.
L'entier illimité ν étant fixé, on considère l'intervalle $I = [0, 1]$ et, pour $x \in I$, on pose $g(x) = x2^{\nu x}$ et $h(x) = \frac{2^{\nu x}}{\nu}$. On pose aussi

$$H_1 = \{x \in I : g(x) \simeq 0\} \qquad H'_1 = \{x \in I : h(x) \simeq 0\}$$
$$G = \{x \in I : g(x) \simeq @\} \qquad G' = \{x \in I : h(x) \simeq @\}$$
$$H_2 = \{x \in I : g(x) \simeq \infty\} \qquad H'_2 = \{x \in I : h(x) \simeq \infty\}$$

$$a = \frac{ln\nu - lnln\nu}{\nu ln2} \qquad b = \frac{ln\nu}{\nu ln2}$$

$$H = \{ca : c \simeq 1\} \qquad H' = \{cb : c \simeq 1\}$$

1. Les deux fonctions g et h sont strictement croissantes sur I lequel se décompose donc, et de deux manières différentes, en trois intervalles (externes) qui se succèdent comme suit :

$$H_1 < G < H_2 \quad \text{et} \quad H'_1 < G' < H'_2.$$

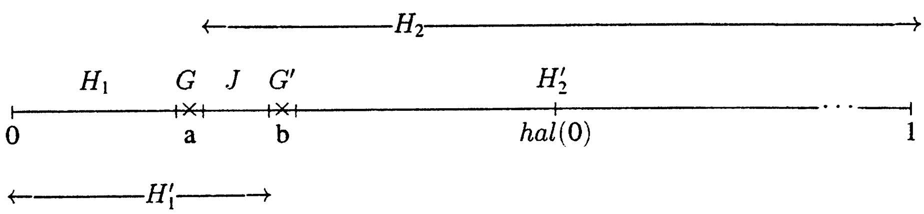
2. Si νx est limité alors $x \simeq 0$ et $g(x) \simeq 0$ donc $x \in H_1$. Autrement dit, pour $x \in G \cup H_2$, on a donc

$$G < H'_1 \quad \text{d'où} \quad H_1 \cup G \subset H'_1 \quad \text{et} \quad G' \cup H'_2 \subset H_2.$$

3. Désignons par $\mathbb{G}$ la galaxie principale formée des nombres réels limités. Posons $J = H_2 \cap H'_1$ de sorte que l'on a

$$G < J < G'$$

Cela est représenté dans le schéma suivant:



Lemme 4

$$G = a + \frac{\mathbb{G}}{\nu} \quad et \quad G' = b + \frac{\mathbb{G}}{\nu} = \frac{\ln\ln\nu}{\nu\ln 2} + G \tag{11}$$

$$H = \{a + zb : z \simeq 0\} = \{b + zb : z \simeq 0\} = H' \tag{12}$$

$$G \cup J \cup G' \subset H = H'. \tag{13}$$

Démonstration.
1. En posant $x = a + \frac{y}{\nu}$, il vient $g(x) = x2^{\nu x} = \left(a + \frac{y}{\nu}\right) 2^{\nu a + y}$.
Or $2^{\nu a} = \frac{\nu}{\ln\nu}$ donc $g(x) = \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{\ln\ln\nu}{\ln\nu\ln 2} + \frac{y}{\ln\nu}\right) 2^y$ où $\frac{\ln\ln\nu}{\ln\nu}$ est infinitésimal. Ainsi, on a $g(x) = @$ si et seulement si $y \in \mathbb{G}$.
De même, en posant $x = a + \frac{y}{\nu}$, il vient $h(x) = \frac{2^{\nu x}}{\nu} = 2^y$. On a donc $h(x) = @$ si et seulement si $y \in \mathbb{G}$. D'où $G' = b + \frac{\mathbb{G}}{\nu} = \frac{\ln\ln\nu}{\nu\ln 2} + G$ comme annoncé.
2. On observe que $\frac{a}{b} = \frac{\ln\nu - \ln\ln\nu}{\ln\nu} = 1 - \frac{\ln\ln\nu}{\ln\nu} \simeq 1$
D'où $H' = \{(1+z)b : z \simeq 0\} = \{(a+z)b : z \simeq 0\} = H$ sans détour.
3. Pour tout réel limité $x \in \mathbb{G}$, on a $\frac{x}{\nu b} = \frac{x\ln 2}{\ln\nu} \simeq 0$; donc $a + \frac{x}{\nu} \in H$ et $b + \frac{x}{\nu} \in H'$.
Autrement dit, on a $G \cup G' \subset H = H'$ et, comme J est situé entre G et G', on a également $J \subset H$ comme annoncé. CQFD.

La décomposition (2) annoncée dans l'introduction s'obtient en posant $A = H_1$, $B = G \cup J \cup G'$, $C = H_2'$.

5. Une loi du "tout ou rien".

Théorème 2 *Pour chaque $x \in I$, on pose $F(x) = P\left\{s \in \Omega : \frac{m(s)}{\nu} \leq x\right\}$.*
Alors

$$\begin{cases} F(x) \simeq 0 & pour\ x \in A, \\ F(x) \simeq 1 & pour\ x \in C, \\ F(x) \ll 1 & pour\ x \in G, \\ F(x) \gg 0 & pour\ x \in G'. \end{cases}$$

Démonstration. Ce théorème est un corollaire du théorème 1. En effet, il suffit d'observer que, pour $\frac{\lambda}{\nu} \leq x \leq \frac{\lambda+1}{\nu}$, on a $p(\lambda) \leq F(x) \leq p(\lambda+1)$ et d'appliquer le théorème 1. CQFD.

Remarque. Les deux intervalles externes $B \subset H$ sont emboîtés. On peut ajouter que "B est infiniment plus petit que H" dans le sens précis suivant : il existe deux points u et v dans H pour lesquels, quels que soit les points x et y de B, le rapport $\frac{x-y}{u-v}$ est infinitésimal.

En effet, on choisit un infinitésimal z tel que l'on ait $z\frac{\ln \nu}{\ln \ln \nu} \simeq \infty$ et on prend $u = a + zb$ et $v = a - zb$. Ainsi u et v sont dans H et $u - v = 2zb$. Tout point de B est minoré par un point de G et majoré par un point de G'. Pour x et y dans B, il existe donc toujours un réel limité r tel que l'on ait $|x - y| \leq b - a + z\frac{r}{\nu}$. Or

$$\left(b - a + \frac{r}{\nu}\right) . \frac{1}{u - v} = \frac{b - a}{2zb} + \frac{r}{2z\nu b} = \frac{\ln \ln \nu}{2z \ln \nu} + \frac{r \ln 2}{2z \ln \nu} \simeq 0. \text{ CQFD}$$

Remerciements. Nous tenons à remercier E. Nelson pour avoir suggéré le thème de cette étude et de son possible développement, ainsi que G. Wallet pour l'avoir suivie et corrigée.
La présentation finale de cet article doit beaucoup à L. Haddad. Qu'il soit ici remercié de l'attention et du soin qu'il a portés à sa lecture et à sa correction.

Références.

[1] W.Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley and Sons, New York, first edition, 1966.
[2] F. Diener, G. Reeb. *Analyse Non Standard.* Hermann, Paris, 1989.
[3] E. Nelson. *Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis.* Bulletin Amer. Math. Soc., 83(6):1165-1198, 1977.
[4] E. Nelson. *Radically Elementary Probability Theory.* Princeton University Press, 1987.
[5] I. Van den Berg. *Nonstandard Asymptotic Analysis.* Springer Verlag, Berlin et New York,1989.

BENHABIB Schérazade
Laboratoire de mathématiques,
Pôle des sciences et technologies,
Avenue de Marillac, F-17042 La Rochelle cedex 1,
e-mail : sbenhabi@math.univ-lr.fr